Univ. of
Toronto
Library

BINDING LIST AUG 1 1923

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2bulletindessci26fran

7338

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. G. DARBOUX, *président*.

H. POINCARÉ.

J. TANNERY.

E. PICARD.

P. APPELL.

FOUSSEREAU, *secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

31381 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Math
B

3

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BOUGAIEFF, BROCARD, GOURSAT,
G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOUËL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1901 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXVI. — ANNÉE 1902.

(XXXVIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

129870
24/4/23

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

QA
1
B8
v.37

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LORENTZ (H.-A.). — Lehrbuch der Differential- und Integral Rechnung und der Anfangsgrunde der analytischen Geometrie, übersetz von Dr Schmidt. Leipzig, J.-A. Barth; 1900.

Le Livre, qui est divisé en vingt-quatre Chapitres, peut être regardé comme formé de cinq Parties : 1° une Introduction (p. 1-123) pour un lecteur ne connaissant que les Mathématiques élémentaires; 2° le Calcul différentiel (p. 124-253); 3° le Calcul intégral (p. 253-341); 4° une Partie (p. 341-402) comprenant la série de Taylor et les séries trigonométriques; 5° les équations différentielles (p. 402-473). Je vais, pour chacune de ces Parties, indiquer sommairement les questions traitées en insistant sur ce qui peut donner une idée de la méthode de l'auteur, ainsi que de la très grande variété et de l'intérêt des exemples.

1. L'Introduction comprend les définitions et les propriétés les plus simples des fonctions algébriques, de l'exponentielle, du logarithme, des fonctions circulaires avec les formules usuelles de Trigonométrie plane ou sphérique, puis des notions de Géo-

métrie analytique se rapportant surtout à la représentation géométrique d'une fonction de une ou de deux variables.

En examinant en détail la façon dont M. Lorentz introduit la fonction exponentielle (p. 15), on verra déjà avec quel soin et quelle habileté les notions analytiques sont préparées par l'étude de cas particuliers, puis comment l'idée générale se dégage.

Deux exemples empruntés, l'un à la théorie des intérêts composés, l'autre à la théorie de l'absorption, font comprendre qu'on est conduit à une exponentielle quand on peut faire l'hypothèse suivante : pour un accroissement très petit donné à la variable x, l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable et à la valeur que possédait la fonction avant cet accroissement. (On écrira plus tard cette hypothèse

$$dy = ay\,dx,$$

a désignant une constante.)

2. Le premier Chapitre se rapportant au Calcul différentiel a pour titre : « Concepts fondamentaux (*Grundbegriffe*) du Calcul différentiel ». Il commence par des exemples. En laissant de côté ceux qui sont empruntés à la Géométrie et qui sont classiques, ces exemples sont : vitesse dans le mouvement varié, vitesse de refroidissement d'un corps plongé dans un milieu plus froid, chute de pression dans un tube traversé par un fluide.... Comme application de la théorie des maxima et des minima, on cherche le minimum de la déviation dans un prisme. La définition des dérivées du second ordre est suivie immédiatement de la détermination du rayon de courbure d'une courbe plane, des composantes de l'accélération d'un point matériel qui décrit une courbe.

A propos des dérivées partielles d'une fonction de deux variables x et y, l'auteur insiste sur l'expression de l'accroissement que prend la fonction pour un déplacement infiniment petit du point (x, y) dans une direction donnée; le résultat est obtenu au moyen d'une représentation géométrique, puis il est étendu au cas d'une fonction d'un nombre quelconque de variables. Comme exemples, on considère le volume d'une masse de gaz exprimé en fonction de la température et de la pression, les composantes de

la vitesse d'une molécule d'un fluide en mouvement, l'action d'un aimant infiniment petit sur une masse magnétique, les surfaces équipotentielles.... Comme application des dérivées partielles d'ordre supérieur, on trouve l'expression du rayon de courbure d'une section normale d'une surface, la détermination des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables, avec une indication sur la méthode des moindres carrés, enfin le calcul des dérivées des fonctions implicites.

3. Le premier Chapitre se rapportant au Calcul intégral a pour titre : « Concepts fondamentaux et formules fondamentales du Calcul intégral ». Le concept d'intégrale définie est introduit au moyen de deux exemples : on admet dans l'un la notion de l'aire, dans l'autre l'existence d'un mouvement correspondant à une loi donnée de la vitesse.

Les exemples nombreux qui suivent donnent une idée de la variété des questions dont la solution est obtenue au moyen d'une intégrale définie; je citerai seulement l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} c\,dt,$$

qui mesure la quantité de chaleur fournie à l'unité de masse d'un corps pour élever sa température de t_1 à t_2 quand la chaleur spécifique c varie avec la température, puis l'intégrale

$$a\int_{t_1}^{t_2} i^2\,dt,$$

qui donne la quantité de chaleur fournie dans l'intervalle de temps $t_2 - t_1$ par un fil que traverse un courant d'intensité variable i.

Les procédés d'intégration sont indiqués, puis appliqués à un grand nombre de fonctions simples.

La notion d'intégrale curviligne est éclaircie tout de suite en considérant le travail accompli par une force agissant sur un point matériel qui décrit une courbe. La définition du cas où l'intégrale curviligne dépend seulement de l'état initial et de l'état final se comprend mieux quand on a évalué d'une part la quantité de cha-

leur fournie à un corps pour le faire passer de l'état (v, t) à l'état $(v + dv, t + dt)$, quantité dont l'expression n'est pas une différentielle exacte, et d'autre part le quotient de cette quantité par la température absolue, quotient qui, lui, est une différentielle exacte.

Pour les intégrales doubles ou triples, les exemples sont empruntés à la Géométrie et à la Mécanique, en particulier à la théorie du potentiel newtonien. L'importance des transformations d'intégrales de volume en intégrales de surface est indiquée à propos de l'extension aux intégrales de volume du procédé d'intégration par parties.

4. Pour arriver à la série de Taylor, M. Lorentz s'appuie sur les propriétés des intégrales doubles. La méthode suivie, très simple si l'on se contente pour le reste de la forme de Lagrange, perd beaucoup de cette simplicité si l'on veut ensuite passer à la forme de Cauchy.

Après la série de Taylor, des procédés auxiliaires d'intégration sont expliqués sur de nombreux cas particuliers, puis viennent l'intégration des séries et le calcul approché des intégrales définies.

Un Chapitre est consacré aux séries de Fourier. Pour le développement d'une fonction en série trigonométrique, l'auteur ne se contente pas de donner l'expression des coefficients sous forme d'intégrales définies et d'énoncer les conditions de convergence. Il ajoute une suite d'explications dont chacune se comprend bien et éclaire une partie de la question, mais l'ensemble de ces explications ne donne pas une démonstration rigoureuse; c'est, du reste, ce que l'auteur a pris soin de faire remarquer. Le Chapitre se termine par la formule de Fourier

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)\cos\lambda(\xi - x)\,d\xi.$$

5. Pour commencer l'étude des équations différentielles, on explique comment, une équation différentielle du premier ordre étant donnée ainsi que la valeur de la fonction pour la valeur initiale de la variable, on peut, pour une suite d'accroissements très

petits donnés à la variable, calculer des valeurs très approchées des accroissements de la fonction, et l'on reprend cette explication dans le cas où, l'équation différentielle étant d'ordre n, on donne les valeurs initiales de la fonction et de ses $n - 1$ premières dérivées. [On sait que ces remarques presque évidentes peuvent conduire à une démonstration rigoureuse (¹)]. L'équation linéaire du premier ordre et les équations linéaires à coefficients constants sont traitées avec détails. On remarquera que les quantités complexes sont introduites seulement au moment où elles vont servir pour l'intégration des équations linéaires à coefficients constants.

A propos des systèmes d'équations différentielles, on donne l'exemple de deux vases contenant des gaz à des pressions différentes et réunis par un tube capillaire, puis les équations générales de la Dynamique et les intégrales premières que peuvent donner le principe des aires et le principe des forces vives.

Les équations aux dérivées partielles sont introduites à l'aide de deux exemples : Mouvement de l'air dans un tuyau cylindrique, puis variation avec le temps de la concentration d'une dissolution saline placée dans un vase cylindrique et telle que la concentration est plus grande au fond du vase qu'à la surface libre. En terminant, on indique que la difficulté dans l'intégration des équations aux dérivées partielles est de trouver les intégrales qui satisfont à des conditions initiales données, et que, dans ces questions, les séries trigonométriques, ainsi que la formule de Fourier, sont d'une grande utilité.

Cet exposé sommaire ne donnerait qu'une idée bien imparfaite de la façon dont l'auteur conçoit la préparation à l'étude des Sciences physiques; mais j'ai pu obtenir, sur le Livre de M. Lorentz qui vient d'être analysé, l'appréciation d'un physicien éminent.

M. Blondlot a bien voulu me communiquer ce qui suit :

« Dans les Éléments de Calcul infinitésimal que M. Lorentz a

(¹) *Voir* par exemple PICARD, *Traité d'Analyse*, 1re édition, t. II. p. 291.

écrits pour l'usage des jeunes gens qui se destinent aux Sciences physiques, on reconnaît la main d'un maître. Les matières traitées ont été choisies avec une expérience consommée pour répondre aux besoins de cette catégorie de lecteurs; la lucidité de l'exposition est complète et la lecture de l'Ouvrage constamment aisée et attrayante. Cet attrait est dû principalement à une profusion d'exemples habilement choisis, j'allais dire d'épisodes, montrant l'utilité de chaque théorie; prises le plus souvent dans les Sciences physiques, ces applications, plus tangibles encore que celles que l'on rencontre dans la Géométrie pure, non seulement soutiennent l'intérêt et stimulent la curiosité, mais de plus offrent toutes faites à l'élève les représentations mentales nécessaires pour comprendre les propositions mathématiques qu'il a quelquefois peine à trouver de lui-même. Tout cela constitue un véritable entraînement physico-mathématique. Quelle satisfaction encore pour l'étudiant quand, plus tard, abordant la Mécanique et la Physique, il y retrouvera mainte théorie déjà entrevue, celle du potentiel, par exemple!

» Si l'on se plaçait au point de vue exclusif de la rigueur, on dirait sans doute que dans ce Livre on a fait trop large part à l'intuition, que parfois, au lieu d'une démonstration, on s'est contenté d'un aperçu, que l'on a par trop mis en pratique le conseil de d'Alembert à ce jeune homme qui se méfiait des infiniment petits : « Allez et la foi vous viendra...»; mais ces critiques, qui seraient fondées s'il s'agissait de former d'emblée des mathématiciens accomplis, se tournent en éloges lorsqu'il s'agit d'un Ouvrage d'initiation. L'intuition a joué un rôle capital dans l'invention et dans le progrès du Calcul infinitésimal, et ce n'est que bien récemment que la rigueur définitive a été atteinte, on sait au prix de quels efforts.... La gradation que l'humanité a suivie pour édifier la Science, l'homme qui veut étudier la Science doit la suivre aussi. Les premiers degrés sont souvent les plus difficiles à franchir; aussi est-ce un grand service que M. H.-A. Lorentz a rendu à la jeunesse que d'écrire un Livre qui, en dirigeant ses efforts, lui épargnera bien du travail; on doit reconnaissance à l'éminent savant qui n'a pas dédaigné d'écrire un Livre élémentaire. »

E. Lacour.

BASSET (A.-B.). — AN ELEMENTARY TREATISE ON CUBIC AND QUARTIC CURVES. 1 vol. in-8°; XVII-255 pages. Cambridge, Deighton Bell; 1901.

L'auteur a réuni dans ce Volume un assez grand nombre de propriétés intéressantes de courbes particulières du troisième et du quatrième degré; cette réunion n'est pas sans intérêt ni pour les étudiants ni pour les maîtres : il y a là beaucoup de propositions susceptibles de démonstrations simples soit géométriques, soit analytiques, dont l'étude est propre à aiguiser l'esprit et à satisfaire le goût de ceux qui aiment l'élégance. M. Basset a en outre exposé rapidement les théories générales nécessaires pour l'étude des singularités des courbes du troisième et du quatrième degré; il établit en particulier les formules de Plücker. Son Livre se termine par un Chapitre destiné à montrer le parti qu'on peut tirer de la perspective pour l'étude des cubiques ou des quartiques. Ce que l'on vient de dire suffira, je l'espère, pour indiquer la nature des services qu'il ne manquera pas de rendre.

MÜLLER (F.). — VOCABULAIRE MATHÉMATIQUE FRANÇAIS-ALLEMAND ET ALLEMAND-FRANÇAIS, contenant les termes techniques employés dans les mathématiques pures et appliquées. Zweite Hälfte. 1 vol. gr. in-8; p. IX-XIV; 133-314. Leipzig, Teubner; 1901.

Le *Bulletin* a déjà parlé du vocabulaire de M. F. Müller et des services qu'il ne manquera pas de rendre. La seconde Partie, qui vient de paraître, sera particulièrement bien venue dans notre pays; n'eût-elle été qu'un simple dictionnaire de mots techniques, elle aurait sûrement été bien accueillie; mais la valeur du livre est augmentée singulièrement par les renseignements bibliographiques qu'il contient; M. Müller a eu en effet l'excellente idée d'indiquer les auteurs qui ont employé les mots dans les acceptions particulières qu'il signale; souvent même, quand il s'agit d'une acception importante, la *date* est donnée. Ces précieuses indications sont

très brèves, sans doute, mais on ne peut s'arrêter à regretter cette brièveté sans penser que, autrement, le travail de M. Müller n'aurait pas eu de fin. La même raison empêche de regretter l'absence de toute explication ; l'auteur s'est borné à mettre le mot français à la suite du mot allemand ; mais pouvait-on lui demander, quand il écrivait un dictionnaire, d'écrire une encyclopédie? Lui reprochera-t-on l'universalité de la langue mathématique, et viendra-t-on dire, pour citer quelques lignes prises au hasard, qu'il ne valait pas la peine d'expliquer que *Axoid* veut dire axoïde ; *axoidisch,* axoïdal; *Axonometrie,* axonométrie; *Azimut,* azimut; *azimutal,* azimutal et *azygetisch,* azygétique? Mais s'il avait supprimé les mots communs (ou presque communs) aux deux langues, cette fois encore, où se serait arrêté l'auteur? En outre cette seconde Partie doit servir aux mathématiciens allemands comme aux mathématiciens français, et les premiers, s'ils veulent écrire en français, ont besoin d'être fixés sur la forme française exacte, d'autant que, si bien qu'on ait appris une langue, ce n'est pas d'ordinaire avec le vocabulaire mathématique que l'on s'est familiarisé en étudiant cette langue. Et puis, ce qui importe quand on feuillette un dictionnaire, ce n'est pas de n'y point trouver les mots que l'on connaît, mais bien d'y trouver ceux dont on ne connaît pas le sens. Il y a au moins une catégorie de mots que le lecteur français, si j'en crois ma propre expérience, sera bien aise d'être assuré de trouver dans un dictionnaire : ce sont les mots qui se rapportent aux Mathématiques appliquées.

WEBER (H.). — Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik. Nach Riemann's Vorlesungen in vierter Auflage, neu bearbeitet von Heinrich Weber. Zweiter Band. in-8°; XI-527 pages. Braunschweig, Vieweg u. Sohn; 1901.

Nous avons eu l'occasion, à propos du premier Volume, de dire la haute valeur de cette publication, tant pour les mathématiciens que pour les physiciens. Les problèmes traités dans ce second

Volume ne sont pas moins intéressants que ceux qui remplissaient le premier. C'est tout d'abord l'étude de l'équation différentielle du second ordre que vérifie la série hypergéométrique, puis quelques indications substantielles sur la façon dont se comportent les solutions d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \rho y = 0,$$

lorsque ρ ne change pas de signe. C'est la seule partie du Livre qui concerne les Mathématiques pures : il est vrai qu'elle trouvera de nombreuses applications dans les théories physiques et que les parties suivantes sont riches en beaux problèmes mathématiques : en effet, elles se rapportent successivement à la conduction de la chaleur, à l'élasticité, aux oscillations électriques, enfin à l'Hydrodynamique.

CESARO (E.). — Vorlesungen über natürliche Geometrie. Autorisierte deutsche Aufgabe von *G. Kowalewski*. 1 vol. in-8°; VI-341 pages. Leipzig, Teubner; 1901.

Les *Lezioni di Geometria intrinseca* de M. E. Cesàro, outre qu'elles présentent le développement systématique de méthodes importantes qui s'appliquent depuis les courbes planes jusqu'aux équations de l'élasticité dans l'hyperespace, en passant par la déformation des surfaces, sont remplies d'exemples intéressants, bien dignes d'être cités par les maîtres et étudiés par les élèves : le succès qu'elles ont eu est fort naturel et nous sommes heureux d'en annoncer la traduction allemande, due à M. G. Kowalewski. Cette traduction a d'ailleurs donné à l'auteur l'occasion de reviser le texte et d'y introduire de nombreuses améliorations ou additions.

BOURLET (C.). — Cours de Mathématiques a l'usage des élèves architectes et ingénieurs, professé a l'École des Beaux-Arts. 1 vol. in-8°; III-244 pages. Paris, Naud; 1902.

Une des qualités les plus essentielles du professeur est de savoir s'adapter à son milieu. Le savant cherche la meilleure exposition, en soi, le maître cherche le mode d'exposition dont ses élèves tireront le meilleur parti; il lui faut donc connaître ses élèves, leur état d'esprit, et le but qu'ils veulent atteindre. M. Bourlet possède assurément cette qualité essentielle : habitué à développer ailleurs les théories sous leur forme la plus générale, à en pousser l'exposition jusqu'aux détails les plus minutieux, à aiguiser chez ses élèves la subtilité d'esprit, le goût du fini et le sens de l'élégance, il a su, pour ses auditeurs de l'École des Beaux-Arts, se dépouiller de ses habitudes, abandonner franchement toute subtilité, laisser de côté tout ce qui n'était pas utile, faire continuellement appel à cette intuition qui suffit largement à ceux qui veulent appliquer les Mathématiques à des objets concrets, qui ne prétendent ni scruter leurs principes, ni contribuer plus tard à leur avancement; par de nombreux exemples choisis dans les arts mêmes qu'ils auront à exercer, il a su enfin montrer à ses élèves le parti qu'ils pourraient tirer un jour de l'enseignement qu'ils recevaient. A vrai dire, je crois bien que toutes les matières que M. Bourlet a réunies dans ce *Cours de Mathématiques* (notion de fonction, dérivées, représentation graphique des fonctions, usage de quelques abaques, quadratures simples) devraient pénétrer dans l'enseignement élémentaire, si l'on voulait ne pas se préoccuper seulement d'orner les esprits, mais bien armer les jeunes gens pour les luttes du travail. Et il ne me paraît certain ni que le goût de la Science pure et le sens de sa beauté s'éteindraient parce qu'il y aurait plus de gens à savoir que cette Science sert à quelque chose, et comment elle sert, ni que la vanité reconnue des ornements dont on prétend affubler leur esprit exalte chez nos enfants l'ardeur à l'étude.

ŒTTINGEN (A. VON). — ELEMENTE DER GEOMETRISCH-PERSPEKTIVISCHEN ZEICHNENS. Mit 209 Textfiguren. 1 vol. in-8°; VII-177 pages. Leipzig, Engelmann.

La perspective ne doit pas être négligée dans l'enseignement élémentaire; outre son utilité technique, la simplicité et la fécondité de ses méthodes sont faites pour donner le goût de la Science, et elle donne l'occasion d'initier les élèves à la Géométrie synthétique. On conçoit fort bien un programme élémentaire où les propriétés fondamentales de la perspective et de l'homographie se mêlent à l'exposition de quelques règles indispensables au dessinateur.

C'est ce programme qu'a réalisé M. Œttingen dans le Livre que nous annonçons et qui est divisé en trois Parties : perspective de position (*Perspektive der Lage*), perspective métrique (*Massperspektive*), applications à la génération de quelques figures projectives dans l'espace.

Les titres de ces trois Parties en disent suffisamment l'objet. Il ne faudrait pas d'ailleurs prendre les mots dans un sens étroit : ainsi, dans la première Partie, les propriétés métriques ne sont nullement exclues; elles jouent au contraire un rôle essentiel, et c'est sur leur considération que sont fondées en particulier bon nombre de définitions et de démonstrations concernant la théorie de l'homographie : le titre reste vrai comme indication générale, et c'est dans cette première Partie que sont traités les problèmes classiques qui concernent la position relative des points, droites ou plans que l'on considère, tandis que les problèmes qui concernent les longueurs et les angles sont traités dans la seconde Partie. Quant à la troisième, elle est consacrée principalement à l'étude de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique, considérés comme le lieu d'une droite variable qui joint deux points qui se correspondent homographiquement sur deux droites fixes de l'espace. L'Ouvrage se termine par quelques pages où sont développées plusieurs propriétés importantes des coniques ou des cercles.

SICARD (H.). — Traité de Cinématique théorique, avec des Notes par *A. Labrousse*. 1 vol. in-8°; VIII-179 pages. Gauthier-Villars; 1902.

L'auteur a développé d'une façon simple et claire les propositions fondamentales de cinématique que suppose l'étude de la Mécanique rationnelle. L'exposition est à la fois géométrique et analytique : si cette façon de procéder ne satisfait pas les esprits systématiques qui veulent qu'on voie tout du même point de vue, quitte à se fatiguer les yeux, il semble bien qu'elle soit la plus pratique pour l'enseignement.

L'auteur développe d'abord les propriétés des vecteurs indispensables à la Cinématique comme à la Statique; il traite ensuite successivement du mouvement d'un point et du mouvement d'un corps solide : cette étude est d'abord faite au point de vue géométrique pour les vitesses, puis au point de vue analytique pour les vitesses et les accélérations; il eût été facile à M. Sicard d'ajouter quelques lignes pour montrer comment s'obtiennent géométriquement les règles qui concernent les accélérations. Le théorème de Coriolis est démontré géométriquement et analytiquement. Enfin le dernier Chapitre concerne la composition des mouvements d'un solide.

M. Labrousse a ajouté quelques Notes intéressantes sur les formules d'Olinde Rodrigues et leur application à l'étude détaillée d'un mouvement dans lequel tous les points du corps solide mobile décrivent des surfaces de Steiner, sur le déplacement considéré comme homographie, sur le théorème de Schönemann et Mannheim et l'application de ce théorème au mouvement d'une droite dont trois points décrivent des sphères dont les centres sont en ligne droite, enfin sur le quadrilatère articulé et les inverseurs.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DICKSON (L.-E.). — LINEAR GROUPS WITH AN EXPOSITION OF THE GALOIS FIELD THEORY. Tome VI de la TEUBNER'S SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN AUF DEM GEBIETE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN. 1 vol. in-8°; x-312 pages. Leipzig, Teubner; 1901.

Soit

$$u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_{s-1}$$

un système de s symboles; supposons qu'à chaque couple (u_α, u_β) de ces symboles on puisse faire correspondre, d'une part, un de ces symboles u_r que l'on appellera leur *somme* et que l'on écrira $u_\alpha + u_\beta$, d'autre part un autre de ces symboles u_δ que l'on appellera leur *produit* et que l'on écrira $u_\alpha u_\beta$; supposons que l'addition ainsi définie soit commutative et associative, que la multiplication soit commutative, associative et distributive; supposons, en outre, que la soustraction, regardée comme opération inverse de l'addition, soit toujours possible, en sorte qu'il devra y avoir un des symboles $u_0, u_1, \ldots, u_{s-1}$ qui jouera le même rôle que le nombre zéro dans l'addition ordinaire, puisque $u_\alpha - u_\alpha$ doit être un des symboles $u_0, u_1, \ldots, u_{s-1}$; rien n'empêchera de désigner ce symbole-là par le *signe* 0; supposons enfin que la division, regardée comme opération inverse de la multiplication, soit toujours possible, pourvu que le diviseur ne soit pas le symbole 0, en sorte qu'il devra y avoir un des symboles $u_0, u_1, \ldots, u_{s-1}$ qui jouera le même rôle que le nombre un dans la multiplication ordinaire, puisque $\frac{u_\alpha}{u_\alpha}$ doit être un des symboles $u_0, u_1, \ldots, u_{s-1}$; rien n'empêchera de représenter le symbole par le signe 1.

Un tel système de s symboles constitue un *champ* (*field*) que M. Dickson représente par $F(s)$. L'exemple le plus simple est, en supposant que p soit un nombre entier, l'ensemble des p nombres $0, 1, 2, \ldots, p-1$ lorsqu'aux résultats des additions et multiplications (au sens ordinaire du mot) effectuées sur ces nombres on substitue les restes de ces résultats pris suivant le module p. En un certain sens, ces p nombres, pour une valeur convenable de p,

font nécessairement partie de $F(s)$, pourvu que l'on donne aux signes 0 et 1 la signification que l'on vient d'expliquer, et que l'on regarde un des nombres k pris dans la suite 2, 3, ..., $p-1$ comme celui des symboles de $F(s)$ qui est la somme de k symboles égaux au symbole (1). Un autre exemple est fourni par les *imaginaires de Galois.*

Si $P(x)$ est un polynome en x de degré n, irréductible suivant le module premier p, c'est-à-dire tel que l'on n'ait pas, en désignant par $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ des polynomes entiers en x, à coefficients entiers

$$P(x) = g(x)\,h(x) + p\,k(x),$$

l'ensemble des $s = p^n$ polynomes de la forme

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sont des entiers pris parmi les nombres 0, 1, 2, ..., $p-1$, constitue un champ $F(s)$ au sens précédent, pourvu que l'on remplace dans la somme ou dans le produit de deux tels polynomes, effectués suivant les règles ordinaires de l'algèbre, le résultat $\Phi(x)$ par un polynome $\varphi(x)$, qui soit congru à $\Phi(x)$ suivant le système de modules p, $\varphi(x)$ c'est-à-dire tel que la différence $\Phi(x) - \varphi(x)$ soit de la forme

$$p\,g(x) + P(x)\,h(x),$$

$g(x)$ et $h(x)$ étant des polynomes entiers, et cela de manière que le degré de $\varphi(x)$ soit moindre que n et que les coefficients de $\varphi(x)$ soient pris parmi les nombres 0, 1, 2, ..., $p-1$.

On doit à M. Moore [1] d'avoir montré que ce second exemple, qui embrasse évidemment le premier, épuise tous les cas possibles, c'est-à-dire que, si l'on se donne un champ quelconque $F(s)$, défini comme plus haut, s est de la forme p^n, en désignant par p un nombre premier et par n un nombre entier positif et qu'on peut lui faire correspondre un champ $GF(p^n)$, dit *champ de Galois,* constitué comme on vient de l'expliquer. C'est le premier soin de M. Dickson que d'établir ce théorème, de montrer par là même qu'un tel champ ne dépend pas, au fond, du poly-

---

[1] *Bull. amer. math. Soc.*, 1893.

nome $P(x)$, irréductible (mod p), qui peut servir à le constituer, puis d'établir l'existence d'un champ $GF(p^n)$ pour tout nombre premier p et tout entier positif n. Il établit ensuite la théorie du champ de Galois, théorie où interviennent et se généralisent diverses propositions de la théorie des nombres, ainsi que Galois l'avait déjà reconnu. Cette étude constitue la première Partie de son Livre (p. 1-71).

La seconde Partie est intitulée : *Théorie des groupes linéaires dans un champ de Galois;* je me bornerai, comme pour la première, à en expliquer l'objet.

Si l'on considère m variables

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots \quad \xi_m,$$

et les substitutions linéaires

$$\text{(A)} \qquad \xi'_i = \sum_{j=1}^{j=m} \alpha_{ij} \xi_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

dans lesquelles les coefficients α_{ij} sont des éléments d'un champ de Galois $GF(p^n)$, tels que le déterminant

$$|\alpha_{ij}|$$

ne soit pas nul, il est clair que les substitutions relativement à l'opération de composition constitueront un groupe fini; c'est le groupe linéaire général dans le champ de Galois $GF(p^n)$; ce groupe peut aussi être regardé comme un groupe de permutations, si l'on regarde les variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ comme devant être pris parmi les éléments du champ $GF(p^n)$ et comme étant les indices des p^{nm} lettres

$$l_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m},$$

obtenues en remplaçant les ξ par toutes les valeurs possibles. Car il est évident que l'effet de la substitution (A) revient à remplacer les p^{nm} lettres

$$l_{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m}$$

par les p^{nm} lettres

$$l_{\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_m}.$$

L'intérêt qui s'attache à l'étude de ce groupe linéaire apparaît

immédiatement. Cette étude est développée dans une suite de quinze Chapitres (p. 75-310) relatifs à la théorie générale, au groupe linéaire abélien et à sa généralisation, au groupe hyperabélien, au groupe hyperorthogonal, au groupe linéaire qui laisse invariante une forme quadratique dont les coefficients appartiennent au groupe de Galois, etc. Signalons l'application de la théorie au groupe de l'équation des vingt-sept droites sur la surface générale du troisième ordre, et les renseignements sur les systèmes connus de groupes simples rassemblés à la fin du Volume.

M. Dickson, par sa connaissance approfondie du sujet, par les nombreuses et importantes contributions qu'il y a apportées, était désigné pour écrire ce Livre. Il l'a fait dans un style très condensé, grâce auquel il a pu faire tenir en trois cents pages un très grand nombre de faits; il ne paraît cependant avoir rien omis qui fût nécessaire pour l'intelligence des matières qu'il traite, et la lecture de son Livre, malgré l'élévation du sujet, peut être abordée sans aucune érudition spéciale.

STOKES (Sir G.). — Mathematical and physical Papers. Tome III. 1 vol. in-8°; viii-413 pages. Cambridge University Press; 1901.

Le troisième Volume des *Œuvres scientifiques* de Sir G. Stokes contient les Mémoires suivants :

On the Effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums (1-141) (*Transactions of the Cambridge philosophical Society*, t. IX).

An Examination of the possible effect of the radiation of heat on the propagation of sound (142-154) (*Philosophical Magazine*, t. I).

On the Colours of thick plates (155-196) (*Transactions of the Cambridge philosophical Society*, t. IX).

On a new elliptic Analyser (197-202) (*Report of the British Association for* 1851).

On the Conduction of heat in crystals (203-227) (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. VI).

On the total Intensity of interfering light (228-232) (*Transactions of the Royal Society of Edimburgh*, t. XX).

On the Composition and Resolution of streams of polarized light from different sources (233-258) (*Transactions of the Cambridge philosophical Society*, t. IX).

Abstract of a paper « On the Change of refrangibility of light » (259-413) (*Proceedings of the Royal Society*, t. VI).

Ces Mémoires remontent aux années 1850, 1851, 1852.

GIBBS (I.-W.) et WILSON (E.-B.). — VECTOR ANALYSIS. A Text-Book for the use of students of Mathematics and Physics. 1 vol. in-8°, XVIII-436 pages. New-York, Ch. Scribner's sons, 1901.

Ce Volume fait partie d'une série, les *Yale Bicentennial Publications;* les Livres qui constitueront cette série seront l'œuvre des professeurs de la *Yale University*. L'un des auteurs de celui-ci, M. I. Williard Gibbs, que ses travaux de Thermodynamique ont rendu justement célèbre, s'occupe d'un autre Volume de la même série, les *Elementary Principles in statistical mechanics;* il fait tous les ans des Leçons sur l'*Analyse des vecteurs :* ces Leçons constituent le fond du présent Livre, mais, conformément au désir de M. Gibbs, M. Edwin Bidwell Wilson a eu toute liberté pour les rédiger, les modifier ou les compléter.

C'est un *Text-Book* que les auteurs ont prétendu écrire, et, à parcourir ce Livre, on reconnaît bien vite des hommes rompus à l'enseignement oral, connaissant à fond les besoins des élèves, désireux de leur éclaircir les choses, de leur éviter les fautes, de leur mettre en main un instrument dont ils puissent se servir, dont ils connaissent l'utilité et la puissance. C'est, lorsqu'on écrit un Livre, une tendance très naturelle que de le faire aussi systématique que possible, de s'enfermer dans une idée, et de suivre,

aussi loin que possible, une méthode unique. Il y a nombre d'excellents Livres qui sont faits de cette façon et qui ont dû procurer aux auteurs, lorsqu'ils ont quitté la plume, une légitime satisfaction : ils revoyaient toute leur œuvre, ils se réjouissaient en pensant qu'elle était bien enchaînée, qu'ils ne s'étaient jamais écartés de leur plan et qu'elle ne comportait pas de digressions inutiles : le sujet avait été pris à son commencement, et mené à bonne fin sans que l'auteur se fût jamais écarté de la ligne droite, sans que le lecteur eût été tenté de regarder à droite ou à gauche.

Ce n'est pas toujours ces Livres-là, si bien faits qu'ils soient, qui conviennent aux étudiants. Dans l'enseignement oral, on est amené très naturellement à présenter de diverses façons la démonstration d'un même théorème : on soupçonne que celle-ci, qui, pour le maître, qui domine le sujet, est la plus simple et la plus naturelle, n'est pas conforme aux habitudes de l'auditeur : on lui en donne une autre, qu'il comprend mieux, et qui éclaire la première ; on tient compte de sa façon de penser et l'on cherche à la modifier peu à peu ; on sait qu'il s'occupe d'autres sujets que celui qu'on traite et l'on réveille son ardeur en lui montrant que les vérités nouvelles qu'on lui enseigne lui serviront ailleurs et lui permettront d'aller plus loin dans ces Sciences où il a déjà pénétré et qui, peut-être, l'attirent plus, pour le moment, que le Cours où il assiste.

Il se familiarise peu à peu avec les idées et les notations qu'il ignorait hier : il s'émerveille de cette nouvelle forme sous laquelle se présentent des propositions qu'il connaissait déjà ; il les systématise peu à peu sous cette forme et en prévoit d'autres, et, s'il a le goût de la logique, s'amuse à rattacher les fils que son maître avait laissés flotter.

En lisant le Livre de MM. Gibbs et Wilson, on a l'agréable sensation d'assister à des Leçons admirablement faites, dont les auditeurs acquièrent, presque sans peine, ce qui leur importe vraiment, où l'intérêt ne languit pas, où l'on est presque tenté de savoir autant de gré au maître de ce qu'il dit, qui est essentiel, et de ce qu'il ne dit pas, dont on peut se passer et qui fatiguerait.

Le Livre est divisé en trois Parties bien distinctes : la première comprend la théorie de l'addition et de la multiplication des vec-

teurs; la seconde concerne le Calcul différentiel et intégral; la troisième contient la théorie des fonctions linéaires d'un vecteur.

Les auteurs ont donné le plus grand soin aux notations. Les vecteurs sont systématiquement représentés par des caractères gras, majuscules ou non. Les notations $\mathbf{A}.\mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ sont employées, la première pour le produit *droit* (produit intérieur de Grassmann), qui est un nombre, la seconde pour le produit *gauche* (produit extérieur), qui est un vecteur. Non seulement ils expliquent soigneusement leurs notations, mais ils n'oublient pas de dire comment on doit les énoncer : le premier produit s'énonce **A** *dot* **B**, le second **A** *cross* **B** [1]. Pour ce qui est de la multiplication scalaire (multiplication d'un vecteur par un nombre), ils n'emploient pas de signe : c'est la simple juxtaposition qui indique l'opération. Ainsi $x\mathbf{A}$ ou $\mathbf{A}x$ veut dire le vecteur produit du vecteur **A** par le nombre x. Ils insistent sur les cas où l'on peut supprimer les parenthèses et ceux où il faut les conserver. Ainsi, d'après ce qu'on vient d'expliquer, le symbole $(\mathbf{A}.\mathbf{B})\mathbf{C}$ veut dire le produit du vecteur **C** par le nombre $\mathbf{A}.\mathbf{B}$; mais on peut aussi bien écrire $\mathbf{A}.\mathbf{BC}$, parce que, le symbole **BC** n'étant pas défini, au moins pour le moment, $\mathbf{A}.\mathbf{BC}$ ne peut pas s'interpréter autrement que comme le produit du vecteur **C** par le nombre $\mathbf{A}.\mathbf{B}$. De même le symbole $\mathbf{A}.\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ ne peut pas s'interpréter autrement que comme le nombre produit droit des deux vecteurs **A** et $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$, dont le dernier est le vecteur produit gauche des deux vecteurs **B**, **C**. Ils adoptent le signe $+$ pour l'addition géométrique. Les lettres **i**, **j**, **k** sont réservées pour trois vecteurs égaux à l'unité dirigés suivant les arêtes d'un trièdre trirectangle fixe. Ainsi le symbole $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ représentera un vecteur égal (équipollent) au vecteur qui part de l'origine des coordonnées et aboutit au point dont les coordonnées cartésiennes sont x, y, z.

Le premier Chapitre est consacré à l'addition et à la multiplication scalaire; la principale application se rapporte au Calcul barycentrique. Le second Chapitre concerne les lois des diverses multiplications. La partie théorique se termine par la réduction à

---

[1] On trouvera, page 138, une note assez amusante sur les diverses façons d'énoncer l'opérateur ∇

des produits de deux vecteurs des produits de trois, quatre, ... vecteurs. Des applications, qui montrent bien la portée de la méthode, sont faites à la Trigonométrie sphérique, à la Statique du corps solide, à la Cinématique, à la Géométrie analytique.

Le calcul différentiel débute par la notion de dérivée géométrique et par les règles de dérivation : les applications à la courbure, à la torsion, à la cinématique sont toutes indiquées. A chaque fonction scalaire (numérique) V des trois coordonnées d'un point (x, y, z) est attaché un vecteur

$$\nabla V = \mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z},$$

le dérivatif (*derivative*) de la fonction V. On peut le définir comme le vecteur qui jouit de la propriété

$$d\mathbf{r}.\nabla V = dV,$$

pour toutes les valeurs de $d\mathbf{r}$. Les auteurs développent avec soin les importantes propriétés de ce vecteur qui joue, comme on sait, un rôle essentiel.

Le même signe ∇ peut se rapporter à un vecteur $\mathbf{V}$ qui dépend des nombres x, y, z; les symboles $\nabla.\mathbf{V}$ et $\nabla \times \mathbf{V}$ seront définis par les égalités

$$\nabla.\mathbf{V} = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z},$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{i} \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{k} \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z};$$

où les symboles $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}$; ... désignent des vecteurs, dérivées partielles du vecteur $\mathbf{V}$ par rapport aux nombres x, ..., en sorte que, si V_1, V_2, V_3 désignent les composantes du vecteur $\mathbf{V}$ (que l'on peut regarder comme des nombres), le nombre $\nabla.\mathbf{V}$ sera la somme des nombres $\frac{\partial V_1}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial y}, \frac{\partial V_3}{\partial z}$, tandis que le vecteur $\nabla \times \mathbf{V}$ aura pour composantes les trois quantités $\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}, \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}, \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}$.

Le nombre $\nabla.\mathbf{V}$ est la divergence du vecteur $\mathbf{V}$; le vec-

teur $\nabla \times \mathbf{V}$ est le *curl* [1] du même vecteur. On reconnaît là des combinaisons qui se rencontrent fréquemment en Mécanique et en Physique mathématique. Ce système de notations conduit à une suite de formules très simples relatives, en particulier, aux opérations ∇, $\nabla.$, $\nabla \times$ appliquées à des sommes ou à des produits numériques, droits ou gauches, de nombres ou de vecteurs, et à l'itération des opérations considérées. Ces nombreuses formules se présentent d'une façon simple et naturelle.

Le symbole

$$\int_C \mathbf{W}.d\mathbf{r},$$

où $\mathbf{W}$ désigne un vecteur dépendant du point x, y, z de la courbe C, ou, si l'on veut, du vecteur $\mathbf{r}$ qui part de l'origine des coordonnées pour aboutir au même point et où le vecteur infiniment petit $d\mathbf{r}$ peut être regardé comme un élément d'arc de cette courbe (parcourue dans un sens défini), se comprend de lui-même, en se reportant à la définition du produit droit; il a le même sens que l'intégrale curviligne

$$\int_C (W_1\, dx + W_2\, dy + W_3\, dz),$$

où W_1, W_2, W_3 sont les projections du vecteur $\mathbf{W}$. Si en désignant par V une fonction numérique des variables numériques x, y, z, on regarde W comme égal au vecteur ∇V, l'intégrale prise à partir du point x_0, y_0, z_0 jusqu'au point x, y, z est égale à $V(x, y, z) - V(x_0, y_0, z_0)$, en sorte que, dans les mêmes conditions, l'intégrale $\int \mathbf{W}.d\mathbf{r}$ prise le long d'une courbe fermée est nulle; réciproquement, si le vecteur $\mathbf{W}$ est tel que la condition précédente soit vérifiée, il existe une fonction (numérique) V telle que l'on ait $\mathbf{W} = \nabla V$.

L'intégrale de surface d'un vecteur $\mathbf{W}$ relative à la surface S est

---

[1] *Curl* veut dire *boucle;* autant conserver le mot anglais, comme a fait (en allemand) M. Weber dans son édition des Leçons de Riemann sur les équations aux dérivées partielles.

définie par la formule

$$\int\int_S \mathbf{W}.d\mathbf{a} = \int\int_S [W_1\, dy\, dz + W_2\, dz\, dx + W_3\, dx\, dy],$$

où, dans le premier membre, le vecteur infiniment petit $d\mathbf{a}$ représente, d'après des conventions bien connues, une aire infiniment petite découpée sur la surface S. Ces notions et notations permettent de présenter sous une forme très simple et condensée les théorèmes classiques de Gauss, Stokes, Green et conduisent à une foule de propositions du même genre, bien que sans doute moins importantes. Si l'on considère une fonction numérique V des variables x_2, y_2, z_2 ou un vecteur $\mathbf{W}$ qui dépend des mêmes variables, le potentiel de V ou de $\mathbf{W}$ est une fonction (numérique), ou un vecteur fonction des variables x_1, y_1, z_1 défini par l'une ou l'autre des équations

$$\operatorname{Pot} V = \int\int\int \frac{V(x_2, y_2, z_2)}{r_{12}}\, dx_2\, dy_2\, dz_2,$$

$$\operatorname{Pot} \mathbf{W} = \int\int\int \frac{\mathbf{W}(x_2, y_2, z_2)}{r_{12}}\, dx_2\, dy_2\, dz_2,$$

où r_{12} est la distance du point x_1, y_1, z_1 au point x_2, y_2, z_2.

La combinaison des fonctions Pot V, Pot $\mathbf{W}$ avec les symboles ∇, $\nabla.$, $\nabla\times$ donne lieu à une suite de propositions simples. Signalons en particulier les notations

$$\nabla \operatorname{Pot} V = \operatorname{New} V,$$

$$\nabla \times \operatorname{Pot} \mathbf{W} = \operatorname{Lap} \mathbf{W},$$

$$\nabla . \operatorname{Pot} \mathbf{W} = \operatorname{Max} \mathbf{W},$$

dont les seconds membres s'énoncent *newtonien* de V, laplacien ou maxwellien de $\mathbf{W}$, et les combinaisons qui résultent encore de ces notations et des précédentes.

Il nous reste à donner quelque idée de la troisième Partie, consacrée aux fonctions linéaires d'un vecteur.

Un vecteur $\mathbf{r}'$ est dit *fonction linéaire* d'un vecteur $\mathbf{r}$ si les composantes de $\mathbf{r}'$ sont des fonctions linéaires et homogènes des composantes du vecteur r. Cette définition peut d'ailleurs être remplacée par la suivante : $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ est une fonction linéaire de $\mathbf{r}$

si l'on a, quels que soient les vecteurs $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \mathbf{f}(\mathbf{r}_1) + \mathbf{f}(\mathbf{r}_2).$$

L'étude des fonctions linéaires se ramène à celle de combinaisons pour lesquelles les auteurs ont adopté les noms de *dyades* et de *dyadiques* (*dyad, dyadic*). En désignant par $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, ..., $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, ... des vecteurs, le symbole

$$\Phi = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{b}_3 + \ldots$$

n'a par lui-même aucun sens, puisque la définition d'un produit de deux vecteurs n'a été donnée que dans le cas où les deux facteurs sont séparés par l'un des deux signes ., $\times$; mais l'expression précédente prend facilement un sens si on la considère comme un opérateur. Appliquée à un vecteur quelconque $\mathbf{r}$, la quantité $\Phi.\mathbf{r}$ sera, par définition, le vecteur

$$\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1.\mathbf{r} + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2.\mathbf{r} + \mathbf{a}_3\mathbf{b}_3.\mathbf{r} + \ldots,$$

obtenu en faisant la somme (géométrique) des vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, ... respectivement multipliés par les nombres $\mathbf{a}_1.\mathbf{r}$, $\mathbf{a}_2.\mathbf{r}$, $\mathbf{a}_3.\mathbf{r}$, ..., qui ont été définis plus haut. L'expression Φ s'appelle un *dyadique;* le nom de *dyade* s'applique aux éléments $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_2\mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}_3\mathbf{b}_3$, ..., qui portent aussi le nom de *produits indéterminés*. Les vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, ... s'appellent *antécédents,* les seconds vecteurs $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, ... s'appellent *conséquents*. En intervertissant les antécédents et les conséquents d'un dyadique, on obtient le dyadique *conjugué*. Deux dyadiques Φ, Ψ sont égaux, lorsque l'on a, quel que soit le vecteur $\mathbf{r}$,

$$\Phi.\mathbf{r} = \Psi.\mathbf{r}.$$

Le *scalaire* Φ_S du dyadique Φ est le nombre

$$\mathbf{a}_1.\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2.\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3.\mathbf{b}_3 + \ldots;$$

le vecteur Φ_X du même dyadique est le vecteur

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3 + \ldots.$$

Pour multiplier un dyadique par un nombre, il suffit (par définition) de multiplier par ce nombre l'un des vecteurs qui entrent dans chacune des dyades qui composent le dyadique. Il est en

outre aisé de montrer que la dyade $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\ldots)(\mathbf{l}+\mathbf{m}+\mathbf{n}+\ldots)$ est égale au dyadique

$$\begin{aligned} &\mathbf{al}+\mathbf{am}+\mathbf{an}+\ldots\\ +&\mathbf{bl}+\mathbf{bm}+\mathbf{bn}+\ldots\\ +&\mathbf{cl}+\mathbf{cm}+\mathbf{cn}+\ldots\\ +&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ceci permet de réduire un dyadique.

On montre en effet, d'une part, qu'un dyadique peut toujours être mis sous la forme du dyadique particulier

$$\begin{aligned} \Phi = \quad & a_{11}\mathbf{ii} + a_{12}\mathbf{ij} + a_{13}\mathbf{ik}\\ + & a_{21}\mathbf{ji} + a_{22}\mathbf{jj} + a_{23}\mathbf{jk}\\ + & a_{31}\mathbf{ki} + a_{32}\mathbf{kj} + a_{33}\mathbf{kk}, \end{aligned}$$

où a_{11}, a_{12}, ... sont des nombres : cette forme (*nonion form*) est caractéristique, c'est-à-dire que deux dyadiques sont égaux suivant que, lorsqu'on les a mis tous deux sous la forme précédente, les coefficients numériques sont ou ne sont pas les mêmes. On peut mettre aussi un dyadique, et cela d'une seule façon, sous la forme

$$\mathbf{a}\mathbf{A}+\mathbf{b}\mathbf{B}+\mathbf{c}\mathbf{C},$$

où les vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sont donnés arbitrairement, pourvu toutefois qu'ils ne soient pas parallèles à un même plan.

Le produit droit de deux dyades $\mathbf{ab}$ et $\mathbf{cd}$ [qui s'écrit $(\mathbf{ab}).(\mathbf{cd})$] est par définition la dyade $b.cad$, où il faut entendre, en vertu des définitions précédentes, que le vecteur a, par exemple, est remplacé par le vecteur que l'on obtient en le multipliant par le nombre $\mathbf{b}.\mathbf{c}$. Le produit droit de deux dyadiques se définira par là et par la loi de distributivité. On considère aussi des produits gauches d'une dyade par un vecteur ou d'un vecteur par une dyade, des produits gauches de deux dyades, lesquels touchent à la théorie des triades et des triadiques, qui n'est pas abordée dans le Livre de MM. Gibbs et Wilson.

La forme $\mathbf{al}+\mathbf{bm}+\mathbf{cn}$, à laquelle peut être ramené tout dyadique, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ étant des vecteurs donnés non parallèles à un même plan, donne lieu aux observations suivantes : elle peut être réduite à une somme de deux dyades si les vecteurs $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ sont parallèles à un même plan, à une dyade s'ils sont parallèles à une

même droite : si l'on n'est pas dans un de ces cas d'exception, le dyadique est *complet*.

Le dyadique $\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$ appliqué à un vecteur quelconque ne change pas ce vecteur; en d'autres termes, on a, quel que soit le vecteur $\mathbf{r}$,

$$\mathbf{ii}.\mathbf{r} + \mathbf{jj}.\mathbf{r} + \mathbf{kk}.\mathbf{r} = \mathbf{r};$$

le dyadique $\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$ ou tout dyadique égal s'appelle *idemfactor*. Si $\mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn}$ est un idemfactor, les deux systèmes de vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ et $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ sont dits *réciproques;* c'est là d'ailleurs une notion que les auteurs ont introduite antérieurement. Elle conduit à celle de deux dyadiques Φ, Ψ réciproques, c'est-à-dire telles que le produit $\Phi.\Psi$ soit l'idemfactor, puis à celle de la puissance entière, positive ou négative d'un dyadique. Laissant de côté ce qui concerne la réduction d'un dyadique à la forme normale, les doubles multiplications, etc., je me borne à signaler quelques résultats exposés à la fin de cet important Chapitre.

Un dyadique Φ, mis sous la forme d'un nonion

$$\begin{aligned}\Phi = \quad & a_{11}\mathbf{ii} + a_{12}\mathbf{ij} + a_{13}\mathbf{ik} \\ & + a_{21}\mathbf{ji} + a_{22}\mathbf{jj} + a_{23}\mathbf{jk} \\ & + a_{31}\mathbf{ki} + a_{32}\mathbf{kj} + a_{33}\mathbf{kk},\end{aligned}$$

à trois invariants numériques; le déterminant

$$\Phi_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

et les deux nombres

$$\Phi_s = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$
$$(\Phi_2)_s = A_{11} + A_{22} + A_{33};$$

La notation Φ_s antérieurement expliquée veut dire que Φ_s est le scalaire de Φ; de même $(\Phi_2)_s$ est le scalaire du dyadique

$$\begin{aligned}\Phi_2 = \quad & A_{11}\mathbf{ii} + A_{12}\mathbf{ij} + A_{13}\mathbf{ik} \\ & + A_{21}\mathbf{ji} + A_{22}\mathbf{jj} + A_{23}\mathbf{jk} \\ & + A_{31}\mathbf{ki} + A_{32}\mathbf{kj} + A_{33}\mathbf{kk};\end{aligned}$$

les A sont les mineurs du déterminant Φ_3. Ceci posé, le dya-

dique Φ vérifie l'équation du troisième degré

$$\Phi^3 - \Phi_s \Phi^2 + (\Phi_2)_s \Phi - \Phi_3 \mathrm{I} = 0.$$

où I désigne l'idemfactor. C'est l'équation dite *de Hamilton-Cayley*.

Cette théorie, quelque peu abstraite, trouve une belle et immédiate application dans le Chapitre suivant consacré aux rotations et dilatations, et où s'introduisent les notions de *versors, perversors, tensors*, *tonics, cyclotonics, shearers,* etc. D'autres applications concernent les surfaces du second degré, la propagation de la lumière dans les cristaux, la courbure des surfaces, les vibrations harmoniques, etc.

Les auteurs, à la fin de chaque Chapitre, ont donné un sommaire des définitions, propositions et formules essentielles. Ces résumés seront extrêmement commodes pour tous ceux qui auront étudié leur Livre et qui n'auront qu'à s'y reporter pour se rappeler de suite les points les plus importants.

ESTANAVE (E.). — Revue décennale des thèses présentées a la Faculté des Sciences de Paris en vue du grade de Docteur ès Sciences, du 1er janvier 1891 au 31 décembre 1900, avec l'indication des périodiques contenant la plupart de ces Mémoires ou leurs Analyses. 1 vol. in-8°, 114 pages. Arcis-sur-Aube, Impr. L. Frémont, 1901.

Le titre de cette publication dit assez son utilité et son intérêt. Elle contient l'énumération de 347 thèses, dont 63 regardent les Mathématiques. Cette énumération suit l'ordre chronologique dans chacun des ordres (Sciences mathématiques, physiques, naturelles). L'auteur a d'ailleurs donné deux Tables, l'une par noms d'auteur, l'autre par matières : dans cette dernière les Mathématiques sont divisées en Analyse, Géométrie, Mathématiques appliquées. Les recherches sont donc extrêmement faciles; enfin M. Estanave a joint à son Travail quelques documents législatifs et statistiques qui peuvent être utiles.

Qu'il nous soit permis d'exprimer le regret que M. Estanave ait cru devoir borner à la seule Faculté des Sciences de Paris son

intéressant Travail. Ce sera sans doute toujours à la Sorbonne que se passeront la plupart des thèses et, d'ordinaire, les meilleures; mais enfin toute l'activité scientifique de la France n'est pas concentrée à Paris, et il n'est pas souhaitable qu'elle le soit. La période qu'a embrassée M. Estanave comprend la création des Universités; si cette création n'est pas un acte vain, l'activité des Facultés des Sciences ira en grandissant : les thèses présentées devant les Facultés autres que celle de Paris sont un signe de cette activité, et c'est sans doute ces thèses-là que, dans l'avenir, il sera plus difficile de retrouver. Le public savant, les grandes bibliothèques ne peuvent manquer de faire bon accueil à la publication de M. Estanave. Il lui sera facile, soit dans une nouvelle édition, soit simplement dans le Volume qu'il publiera en 1911, d'ajouter quelques pages supplémentaires, qui seront les bienvenues.

SNELLIUS (W.). — Le degré du méridien terrestre mesuré par la distance des parallèles de Berg-op-Zoom et de Malines, publié par H. Bosmans, S. J. In-8°, 22 pages. Bruxelles, Impr. Polleunis; 1900.

COIGNET (M.). — Le Traité des sinus, publié par H. Bosmanns, S. J. In-8°, 80 pages. Bruxelles, Impr. Polleunis; 1901.

W. Snellius (1591-1626), de Leyde, eut le premier l'idée d'évaluer la longueur d'un arc du méridien par la méthode trigonométrique. Son Travail, publié en 1617 dans l'*Eratosthenes batavus*, comprenait la mesure de l'arc compris entre les parallèles d'Alcmaar et de Berg-op-Zoom. Peu content de ses résultats, Snellius recommença les mesures, et *prolongea jusqu'à Malines* le réseau de ses triangles.

Ce sont les mesures de ce réseau complémentaire, recherchées en vain par Musschenbroek, dont la minute originale, inédite, est conservée à la Bibliothèque royale de Bruxelles, que le P. Bosmans vient d'éditer. Cette publication est accompagnée de notes propres à servir à l'histoire des travaux géodésiques.

Michel Coignet (1549-1623) était fort estimé des mathéma-

ticiens de son époque : malheureusement, de ses travaux, la plupart inédits, un petit nombre seulement a été conservé ; on les trouve à la Bibliothèque royale de Bruxelles.

Le *Traité des sinus* a pour objet la construction des Tables de lignes trigonométriques naturelles : il présente cette particularité d'avoir été écrit en 1612, deux ans avant l'apparition de la *Mirifica logarithmorum canonis descriptio* de Neper. Aussi l'éditeur, à cette occasion, a retracé dans de savantes notes l'histoire des formules qui s'y rencontrent. Plusieurs de ses conclusions, neuves ou peu connues, formeront une contribution intéressante à l'histoire de la Trigonométrie au XVIIe siècle.

A. F.

BOLTZMANN (L.). — LEÇONS SUR LA THÉORIE DES GAZ (Ire Partie). Traduction française par A. GALLOTTI, avec une Introduction et des Notes de M. M. BRILLOUIN. Paris, Gauthier-Villars; 1902.

Personne n'aurait aujourd'hui l'idée de contester l'avantage énorme que les physiciens actuels tirent de l'emploi des raisonnements mathématiques : les méthodes purement expérimentales qui ont conduit leurs prédécesseurs à la découverte des grandes lois de la Nature deviennent insuffisantes pour une étude minutieuse de ses propriétés. Le physicien devient de plus en plus un théoricien, et son laboratoire n'est plus là que pour vérifier des faits dont l'existence est prévue d'avance, imposée, pour ainsi dire, par le seul raisonnement.

Le Livre que vient de publier M. Gauthier-Villars en est un exemple frappant, comme nous allons essayer de le montrer en exposant ses grandes lignes.

M. Boltzmann indique au début de son Ouvrage quelles sont les raisons qui ont conduit, depuis fort longtemps, à supposer que les corps n'emplissent pas d'une façon continue l'espace qu'ils occupent, mais sont plutôt composés de particules infimes séparées les unes des autres, les molécules, à supposer aussi que ces molécules sont constamment en mouvement. Dès l'antiquité

les philosophes ont eu l'idée logique de cette structure moléculaire. Des faits d'observation nombreux et plus ou moins récents conduisent à faire la même hypothèse; citons entre autres la plupart des propriétés de la matière étudiées en Chimie et en Cristallographie.

C'est là d'ailleurs (et il convient d'insister sur ce point), c'est là une simple *hypothèse* à laquelle il faudrait se garder d'assigner le caractère d'un fait mathématiquement exact; mais cette hypothèse est grosse de conséquences: les idées atomistiques, quoique fortement combattues par toute une école de physiciens modernes, ont conduit à des découvertes fort importantes et, à ce titre, elles méritent d'être encore développées. Peut-être découvrira-t-on un jour quelle est la constitution exacte de la matière et reconnaîtra-t-on que les hypothèses actuelles des atomistes sont fausses; peut-être regardera-t-on la théorie moléculaire comme une représentation grossière, puérile même, des propriétés de la matière. Qu'importe, si ces hypothèses, qui ne sont en somme que la représentation d'un ensemble d'analogies mécaniques, ont conduit auparavant, par le développement mathématique de ces analogies, à la découverte de faits nouveaux?

D'ailleurs, si M. Boltzmann montre, au début de son Ouvrage, la vraisemblance de ces suppositions, s'il explique comment elles peuvent rendre compte non seulement des propriétés des gaz, mais aussi de celles des liquides et des solides, les adversaires de ces hypothèses auraient mauvaise grâce à le lui reprocher. Il a bien soin, en effet, en plusieurs points de ces Leçons, de rappeler que ce qu'il y a de rigoureux dans ses développements c'en est seulement la partie mathématique : il tire rigoureusement des conséquences mathématiques de certaines hypothèses; or ces hypothèses coïncident par certains points avec la réalité; donc, très vraisemblablement, les conséquences qu'il en déduit présenteront aussi un caractère réel : à l'expérience de le constater. C'est là la véritable façon, pour un physicien, d'utiliser les Mathématiques; c'est ainsi qu'ont procédé non seulement les partisans de la théorie moléculaire, mais bien d'autres, et trop nombreuses elles sont déjà pour qu'on puisse les citer, les découvertes faites par cette méthode et confirmées *a posteriori* par l'expérience.

Il suffit d'ailleurs de jeter un coup d'œil sur la Table des ma-

tières pour se rendre compte du caractère provisoire de ce qui n'est que l'hypothèse : ce premier Volume, en effet, envisage successivement dans ses trois Chapitres trois cas entièrement différents : dans le premier Chapitre, les molécules gazeuses sont regardées comme des boules élastiques n'agissant les unes sur les autres qu'au moment où elles se rencontrent. Dans le second, ces molécules sont au contraire des centres de forces agissant à distance les unes sur les autres, quelle que soit d'ailleurs leur distance, la nature de la force n'étant pas déterminée. Dans le troisième, enfin, on suppose que cette force est une force répulsive dont l'intensité est en raison inverse de la cinquième puissance de la distance, s'annulant par conséquent assez vite quand les molécules s'éloignent ; cette hypothèse spéciale étant destinée à simplifier le calcul des équations différentielles du mouvement des molécules.

Et l'auteur ne se borne pas à cela : dans la seconde Partie de ses Leçons, dont M. Gallotti prépare actuellement la traduction, c'est surtout à l'hypothèse de Van der Waals qu'il s'attache, à cette hypothèse de la force de cohésion qui est, contrairement au cas précédent, une force attractive et restant sensible à des distances assez grandes. Chacune de ces hypothèses spéciales conduit d'ailleurs, par un développement convenable, à des résultats concordant avec la pratique. Souvent même, et c'est là l'utilité de la méthode employée, les raisonnements mathématiques ont permis de prévoir certaines propriétés que les expérimentateurs ont vérifié depuis.

Il serait maladroit de chercher à résumer en quelques lignes tout ce que ce Livre contient d'intéressant. La besogne serait d'autant plus ardue que les Leçons de M. Boltzmann sont elles-mêmes un résumé, une mise au point, pour ainsi dire, de tous ses Mémoires précédents et de tous les Travaux analogues publiés par Kirchhoff, Maxwell, Van der Waals, etc. Nous nous bornerons donc à indiquer brièvement les principaux sujets traités dans ce premier Volume.

C'est d'abord, dans l'Introduction, une justification de l'hypothèse moléculaire, justification que nous avons exposée plus haut dans ses grandes lignes ; puis la définition, par les chocs des molécules sur les parois, de la pression d'un gaz ou d'un mélange

gazeux, qui devient ainsi fonction des masses et des vitesses moyennes des molécules.

Adoptant pour un instant l'hypothèse de molécules élastiques, dans le premier Chapitre M. Boltzmann étudie d'abord, en faisant intervenir le calcul des probabilités, la répartition des vitesses la plus vraisemblable dans un gaz dénué de mouvements d'ensemble et qui n'est soumis à aucune force extérieure. Il est amené incidemment à préciser une notion fort importante en Physique moléculaire : c'est la distinction des milieux en « molar-geordnete ou molar-ungeordnete » et « molekular-geordnete ou molekular-ungeordnete », ce que le traducteur a rendu en français par milieu « comportant une organisation d'ensemble ou sans organisation d'ensemble » et milieu « comportant une organisation moléculaire ou sans organisation moléculaire ». Nous croyons utile d'indiquer ici le sens encore peu connu de ces expressions.

On dit que la répartition des molécules comporte une organisation d'ensemble (molar-geordnete) si, par exemple, certaines variables qui déterminent le mouvement des molécules ont, dans certaines parties *finies* de l'espace occupé par le gaz, d'autres valeurs moyennes que dans d'autres parties : par exemple, la pression, ou la vitesse moyenne des molécules, peut être plus grande dans une moitié du récipient que dans l'autre; ou, plus généralement, une partie finie du gaz peut se comporter autrement qu'une autre.

L'absence de toute loi de ce genre caractérise une disposition dénuée d'organisation d'ensemble (molar-ungeordnete).

Quand la disposition des molécules ne varie pas régulièrement d'un espace fini à un autre, c'est-à-dire quand on a un ensemble inorganisé, il peut se faire cependant qu'on trouve une certaine régularité dans des groupes définis de deux molécules voisines (ou même dans des groupes qui, sans avoir une étendue finie, en comprennent davantage). On dira d'une telle disposition qu'elle comporte une organisation moléculaire (molekular-geordnete). Pour ne mettre en évidence que deux exemples dans la variété infinie des cas possibles, nous aurions une disposition de cette nature en supposant que chaque molécule se dirige toujours vers le centre de la molécule la plus rapprochée, ou encore que chaque molécule douée d'une vitesse comprise entre certaines

limites ait pour voisines immédiates dix autres molécules remarquablement plus lentes. Si ces groupements spéciaux n'étaient pas limités à certaines régions de l'espace occupé par le corps, mais se trouvaient en moyenne aussi nombreux dans toutes ses parties, la disposition serait néanmoins dénuée d'organisation d'ensemble.

Enfin, s'il n'existe aucune régularité de cette nature, il n'y a pas d'organisation moléculaire (molekular-ungeordnete).

Pour un milieu sans organisation spéciale, M. Boltzmann montre que la répartition des vitesses des molécules la plus probable est celle qu'a indiquée Maxwell.

En supposant l'état d'un gaz stationnaire, il déduit des équations du mouvement moléculaire la loi connue de Boyle (ou de Mariotte). En caractérisant la température des gaz par la force vive moyenne de leurs molécules et par comparaison avec un gaz type, il retrouve les lois de Charles et d'Avogadro.

Différents phénomènes observés dans les gaz apparaissent ensuite comme conséquences du mouvement de leurs molécules : la conductibilité électrique, la conductibilité calorifique, le frottement intérieur, la diffusion ; et tous ces phénomènes sont caractérisés par des coefficients qu'il calcule en fonction de certaines données simples comme la masse ou la vitesse moyenne des molécules.

Telle est, dans un rapide aperçu, la matière du premier Chapitre de l'Ouvrage. Boltzmann a adopté une marche analogue dans les deux autres, mais en partant d'hypothèses différentes. Nous n'entreprendrons pas l'analyse détaillée de ces Chapitres, espérant avoir donné au lecteur une idée suffisante des avantages de la méthode du grand théoricien allemand pour engager ceux d'entre eux qu'intéresse plus spécialement cette matière à lire l'ensemble de l'Ouvrage. Ils y trouveront d'ailleurs bien des sujets que Boltzmann n'a pu qu'indiquer, offrant ainsi un champ considérable d'investigations aux chercheurs qui voudront profiter de sa méthode pour se mettre sur la voie de découvertes nouvelles.

Le lecteur trouvera dans la Préface écrite par M. Marcel Brillouin un aperçu historique sur l'hypothèse moléculaire dans la théorie des gaz, où celui-ci a su montrer, beaucoup mieux que nous ne saurions le faire ici, le développement rapide de cette

théorie, développement bien justifié par les nombreux résultats auxquels elle a déjà conduit et que rappelle M. Brillouin. Différents points particuliers de la théorie relatifs à la distribution des vitesses et aux diverses diffusions sont également précisés dans les Notes qu'il a bien voulu ajouter à la fin de l'Ouvrage.

MÉLANGES.

LE PREMIER CHAPITRE D'UN RAPPORT SUR QUELQUES PROGRÈS RÉCENTS DANS LES SCIENCES [1];

PAR M. ÉMILE PICARD.

I.

LES PRINCIPES DE L'ANALYSE ET DE LA GÉOMÉTRIE.

On ne peut s'empêcher d'être frappé de l'abondance des publications parues depuis une vingtaine d'années et se rapportant à la philosophie des Mathématiques; elles sont bien en accord avec les tendances de l'époque où nous vivons, et où l'esprit humain applique dans des directions variées une critique de plus en plus pénétrante. Placé à ce point de vue, on trouve même dans le nombre entier des difficultés que n'a pas dédaignées un grand physicien comme Helmholtz. Plus grandes encore sont les difficultés pour les nombres incommensurables qui, dans l'antiquité, troublèrent sans doute les pythagoriciens; pour les analystes modernes, un nombre incommensurable représente dans l'ensemble

[1] Nous reproduisons ici le premier Chapitre d'un Rapport général sur les Sciences à propos de l'Exposition Universelle de 1900. Par sa nature même, ce Rapport ne pouvait s'étendre longuement sur les Sciences mathématiques; devant garder un caractère général et philosophique, il laissait nécessairement de côté un grand nombre de questions intéressantes pour les géomètres.

des nombres rationnels une coupure qui correspond à un partage de ces nombres rationnels en deux classes. L'étude arithmétique du concept du continu est loin d'être simple et a donné lieu à de nombreuses recherches, parmi lesquelles il faut citer celles de M. Dedekind et de M. G. Cantor. Toutes ces études paraîtront d'abord bien subtiles, car rien ne semble plus simple que la notion du continu, et nous avons tous, dira-t-on, l'intuition d'un ensemble continu, en considérant tous les points d'une droite compris entre zéro et un. Mais le caractère de ces spéculations philosophiques est précisément de se méfier de l'intuition, et c'est un peu ici la lutte entre l'intuition et la logique. Il faut d'ailleurs reconnaître que, dans l'histoire de la Science, on rencontre plus d'une confusion tenant à l'insuffisante élaboration des notions fondamentales. Si abstraits que soient ces travaux, je devais cependant les mentionner pour donner une idée des spéculations des géomètres philosophes qui ont cherché dans ces dernières années à éclaircir les principes de l'Analyse mathématique. L'étude des bases de la Géométrie n'a pas moins attiré l'attention; tout n'est pas si clair que le croient beaucoup de personnes, dans les commencements de la Géométrie, et d'Alembert a pu écrire que la définition et les propriétés de la ligne droite sont l'écueil et le scandale de la Géométrie. Nous sommes aujourd'hui bien convaincus qu'il y a dans toute Science un point au delà duquel on ne peut remonter : il faut poser certaines données, certains concepts, et formuler au sujet de ces concepts des axiomes ou postulats qui reviennent, au fond, à les définir. On posera, par exemple, au début de la Géométrie élémentaire, les concepts de point, de ligne droite, et l'on formulera cet axiome que deux points déterminent toujours une droite. C'est pour le géomètre un difficile problème que d'établir la Géométrie sur un système complet et non contradictoire d'axiomes indépendants; dans ces derniers temps, des travaux remarquables, tels que ceux de M. Hilbert et de M. Veronèse, ont été publiés dans cette voie. Suivant qu'on adopte tel ou tel système d'axiomes, on aura telle ou telle Géométrie. On peut maintenant se demander quelle est l'origine de ces postulats. Pour Kant, la source de nos connaissances géométriques est dans l'intuition, et les axiomes plus ou moins explicitement formulés au début de la Géométrie ont un caractère de nécessité absolue;

l'espace est pour Kant une forme *a priori* de notre sensibilité. Aucun géomètre ne peut aujourd'hui souscrire à cette opinion, depuis qu'on a montré que diverses Géométries, exemptes de toute contradiction logique, peuvent être obtenues en partant de divers systèmes de postulats, et l'on doit renoncer à cette intuition directe, antérieure à toute observation, que nous aurions de l'espace.

L'observation et l'expérience jouent donc un rôle indispensable dans la formation de nos connaissances géométriques; mais, tout en admettant ce point indiscutable, les avis sont encore très partagés. Quelques physiciens voient uniquement dans les axiomes des inductions basées sur les observations et les mesures faites sur les corps : c'est l'empirisme géométrique. D'autres attribuent un rôle plus ou moins grand à l'esprit travaillant sur les données de l'expérience. Pour certains même, comme M. Poincaré, le concept de *groupe,* sur lequel nous reviendrons dans un moment, préexiste dans notre esprit et s'impose comme forme de notre entendement; en outre, plusieurs interprétations de l'expérience sont possibles, et parmi celles-ci l'esprit a choisi la plus commode et la plus simple. Il ne faut évidemment pas trop presser le sens de ces termes, qui ont surtout ici une signification algébrique; en fait, la commodité et la simplicité peuvent résulter de l'hérédité et de l'habitude.

Mais ne nous attardons pas à ces questions de psychologie, où l'on risque vite de ne se comprendre qu'à demi-mot, et restons sur le terrain mathématique et logique. J'ai fait tout à l'heure allusion à divers systèmes possibles de postulats. Si l'on ouvre un Traité de Géométrie élémentaire, on ne trouve formulé bien explicitement qu'un seul axiome; il porte le nom de *postulatum d'Euclide.* En réalité, un nombre considérable d'axiomes sont sous-entendus, et, en étudiant les plus récents travaux sur les principes de la Géométrie, on est effrayé à la vue de la longue liste des postulats nécessaires à poser pour que la Géométrie ait toute la rigueur logique qu'on lui attribue généralement. Les plus importants se rapportent aux concepts de droites, de plans, d'angles, de congruences ; il en est un autre, d'une nature différente, qu'il pourrait paraître inutile de formuler : c'est le postulat de continuité ou axiome d'Archimède. Au point de vue logique, ce serait une

erreur; ainsi l'on a pu construire des Géométries étranges dans lesquelles, en portant à partir d'un point d'une droite une succession de segments égaux, il n'est pas possible d'atteindre un point déterminé de la droite, quelque grand que soit le nombre de ces segments.

En posant tous les axiomes de la Géométrie plane habituelle, sauf celui d'Euclide, et en supposant que par un point on puisse mener une infinité de droites ne rencontrant pas une droite, on sait que Lobatschefski et Bolyai ont édifié une Géométrie, trouvée de son côté par Gauss. Dans cette Géométrie non euclidienne, la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux angles droits; on la désigne souvent sous le nom de Géométrie hyperbolique. On peut admettre, au contraire, avec Riemann, que par un point on ne puisse pas mener de droite ne rencontrant pas une droite; on aura alors une seconde Géométrie non euclidienne dite *elliptique*, dans laquelle la somme des angles d'un triangle dépasse deux droites. On dit souvent que les Géométries planes peuvent être interprétées par la considération des pseudo-sphères ou des sphères de l'espace euclidien; toutefois, cette interprétation n'est valable que pour une portion limitée du plan non euclidien et non pour le plan tout entier. Une autre interprétation dans l'espace ordinaire de la Géométrie plane elliptique, valable pour le plan entier, a été donnée récemment par M. Klein; considérons dans l'espace ordinaire l'ensemble des droites et des plans passant par un point, puis les angles dièdres formés par deux tels plans, toute relation entre ces éléments sera la traduction d'une relation dans le plan non euclidien, en substituant aux mots *droite, plan, angle dièdre,* les mots *point, droite* et *angle*. On s'est naturellement demandé comment on pouvait être assuré que, dans les déductions des Géométries non euclidiennes, on ne rencontrerait jamais de contradictions. Les interprétations, auxquelles il a été fait plus haut allusion, sauf celles de M. Klein pour la Géométrie elliptique, ne donnent pas une réponse satisfaisante, mais celle-ci peut être fournie par la considération des formules auxquelles on arrive en Géométrie hyperbolique et qui ne sont autres que celles de la Trigonométrie sphérique ordinaire, en supposant le rayon de la sphère purement imaginaire. Toutefois, si l'on est ainsi assuré que le postulatum d'Euclide ne peut être

démontré en restant dans le plan, il reste un doute sur l'impossibilité de la démonstration en employant des constructions hors du plan. L'étude des Géométries ne doit donc pas se borner au plan; ce fut là l'œuvre de Riemann, d'Helmholtz et, il y a dix ans, de Sophus Lie. Tous trois se placent à un point de vue analytique et considèrent l'espace comme une multiplicité, c'est-à-dire qu'un point est défini par un système de trois nombres qu'on appelle les *coordonnées du point;* on ne pose plus alors ici la notion de plan et de droite, on part du point comme élément. L'idée fondamentale d'Helmholtz consiste à porter l'attention sur l'ensemble des mouvements possibles dans l'espace dont on fait l'étude. On suppose que tous ces mouvements forment un groupe dépendant de six arbitraires, qu'ils laissent invariable une fonction des coordonnées de deux points quelconques, enfin que le mouvement libre soit possible, comme disait Helmholtz. Lie démontre que, dans l'espace à trois dimensions, il n'y a avec ces conditions que trois Géométries possibles; l'une est notre Géométrie ordinaire, et les deux autres correspondent aux deux Géométries planes dont j'ai parlé plus haut, et de ce point de vue analytique on est assuré de l'impossibilité de toute contradiction. On peut aussi, d'une manière plus géométrique, retrouver ces résultats avec Cayley et M. Klein, qui subordonne la conception métrique de l'espace à la conception projective.

On voit par ces indications quel bel ensemble forment les études faites sur les principes de la Géométrie. Dans ces dernières années, la question de l'indépendance des postulats a surtout préoccupé les Géomètres allemands, et c'est en construisant des Géométries affranchies de tel axiome, tandis qu'elles en conservent tel autre, que l'indépendance de ces axiomes s'est trouvée établie. On remarquera aussi combien il est inexact de parler, comme on le fait quelquefois, des *trois* seules Géométries possibles. Le nombre des Géométries logiquement possibles est infini; tout dépend des systèmes de postulats que l'on adopte. Au point de vue mathématique, l'étude des principes de la Géométrie a offert, comme nous l'avons dit, à Sophus Lie un beau champ d'applications pour la grandiose théorie des groupes de transformations qu'il venait de créer. De même, quarante ans auparavant, la théorie des formes quadratiques de différentielles s'était développée grâce

aux recherches de Riemann sur les principes de la Géométrie. C'est ainsi que des études, qui paraissent avoir d'abord un caractère purement philosophique, ont contribué au progrès des Sciences mathématiques.

II.

LES MATHÉMATIQUES PURES.

L'Analyse mathématique repose sur l'idée de fonction, c'est-à-dire de dépendance entre deux ou plusieurs grandeurs. Il a fallu longtemps avant qu'on se rendît compte de la complexité extraordinaire de cette notion, et c'est là d'ailleurs une circonstance qui a été heureuse pour les progrès de la Science. On a fait plus ou moins consciemment certaines hypothèses restrictives, et il n'est pas douteux que la considération des phénomènes naturels a plus d'une fois guidé le mathématicien dans le choix de ces hypothèses. Une première limitation essentielle a été celle de la continuité. Suivant le vieil adage : *Natura non facit saltus,* nous avons le sentiment, on pourrait dire la croyance, que dans la nature tout se passe avec continuité. Il ne s'agit ici, bien entendu, que de la notion du continu physique tirée des données brutes des sens ; nous avons dit plus haut qu'au point de vue du nombre l'idée de continuité est loin d'être aussi claire qu'elle le paraît. Le sentiment confus de la rapidité plus ou moins grande avec laquelle s'accomplit tel ou tel phénomène est sans doute l'origine première de l'idée de dérivée d'une fonction, qui est à la base du calcul différentiel. On a particularisé davantage encore l'idée de fonction en considérant les fonctions analytiques, c'est-à-dire développables en séries de Taylor dans le voisinage d'une valeur arbitraire de la variable. Les fonctions élémentaires jouissent de cette propriété, et les facilités que donne la possibilité de ce développement ont donné aux fonctions analytiques une importance considérable. Depuis Lagrange, et surtout après les travaux de Cauchy, de Weierstrass et de Riemann, la théorie des fonctions analytiques est devenue une branche maîtresse de l'Analyse mathématique. Elle doit son brillant essor à la découverte de quelques proposi-

tions générales, parmi lesquelles se trouvent au premier rang les théorèmes de Cauchy sur l'intégration le long d'un contour. Depuis vingt ans, une partie importante de l'effort mathématique a été consacrée soit aux fonctions analytiques en général, soit à certaines fonctions spéciales. Ne pouvant entrer ici dans le détail de ces recherches abstraites, qu'il me suffise de citer les noms de MM. Poincaré, Mittag-Leffler, Picard, Appell, Goursat, Painlevé, Hadamard et Borel entre bien d'autres. Les singularités des fonctions analytiques et leurs diverses représentations par des séries, des intégrales définies, des fractions continues, ont été étudiées d'une manière approfondie. Parmi les travaux les plus récents relatifs aux développements en série, mentionnons les développements dus à M. Mittag-Leffler, et la notion de série divergente sommable introduite par M. Borel, qui l'a brillamment utilisée pour l'étude des propriétés des fonctions. Parmi les fonctions particulières, après le merveilleux développement de la théorie des fonctions algébriques d'une variable et des transcendantes qui s'y rattachent, après les célèbres travaux de M. Poincaré sur les fonctions fuchsiennes, les fonctions algébriques de deux variables devaient solliciter l'effort des chercheurs. Les études de M. Picard sur ces questions concernent le point de vue transcendant ; celles de M. Nœther, de MM. Castelnuovo, Enriques et Humbert se rapportent surtout au point de vue géométrique et algébrique. Le champ si vaste des fonctions analytiques de plusieurs variables est maintenant attaqué de différents côtés, et les résultats déjà obtenus promettent une ample moisson de découvertes.

Si le concept de fonction analytique comprend aujourd'hui dans son domaine les fonctions les plus importantes de l'analyse, on ne doit cependant pas négliger d'approfondir l'idée de fonction dans toute sa généralité. Depuis les travaux de Riemann, qui classa les fonctions en intégrables et non intégrables, et de Weierstrass, qui donna le premier exemple d'une fonction continue sans dérivée, ces études ont été poursuivies par M. Darboux et M. Dini et actuellement par quelques géomètres italiens. Je ne veux signaler qu'une remarque curieuse montrant comment nous devons parfois nous méfier de nos conceptions les plus simples. Quoi de plus simple, semble-t-il, qu'un arc de courbe plane pour laquelle les coordonnées d'un point quel-

conque sont deux fonctions continues d'un paramètre variant entre deux limites? Nous suivons en quelque sorte des yeux le point décrivant cet arc. Cependant M. Peano a montré qu'on peut choisir ces deux fonctions de telle sorte que le point puisse prendre une position quelconque dans un certain rectangle; nous avons alors le résultat étrange d'une courbe qui est une aire. C'est ici le triomphe de ceux qui, comme je le disais tout à l'heure, se méfient de l'intuition. A quoi pourront servir, dira-t-on, des fonctions aussi bizarres? Il est facile de répondre que les fonctions n'ont pas besoin de servir à quelque chose et que l'étude de l'idée de fonction mérite d'être faite pour elle-même. Mais de plus, avec la complexité croissante des phénomènes naturels dont nous devons aborder l'étude, les images que nous pourrons nous en faire ne nous conduiront-elles pas à employer d'autres fonctions pour leurs représentations que les fonctions analytiques? Il serait téméraire de formuler une réponse négative.

Mais revenons au présent. Toute l'histoire de la Science montre les rapports qui unissent l'Analyse pure et les phénomènes naturels. Cette solidarité se traduit mathématiquement quand on a ramené l'étude d'un phénomène à des équations différentielles; ainsi, pour Fourier, l'étude de la propagation de la chaleur se ramène à une équation aux dérivées partielles que l'on devra intégrer à l'aide de conditions aux limites propres à chaque cas. De même, tous les résultats de la théorie mathématique de l'élasticité se concentrent dans un système classique d'équations différentielles. Nous reviendrons sur cette réduction au point de vue de la Mécanique et de la Physique, quand nous parlerons de l'explication des phénomènes naturels. Nous voulions seulement ici faire comprendre l'intérêt considérable s'attachant à l'étude des équations différentielles, qui se présentent d'ailleurs dans presque toutes les parties des Mathématiques pures. Dans ces dernières années, la théorie des équations différentielles a fait l'objet de nombreuses recherches. Des voies nouvelles ont été ouvertes et dans des directions variées. Il faudra sans doute encore une longue suite d'efforts pour venir à bout des questions posées, mais nous nous rendons compte de la nature des difficultés qu'il faudra vaincre. La plupart des géomètres qui se sont

occupés de la théorie générale des fonctions analytiques ont apporté aussi leurs contributions à l'étude des équations différentielles ordinaires, commencée jadis à ce point de vue par Cauchy et continuée par Briot et Bouquet et par M. Fuchs. Les recherches les plus récentes dans cet ordre sont celles de M. Painlevé, que la considération de certaines équations du second ordre a conduit à des transcendantes nouvelles. La Physique mathématique indiquait, nous l'avons dit, des types de problèmes du plus haut intérêt; cette voie féconde a été suivie par de nombreux chercheurs, comme MM. Schwarz, Neumann et Poincaré pour l'équation de Laplace; MM. Picard et Volterra pour des équations plus générales. A un autre point de vue encore, l'étude des courbes définies par des équations différentielles a été renouvelée et des méthodes nouvelles ont été créées par M. Poincaré; la liaison étroite de ce problème avec la Géométrie de situation a été mise en évidence et très heureusement utilisée par M. Hadamard dans ses remarquables recherches sur les lignes géodésiques.

Le beau traité de M. Goursat sur les équations aux dérivées partielles du second ordre vient de rappeler l'attention sur des questions importantes quelque temps négligées, comme l'intégration effective à l'aide d'expressions d'un type déterminé. Pareillement, les recherches de Géométrie infinitésimale ont pris un grand essor sous l'influence du grand Ouvrage de M. Darboux sur la théorie des surfaces; ses travaux, ceux de MM. Bianchi, Weingarten, Guichard ont donné une vie nouvelle à cette partie, si importante depuis Gauss, des Sciences mathématiques, et, entre autres, la question de la déformation des surfaces s'est enrichie de résultats remarquables.

Nous avons parlé tout à l'heure de l'œuvre de Sophus Lie sur la théorie des groupes de transformations, qui restera certainement un des plus beaux monuments de l'Analyse mathématique au XIXe siècle. L'illustre géomètre en avait montré l'importance dans l'étude des équations différentielles, et ses élèves ont continué ce genre de recherches. A un tout autre point de vue, M. Picard, MM. Vessiot et Drach ont tiré partie de la théorie des groupes de transformations pour étendre à l'Analyse les notions si fécondes introduites en Algèbre par Galois, de telle sorte que

de remarquables analogies entre la théorie des équations différentielles et la théorie des équations algébriques ont été mises en évidence.

Il nous faut encore dire un mot de la partie la plus abstraite des Sciences mathématiques, celle où règne le nombre pur. Les célèbres recherches de Kummer, de M. Dedekind et de Kronecker sur les nombres algébriques ont été l'origine de travaux extrêmement intéressants publiés surtout en Allemagne. Toute une Arithmétique nouvelle a été fondée, où les lois de la divisibilité se présentent d'abord tout autres que dans l'Arithmétique usuelle; on y voit des entiers décomposables de plusieurs manières en facteurs premiers, et ce n'est qu'en introduisant la notion des idéaux que M. Dedekind a pu retrouver les lois simples auxquelles nous sommes habitués. Citons au moins le nom de M. Minkowski, qui utilise en Arithmétique les conceptions géométriques et vient de rassembler ses profondes recherches dans un Livre sur la *Géométrie des nombres,* et les noms de MM. Hilbert, Hurwitz et Frobenius, auxquels la théorie des nombres et l'Algèbre pure doivent d'importants progrès. Rappelons enfin que M. Lindemann, s'inspirant des profondes recherches d'Hermite sur la transcendance du nombre e, a pu établir l'impossibilité de la quadrature du cercle, proposition dont, depuis plus de deux mille ans, on cherchait en vain une démonstration rigoureuse.

III.

LA MÉCANIQUE CÉLESTE ET L'ASTRONOMIE PHYSIQUE.

Nous obéissons aux habitudes en parlant ici de l'Astronomie, science dont une partie a un caractère exclusivement mathématique et dont l'autre rentre en réalité dans la Physique. L'Astronomie de position ne nous éloigne pas de la théorie des équations différentielles dont nous parlions tout à l'heure. Une fois posées les lois de la gravitation universelle, et le Soleil et les planètes étant supposés réduits à des points matériels, la recherche des positions des planètes revient à l'intégration d'un système d'équations différentielles qui s'écrit aisément. Malgré leur apparente simplicité, ces équations présentent d'énormes difficultés et font

depuis longtemps l'objet de l'étude approfondie des géomètres et des astronomes. Si des circonstances particulières, comme la grandeur de la masse du Soleil par rapport à celle des planètes, ne s'étaient présentées, les procédés d'intégration par approximations successives employés par les astronomes n'auraient conduit à aucun résultat ; on peut donc se réjouir des circonstances heureuses à qui nous devons le magnifique épanouissement de la Mécanique céleste depuis plus d'un siècle. Une œuvre magistrale, dont l'auteur a été prématurément enlevé à la Science, il y a quelques années, le *Traité de Mécanique céleste* de Tisserand, donne un tableau complet de l'état actuel de l'Astronomie mathématique. Nous ne pouvons mieux faire que de reproduire les dernières lignes de cet Ouvrage qui résument les progrès de l'Astronomie de position au siècle dernier : « La loi de Newton, dit Tisserand, représente en somme avec une très grande précision les mouvements de translation des corps célestes. On peut être émerveillé de voir que les inégalités si nombreuses, si compliquées, et quelques-unes considérables, du mouvement de la Lune soient représentées comme elles le sont, par la théorie. Sans doute il reste quelque chose : dans un intervalle de deux siècles et demi environ, la Lune s'écarte peu à peu de la position calculée jusqu'à un maximum de quinze secondes d'arc, de manière que, durant ce long intervalle, le bord éclairé de la Lune passera un peu plus tôt ou un peu plus tard devant les fils d'araignée de la lunette méridienne, sans que l'avance ou le retard dépasse une seconde de temps. De même les positions des planètes, pendant un siècle et demi d'observations précises, sont représentées à moins de deux secondes d'arc près. Il y a une exception : Mercure peut être en avance ou en retard d'une quantité qui, pour certaines régions de l'orbite, s'élève à huit secondes d'arc, soit une demi-seconde de temps au bout d'un siècle. Les désaccords pour le nœud de Vénus et le périhélie de Mars sont bien moins importants. On éprouve, en fin de compte, une admiration profonde pour le génie de Newton et de ses successeurs et pour les immenses travaux de Le Verrier, poursuivant pendant plus de trente ans son enquête méthodique dans toute l'étendue du système solaire, travaux si habilement continués et développés par M. Newcomb. »

Il nous faut ajouter maintenant que, au point de vue théorique, le mathématicien a lieu d'être moins satisfait que l'astronome, et l'on peut dire que les équations de la Mécanique céleste font son désespoir. Depuis dix ans, M. Poincaré poursuit sur ce sujet des recherches extrêmement profondes, qu'il vient de rassembler dans un Ouvrage ayant pour titre : *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*. Les conclusions les plus importantes ont un caractère négatif. M. Poincaré montre que les séries employées en Mécanique céleste ne peuvent être toujours convergentes et qu'on n'en peut rien tirer en toute rigueur pour la position des astres à très longue échéance; ceci, bien entendu, n'empêche pas que, pour un temps assez limité, on ne puisse avoir confiance dans les prédictions des calculs habituels, grâce aux heureuses circonstances auxquelles j'ai fait allusion. En outre, M. Poincaré établit qu'il n'existe pas d'autres intégrales premières uniformes que celles actuellement connues. Parmi les résultats positifs dus à l'éminent géomètre, citons les solutions périodiques et les solutions asymptotiques dont il a démontré l'existence et qui permettront probablement de modifier le point de départ des méthodes d'approximation suivies aujourd'hui. Il est à craindre néanmoins que les efforts des analystes viennent échouer longtemps encore contre les immenses difficultés d'un problème posé cependant si nettement : les lois de la Nature ne sont pas toujours simples pour les calculs des mathématiciens. En présence de ces difficultés, il n'y a certes pas lieu d'être étonné des quelques désaccords que présentent avec l'observation les théories de la Lune et de Mercure; on peut penser que c'est à notre impuissance analytique, et non pas à la loi même de la gravitation universelle, qu'il faut attribuer ces légères discordances.

L'Astronomie d'observation a fait à la Physique des emprunts de plus en plus étendus. La Photographie appliquée à l'Astronomie est devenue un puissant auxiliaire de l'Astronomie de position, en permettant d'entreprendre la Carte céleste internationale. La Spectroscopie avait, dès sa naissance, trouvé dans le ciel une de ses plus remarquables applications; elle a, depuis, révélé la constitution de presque tous les astres, depuis les comètes jusqu'aux nébuleuses et même, au moyen de la méthode Döppler-Fizeau dont nous parlerons en Physique, décelé la vitesse de leurs

mouvements propres. Si la Photographie et la Spectroscopie ont pu ainsi changer en quelque sorte la face de l'Astronomie d'observation, cela est dû pour une bonne part aux perfectionnements apportés à la construction des instruments, et en particulier à la puissance des objectifs que l'on emploie aujourd'hui. Il existe maintenant plusieurs lunettes ayant un mètre d'ouverture, et tout le monde a vu à l'Exposition la grande lunette de 60^m dont l'objectif a $1^m,20$ de diamètre. Un examen rapide des divers corps du système solaire, puis des systèmes beaucoup plus éloignés formés par les étoiles et les nébuleuses, nous montrera les résultats essentiels obtenus en Astronomie dans ces dernières années.

Il est indispensable de connaître la forme, les dimensions et les mouvements de la Terre que nous habitons. L'Europe presque tout entière a été couverte de triangles géodésiques. Les Anglais ont triangulé l'Inde, et au Cap ils ont étendu l'arc de La Caille qu'ils songent à prolonger jusqu'à la Méditerranée. La France reprend en ce moment l'arc du Pérou, tandis que des missions russe et suédoise mesurent un arc au Spitzberg. Les mesures relatives à la gravité sont toujours le complément indispensable des opérations géodésiques. Tandis que jusqu'ici on s'est servi presque exclusivement dans ce but du pendule, M. Eotvos vient de modifier la balance de torsion, en remarquant que la pesanteur aux divers points de cette balance n'est pas la même que celle au centre de gravité autour duquel se font les oscillations, ce qui produit un couple. Son ingénieux appareil a reçu un grand prix à l'Exposition.

Le mouvement de translation de la Terre donne, comme on sait, naissance à ce qu'on appelle l'aberration, d'après laquelle nous ne voyons pas exactement les étoiles à leurs places réelles ; la constante si importante de l'aberration ne paraît pas encore être connue avec la précision désirable. Dans le déplacement annuel de la Terre autour du Soleil, son axe de rotation ne reste qu'à peu près parallèle à lui-même ; ses mouvements correspondent à la précession et à la nutation, phénomènes qui produisent les variations de longitude et de latitude en chaque point de notre globe. Dans ces dernières années, aucun problème astronomique n'a suscité plus de recherches que celui de la variation des latitudes. Le mouvement en spirale du pôle sur la surface terrestre est main-

tenant établi, et il est hors de doute que dans les variations de latitude résultant des mouvements du pôle il existe deux termes périodiques dont l'un, découvert par M. Chandler, est de 14 mois, l'autre étant d'une année. Il resterait à démêler les causes météorologiques, géologiques ou autres, produisant ce mouvement si complexe.

Les études d'Astronomie physique sur le Soleil et la Lune se poursuivent régulièrement. C'est surtout au spectroscope que nous devons nos connaissances sur la constitution physique du Soleil. Ce merveilleux instrument montre que la plupart des corps connus à la surface de la Terre existent dans le Soleil à l'état de vapeur, et même, chose singulière, il a révélé dans le Soleil l'existence de l'hélium près de 30 ans avant que ce gaz fût découvert parmi les éléments terrestres. Au-dessus de la photosphère se trouve une enveloppe rose et mince qui l'entoure, la chromosphère. Çà et là celle-ci s'élève à de grandes hauteurs, formant ainsi des flammes qu'on appelle les protubérances. En 1868, MM. Janssen et Lockyer avaient montré qu'on pouvait les observer en dehors des éclipses; leur spectre, contenant un grand nombre de raies brillantes, a été étudié avec soin, et MM. Hale et Deslandres ont même pu obtenir des photographies des protubérances. En interprétant, avec le principe Döppler-Fizeau, les déplacements des raies du spectre des protubérances, on a trouvé que ces flammes sont le siège de mouvements extrêmement rapides. Au-dessus de la chromosphère se trouve la couronne, qui forme la dernière et aussi la plus mystérieuse des enveloppes solaires. On l'aperçoit seulement pendant les éclipses totales de Soleil sous forme d'auréole à lumière argentée entourant le Soleil et la Lune. La couronne n'étant observable que quelques heures par siècle, nos connaissances sur sa nature progressent lentement. Parmi les raies brillantes de son spectre, on remarque surtout une raie verte produite par une matière encore inconnue sur la Terre, le coronium. D'après les observations des dernières éclipses, M. Deslandres pense que la couronne tout entière tourne dans le même sens que le Soleil.

La portion de la surface de notre satellite tournée vers la Terre commence maintenant à être connue avec une grande précision, grâce aux photographies lunaires faites par MM. Lœvy et

Puiseux avec le grand équatorial coudé de l'Observatoire de Paris. Un grand nombre de Cartes de leur magnifique Atlas ont déjà paru, représentant la Lune à l'échelle de 1^{mm} pour 1800^{m}. Plusieurs astronomes pensent actuellement que la Lune doit avoir une légère atmosphère qui aurait eu autrefois une densité beaucoup plus forte qu'aujourd'hui.

Nous avons vu les difficultés subsistant au point de vue de la théorie de la planète Mercure. Au point de vue physique, sa surface ne présentant jamais que de rares détails difficiles à saisir, on a encore quelques doutes sur la durée de sa rotation autour de son axe. Longtemps la durée admise a été d'environ 24 heures, mais, d'après les observations récentes de M. Schiaparelli, confirmées par M. Perrotin, elle tournerait sur elle-même dans le même temps qu'elle tourne autour du Soleil, soit 88 jours. Quoique la planète Vénus soit l'astre le plus brillant du ciel, après le Soleil et la Lune, on sait peu de chose de sa constitution physique, sans doute à cause de son atmosphère épaisse; la durée de la rotation est regardée par MM. Schiaparelli et Perrotin comme égale à 225 jours. Toutefois, des observations spectroscopiques très récentes, annoncées par M. Bélopolsky, tendraient à la ramener à peu près à 24 heures.

La question des canaux de Mars n'a guère avancé dans ces dernières années. Pour les petites planètes comprises entre Mars et Jupiter, leur nombre s'accroît sans cesse et on les découvre maintenant par la photographie. Le plus intéressant de ces astéroïdes est Éros, qui a été découvert par M. Witt, à Berlin, en 1898; il présente cette particularité unique de se trouver parfois entre Mars et la Terre, et de passer à une faible distance de celle-ci. On aura ainsi un moyen de trouver la distance d'Éros à la Terre, et, par suite, de fixer avec une précision jusqu'ici irréalisable les dimensions du système solaire; une entente s'est établie à ce sujet entre divers Observatoires à la dernière Conférence astronomique internationale. Un autre événement astronomique important a été la découverte faite en 1892, par M. Barnard, à l'Observatoire Lick, d'un cinquième satellite de Jupiter dont la révolution autour de la planète est d'environ 12 heures.

Les questions se rattachant aux comètes sont très nombreuses; c'est un des problèmes les plus intéressants à l'ordre du jour,

tant au point de vue de l'Astronomie de position qu'au point de vue de l'Astronomie physique et de la Cosmogonie. On a pensé longtemps que les comètes venaient des espaces interstellaires et pénétraient le plus souvent en étrangères dans le système solaire pour en sortir ensuite, mais on admet maintenant qu'elles appartiennent au système solaire. La désagrégation des comètes paraît tenir surtout à l'action du Soleil et des planètes, l'action prépondérante étant celle du Soleil, qui agit lentement par son attraction et plus énergiquement par sa chaleur. Des comètes aux étoiles filantes, la transition est immédiate. La parenté entre les deux espèces de corps est indéniable, mais, malgré les beaux Travaux de M. Schiaparelli, bien des questions restent ouvertes, et la désagrégation des comètes ne suffit probablement pas à expliquer comment la Terre rencontre tant d'essaims d'étoiles filantes.

Si, du système solaire, nous passons au monde sidéral, nous voyons se dresser les problèmes les plus grandioses. Il est inutile d'insister à nouveau sur l'importance de la photographie pour la formation d'une Carte céleste et d'un Catalogue d'étoiles. Ce travail immense est en excellente voie; le Catalogue, qui doit renfermer les coordonnées exactes de deux à trois millions d'étoiles jusqu'à la onzième grandeur, sera même terminé d'ici peu. Un des problèmes les plus captivants de l'Astronomie stellaire est la recherche des étoiles doubles ou multiples ; longtemps négligée en France, cette branche de l'Astronomie est maintenant cultivée avec succès, notamment par MM. Callandreau, Bigourdan et Perrotin. L'étude du mouvement des étoiles doubles ou multiples a révélé en quelque sorte l'unité primordiale qui règne dans l'Univers, car elle a montré que, dans ces systèmes éloignés, la matière obéit aux mêmes lois de l'attraction que dans le système solaire. De plus, on a pu, en observant le dédoublement périodique de certaines raies spectrales, conclure que quelques étoiles, simples sous les plus forts grossissements, étaient doubles et animées d'un mouvement relatif orbital. Enfin, une autre classe d'étoiles doubles est formée par celles qui ont un compagnon obscur, dont la présence n'est révélée que par l'irrégularité du mouvement propre de l'étoile principale : tel est le cas de Sirius. Mentionnons encore les étoiles dont l'éclat est variable, les

étoiles nouvelles comme celle qui apparut de décembre 1891 à avril 1892 dans la constellation du Cocher, et enfin les nébuleuses, dont on fixe aujourd'hui avec la plus haute précision possible la position actuelle dans le ciel. Le nombre des nébuleuses connues a considérablement augmenté, principalement par suite des belles observations faites dans ces dernières années, à Paris, par M. Bigourdan; leur intérêt tient surtout au rôle capital que ces astres jouent dans les théories cosmogoniques, chaque nébuleuse paraissant constituer un monde stellaire en formation.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

ADAMS (J.-C.). — *Scientific Papers*. T. II. In-4°. London, Clay. 25 sh.

ANDOYER (H.). — *Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure*. T. I. In-8°, VIII-508 p. Paris, Gauthier-Villars.

FREYCINET (C. DE). — *Essai sur la philosophie des Sciences (Analyse : Mécanique)*. 2e édit. In-8°. XIII-336 p. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr.

JAHRBUCH *über die Fortschritte der Mathematik*, begründet von C. Ohrtmann, herausgeg. von E. Lampe. 29. Bd. Jahrg. 1898. (In 3 Heften.) 1 Heft. gr. in-8°, 416 p. Berlin, G. Reimer. 13 m.

KILLING (W.). — *Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten*. 1 Thl. Die ebene Geometrie. gr. in-8°, XIII-250 p. avec 50 fig. Paderborn, Schoningh. 4 m.

LORENTZ (H.-A.). — *Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung u. der Anfangsgründe der analyt. Geometrie*. Unter Mitwirkg. d. Verf. übersetzt von G.-C. Schmidt. Gr. in-8°, VII-476 p. avec 118 fig. Leipzig, Barth. 10 m.; relié 11 m.

TROTHA (TH.-V.). — *Die kubische Gleichung u. ihre Auflösung für reelle, imaginäre u. komplexe Wurzeln. Ein Versuch*. Gr. in-8°, III-LXI p. Berlin, Ernst und Sohn. 2 m. 50 pf.

UEBER *angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen. Nebst Erläuterung der be-*

zügl. Göttinger Universitätseinrichtungen. Vorträge, gesammelt von F. Klein u. E. Riecke. gr. in-8°, VIII-242 p. avec 84 fig. Leipzig, Teubner. Relié, 6 m.

WEBER (H.). — *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik.* Nach Riemann's Vorlesungen. In-4 Aufl. neu. bearb. 1 Bd. gr. in-8°, XVIII-506 p. avec portraits. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 10 m.

JANET (P.). — *Leçons d'électrotechnique générale.* In-8°, IX-614 p. avec 137 fig. Paris, Gauthier-Villars. 20 fr.

MASCART (E.). — *Traité de magnétisme terrestre.* In-8°, VI-443 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

BESSEL. — *Zwölf Briefe an Olbers.* (Aus den *Sitzungsberichten der preuss. Akad. d. Wissensch.*) Gr. in-8°, 18 p. Berlin, G. Reimer. 1 m.

ROUCHÉ (E.) et LÉVY (L.). — *Analyse infinitésimale, à l'usage des Ingénieurs.* T. I : *Calcul différentiel.* In-8°, VIII-559 p. Paris, Gauthier-Villars.

BOUTROUX (P.). — *L'Imagination et les Mathématiques, selon Descartes.* In-8°, 51 p. Paris, Alcan. 2 fr.

ENCYKLOPÄDIE *der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen. Herausgeg. im Auftrage der Akademieen d. Wissenschaften zu München u. Wien,* etc. II Bd. Analysis. Redig. von H. Burkhardt. 4. Heft. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 4 m. 80 pf.

HAGEN (J.-G.). — *Synopsis der höheren Mathematik.* III Bd. *Differential- u. Integralrechnung.* 2 Lfg. Gr. in-4°. Berlin, Dames. 5 m.

OSTWALD'S *Klassiker der exakten Wissenschaften.* N°s 111-113. In-8°. Leipzig, Engelmann. Relié, 3 m. 15 pf.

Contenu : N° 111. A. Abel, Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch aufgelöster Gleichungen. (1829). Herausgeg. von A. Loewy. 50 p. 90 pf. — N° 112. A.-L. Cauchy, Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen. (1825). Herausgeg. von P. Stäckel. 80 p. 1 m. 25 pf. — N° 113. Lagrange und Cauchy, Zwei Abhandlungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordg. Traduit du français par G. Kowalewski. 54 p. 1 m.

ADAMCZIK (J.). — *Compendium der Geodäsie.* Gr. in-8°, VIII-515 p. avec fig. Wien, Deuticke. 10 m.

CANTOR (M.). — *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* T. III. 1re Partie (1668-1699). 2e édition. Gr. in-8°. 261 p. avec 45 fig. Leipzig, Teubner. 6 m. 60 pf.

HANDWÖRTERBUCH *der Astronomie,* herausgegeben von W. Valentiner. 22e livraison. Gr. in-8°. Breslau, Trewendt. 3 m. 60 pf.

JAHRBUCH *über die Fortschritte der Mathematik,* begründet von C. Ohrtmann, herausgeg. von E. Lampe. T. XXIX, année 1898, 2e fascicule. Gr. in-8°. Berlin, G. Reimer. 5 m.

MÜLLER (F.). — *Mathematisches Vocabularium, französisch-deutsch u. deutsch-franz., enth. die Kunstausdrücke aus der reinen u. angewandten Mathematik.* Première Partie (français-allemand). In-8°, IX-132 p. Leipzig, Teubner. Paris, Gauthier-Villars. 8 m.

PASCAL (E.). — *Repertorium der höheren Mathematik.* Deutsche Ausgabe von A. Schepp. *Analysis u. Geometrie.* 1re Partie. *Die Analysis.* Gr. in-8°, XII-688 p. Leipzig, Teubner. Relié. 10 m.

ROUCHÉ (E.) et COMBEROUSSE (C. DE). — *Traité de Géométrie.* 7e édition. 2e Partie : *Géométrie dans l'espace.* In-8°, XVIII-664 p. Paris, Gauthier-Villars. 9 fr. 50 c.

SCHLÖMILCH (O.). — *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis.* 2 Thl. Aufgaben aus der Integralrechnung. 4e édition par R. Henke. Gr. in-8°, VIII-448 p. avec fig. sur bois. Leipzig, Teubner. 9 m.

SERRET (J.-A.). — *Traité de Trigonométrie.* 8e édit. In-8°, X-336 p. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr.

VERÖFFENTLICHUNGEN *des Centralbureaus der internationalen Erdmessung.* Neue Folge. Nos 1 et 2. Gr. in-4°. Berlin, G. Reimer.

Contenu : Bericht über die Thätigkeit des Centralbureaus der internat. Erdmessung im J. 1899, nebst dem Arbeitsplan für 1900. 28 p., 2 planches. 3 m. F. Cohn, Ableitung der Declinationen u. Eigenbewegungen der Sterne für den internat. Breitendienst. 65 p. 3 m.

CALDARERA (FR.). — *Corso di mecanica razionale.* T. I. In-8°. Palermo, Reber. 12 l. 50 c.

HERTZ (H.). — *Electric waves; Researches on propagation of electric action with finite velocity through space.* Traduit par D. E. Jones. In-8°. 298 p. London, Macmillan. 10 sh.

BOEHM (K.). — *Zur Integration partieller Differentialgleichungen.* Gr. in-8°, 55 p. Leipzig, Teubner. 1 m. 80 pf.

DAUZAT. — *Éléments de Méthodologie mathématique.* In-8°, VII-1102 p. Paris, Nony et Cie.

DZIOBEK (O.). — *Lehrbuch der analytischen Geometrie.* 1 Thl. *Analytische Geometrie der Ebene.* Gr. in-8°, VIII-350 p. avec 85 fig. Berlin, H. Th. Hofmann. 6 m.

FUHRMANN (A.). — *Anwendung der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau u. in der Technik. Lehrbuch u. Aufgabensammlung.* (In 6 Theilen.) 1 Thl. *Naturwissenschaftliche Anwendgn. der Differentialrechnung.* 2e édition, gr. in-8°, XVIII-239 p. avec 28 figures. Berlin, Ernst und Sohn. 6 m.

GAUSS (C.-F.) WERKE. Herausgeg. von der königl. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen. T. VIII. Gr. in-4°, 458 p. avec fig. Leipzig, Teubner. Cart. 24 m.

GUCCIA (G.-B.). — *Memorie die geometria.* In-8°. Palermo, Reber. 15 L.

JAHRESBERICHT *der deutschen Mathematiker-Vereinigung.* Herausgeg. von G. Hauck u. A. Gutzmer. T. VIII, 2e fasc., in-8°. Leipzig, Teubner. 8 m.

Contenu : A. Schoenflies, die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. IV-VI-251 p. avec 8 fig.

— T. IX, 2e fascicule, in-8°. 4 m.

Contenu : K. Heun, die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. VI-123 p.

MARTUS (H.-C.-E.). — *Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten.* 3 Thl. Gr. in-8°, VIII-172 p. Dresden, Koch. 4 m.; relié, 4 m. 50 pf.

MAUNDER (E.-W.). — *Royal Observatory, Greenwich; a Glance at its History and Work.* In-8°, 320 p. avec portr. et illustr. London, Rel. Tract Soc. 5 sh.

SACHS (J.). — *Lehrbuch der projectivischen (neueren) Geometrie (synthetische Geometrie, Geometrie der Lage).* 1. Thl. Gr. in-8°, VI-182 p. avec 97 fig. Stuttgart, Maier. 5 m.

SUTER (H.). — *Die Mathematiker u. Astronomen der Araber u. ihre Werke.* Gr. in-8°, IX-277 p. Leipzig, Teubner. (Abhandlgen z. Geschichte der mathemat. Wissenschaften. 10e fascicule.) 14 m.

YOUNG (J.-W.-A.) and LINEBURGER (C.-E.). — *Elements of the Differential and Integral Calculus.* In-8°. London, Hirschfeld. 10 sh. 6 d.

BUDISAVLJEVIÉ (E.-V.). — *Leitfaden für den Unterricht der höheren Mathematik an der k. u. k. Artillerie- u. der Pionier-Cadettenschule.* Gr. in-8°, XI-618 p. avec 215 fig. Vienne. Seidel und Sohn. 14 m. 40 pf.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PICARD (E.). — QUELQUES RÉFLEXIONS SUR LA MÉCANIQUE suivies d'une PREMIÈRE LEÇON DE DYNAMIQUE. 1 vol. in-8, 56 pages. 1902. Paris, Gauthier-Villars.

La première Partie de cet intéressant opuscule a paru dans le *Bulletin;* quant à la *Première Leçon de Dynamique* qui le termine, tous ceux qui s'intéressent à l'enseignement de la Mécanique voudront sûrement la lire et la méditer. Il nous suffira, en l'annonçant, d'indiquer rapidement la suite des idées de l'auteur.

M. Picard définit d'abord le champ de forces constantes et introduit, *pour ce cas*, le principe de l'indépendance de l'effet des forces et du mouvement antérieurement acquis. Ce principe lui permet d'établir la constance de l'accélération. Il insiste ensuite sur la différence entre la conception *dynamique* de la force constante, ainsi obtenue, et la conception *statique*. Que les nombres représentant les forces envisagées au point de vue statique et au point de vue dynamique soient proportionnels, c'est là un *résultat expérimental*. L'expérience apprend aussi que dans un même champ l'accélération du mouvement produit, quel que soit le point matériel, est la même. Ce principe expérimental conduit à attribuer aux différents points matériels des coefficients numériques (masses) qui apparaissent d'abord comme un système de nombres proportionnels. La relation

$$\frac{F}{F'} = \frac{m\gamma}{m'\gamma'}$$

montre que, si, pour un point déterminé, on prend $F' = m\gamma'$, on aura pour tout autre point $F = m\gamma$: cette relation est immédiatement précisée par la définition des deux principaux systèmes d'unités. L'égalité géométrique générale $F = m\gamma$, où l'on ne suppose plus que la force soit constante, est obtenue en regardant le mouvement réel du point comme la limite d'une succession de mouvements discontinus produits par des forces constantes.

Quelques exemples simples mettent en évidence la portée et l'usage de cette égalité. La Leçon se termine par quelques définitions relatives au *travail d'une force* et aux unités employées pour le mesurer.

MÉLANGES.

LE CATALOGUE INTERNATIONAL DE LITTÉRATURE SCIENTIFIQUE [1];

PAR M. GASTON DARBOUX.

Dans un article du *Journal des Savants,* où nous avons rappelé les démarches et les pourparlers qui ont précédé et provoqué la formation de l'*Association internationale des Académies,* nous avons fait allusion plus d'une fois au *Catalogue international de littérature scientifique,* dont la Société Royale de Londres a pris l'initiative et assumé la publication. Nous revenons aujourd'hui sur ce sujet pour faire connaître, d'une manière plus complète, le but, le plan et l'étendue de cette entreprise bibliographique. Le sujet, sans doute, est aride et un peu sévère, mais l'entreprise est sans précédent; et il a fallu, pour la faire réussir, un concours d'efforts et de bonnes volontés sur lequel il est peut-être intéressant d'insister.

Depuis longtemps, on le sait, la Société Royale de Londres était engagée dans la publication d'un Catalogue des Notes et Mémoires scientifiques (*Catalogue of scientific Papers*), bien connu à la fois des bibliothécaires et des savants. Ce répertoire contenait, à l'exclusion des Ouvrages séparés dont la recherche est relativement facile, les titres des Notes et Mémoires publiés dans les Revues et Journaux scientifiques du monde entier depuis le commencement du XIXe siècle, ces titres étant classés seulement dans

---

[1] Extrait du *Journal des Savants*.

l'ordre alphabétique des noms d'auteurs. C'était un savant américain, M. le professeur Henry, de Washington, qui, le premier, au Congrès de l'Association britannique tenu en 1855, avait appelé l'attention sur les services que pouvait rendre un tel Catalogue; et dès 1857, la Société Royale en commença la publication. Depuis cette date, 11 volumes in-4° ont été successivement publiés, comprenant les titres des Mémoires parus depuis 1800 jusqu'à 1883. Les lacunes que présentaient les premiers Volumes ont été comblées en partie dans les derniers; un Catalogue supplémentaire, qui contiendra tous les Mémoires dont les titres ont été omis dans les Volumes précédents, est complètement achevé et va paraître dans quelque temps. La Société Royale a l'intention de compléter le travail dont elle a pris la charge et de le conduire jusqu'à l'année 1900. Il y a plus : grâce à la libéralité d'un de ses membres, M. le docteur Ludwig Mond, elle l'accompagnera d'un index par ordre de matières, qui facilitera les recherches et accroîtra notablement l'utilité de cette belle publication. Ainsi se trouvera achevé le Catalogue bibliographique de l'œuvre si importante accomplie dans tous les ordres de recherches scientifiques durant le siècle qui vient de finir.

C'est à partir de 1901 que prendra donc naissance le nouveau Catalogue international de littérature scientifique dont nous désirons entretenir nos lecteurs. Il faut d'abord faire connaître les motifs vraiment impérieux pour lesquels la Société Royale a cru nécessaire d'interrompre son œuvre ou, plus exactement, de faire appel, pour la continuer, à la coopération des savants de tous les pays. Depuis le commencement du XIXe siècle, les recherches scientifiques se sont accrues dans une proportion dont on se fera une idée d'après les chiffres suivants. Si on laissait de côté les collections académiques, d'ailleurs peu nombreuses et paraissant à des intervalles éloignés, on pourrait sans doute faire tenir en une page la liste des périodiques qui, vers l'année 1800, s'occupaient des Sciences pures ou de leurs applications. Il y a aujourd'hui près de 10000 périodiques de ce genre : 900 environ en France, 1300 en Allemagne, 1000 en Amérique, etc. Pour composer le nouveau Catalogue, il faudra donc, nous ne dirons pas analyser, mais parcourir tout au moins ces 10000 périodiques, qui sont écrits dans toutes les langues possibles et traitent les sujets les plus variés.

On conçoit bien qu'une telle entreprise ne peut être centralisée, qu'elle dépasse les moyens et les ressources de toute Académie, quelque puissante et quelque active qu'on la suppose. De plus, les savants s'accordent à reconnaître, depuis longtemps, qu'un catalogue par noms d'auteurs ne rend que des services incomplets. Ce qui est vraiment utile, c'est la classification par ordre de matières; elle seule répond aux exigences des travailleurs, dont le désir très légitime est d'être renseignés, aussi complètement et aussi promptement que possible, sur toutes les découvertes publiées dans le domaine qui les intéresse plus particulièrement.

La publication du Catalogue par noms d'auteurs devait amener naturellement la Société à s'occuper de toutes ces questions; après avoir pris l'avis des personnes les plus compétentes et s'être assuré l'adhésion des divers corps savants, elle provoqua la convocation d'une Conférence internationale, qui se réunit à Londres, du 14 au 17 juillet 1896, et qui réunit les représentants officiels des pays suivants: Allemagne, Autriche, Belgique, Danemark, États-Unis, France, Grande-Bretagne, Grèce, Hongrie, Italie, Japon, Mexique, Norvège, Pays-Bas, Suède, Suisse, Canada, colonie du Cap, Indes, Natal, Nouvelle-Galles du Sud, Nouvelle-Zélande, Queensland.

La Conférence comprenait une quarantaine de délégués. Ceux de la France, MM. Deniker et Darboux, avaient reçu pour mission de prêter leur concours à une œuvre dont l'utilité, je dirai presque la nécessité, ne paraissait pas pouvoir être contestée. La Conférence fut présidée par l'honorable sir John Gorst, délégué du Gouvernement britannique, avec un talent et une courtoisie auxquels nous sommes heureux de rendre hommage.

On s'entendit tout d'abord, et sans peine, sur le point essentiel. Tous les délégués s'accordèrent à reconnaître qu'il était désirable de compiler et de publier, à l'aide de la coopération internationale, un Catalogue complet de littérature scientifique, classé suivant les sujets et aussi suivant les noms des auteurs. On déclara également que, dans la préparation de cette publication, on devait, avant tout, avoir égard aux exigences des chercheurs, afin que ceux-ci pussent, à l'aide du Catalogue, trouver, avec le minimum d'effort, tout ce qui aurait été publié sur une question ou sur un sujet donné.

Ces points étant établis d'un accord unanime, il fallait aborder

les moyens d'exécution. On s'arrêta à l'organisation suivante, qui était en quelque sorte imposée par la nature de l'œuvre à entreprendre. On décida d'abord que les matériaux nécessaires à la confection du Catalogue seraient, autant que possible, recueillis dans les différents pays par des organisations locales ou *Bureaux régionaux*, constitués à cet effet; que l'édition définitive et la publication du Catalogue seraient confiées à un *Bureau central international*, chargé de recevoir, de contrôler, de classer et de faire paraître les documents envoyés par les différents bureaux régionaux; que ce Bureau central serait placé à Londres et qu'il accomplirait sa tâche sous la direction et le contrôle d'un *Conseil international*, composé d'un petit nombre de délégués des principaux États.

Ces différentes décisions réglaient, sous la forme la plus précise et la mieux appropriée, l'organisation du travail qui devait être accompli pour l'exécution du Catalogue; mais il restait à examiner un grand nombre de questions délicates et difficiles relatives au plan et à l'étendue de ce travail. La Conférence décida tout d'abord que le nouveau Catalogue serait, comme l'ancien, exclusivement consacré à la Science pure, dégagée de toutes ses applications; mais elle fit disparaître avec raison l'exclusion qui frappait les brochures et les ouvrages séparés. Une de ses résolutions porte, en effet, que le nouveau Catalogue devra comprendre toutes les contributions originales aux diverses branches de la Science qui paraîtront, soit dans les revues, soit dans les recueils des Sociétés savantes, soit comme livres, brochures ou mémoires indépendants. Ce point ne souleva pas de difficultés. On eut, au contraire, quelque peine à dresser la liste des Sciences qui devaient figurer dans le Catalogue et l'on s'arrêta à la rédaction suivante qui réservait les points sur lesquels l'accord n'était pas complet :

« Devront entrer dans le Catalogue toutes les contributions aux Sciences mathématiques, physiques et naturelles; par exemple : Mathématiques, Astronomie, Physique, Chimie, Minéralogie, Géologie, Géographie mathématique et physique, Botanique, Zoologie, Anatomie, Pathologie générale et expérimentale, Psychologie expérimentale, Physiologie et Anthropologie, à l'exclusion de ce qu'on nomme parfois les Sciences appliquées; les

limites de ces différentes Sciences seront déterminées ultérieurement. »

Mais la question qui souleva les discussions les plus vives fut celle de la classification à adopter pour le nouveau Catalogue. Les délégués de la Belgique, MM. La Fontaine et Otlet, étaient deux des directeurs de l'*Institut international de bibliographie*, qui a été établi à Bruxelles en 1895, sur l'initiative d'une Conférence bibliographique internationale, et l'on sait que cet Institut a adopté le *système décimal* du docteur Dewey. Une discussion un peu confuse s'engagea sur ce système, qui, appuyé par le délégué autrichien, fut combattu par d'autres et en particulier par les deux délégués américains, le docteur Billings et le professeur Newcomb. On ne fit pas, à notre avis, une distinction assez nette entre deux points essentiels. Dans le système Dewey, comme dans tout système de classification, il y a deux choses bien distinctes : le classement des matières et des sujets, qui est le point essentiel, et, d'autre part, le système d'indexation. Les objections au classement, tel qu'il avait été établi par l'édition de 1894 du système Dewey, nous paraissent des plus sérieuses. Il y a, au contraire, des choses intéressantes dans le système d'indexation adopté par le Bureau bibliographique de Bruxelles. Nous avons visité cet Institut en 1898 et nous avons été frappé de l'importance des résultats qu'il a obtenus avec un personnel et des moyens relativement restreints.

Finalement la Conférence déclara qu'elle ne pouvait accepter aucun des systèmes récemment proposés et décida que la question de la classification devait faire l'objet de nouvelles études.

Elle examina ensuite sous quelle forme le Catalogue devrait être composé. Comme la question financière n'avait pas été soulevée et comme les délégués ne pouvaient se rendre compte encore de toutes ses difficultés, quelques-uns firent les propositions les plus larges. On voulait à la fois un Catalogue sur fiches, un Catalogue par ordre de matières et un Catalogue par noms d'auteurs. La Conférence décida que le Bureau central éditerait le Catalogue sous forme de fiches et que les fiches relatives à une ou plusieurs sciences, ou à quelques-unes de leurs sections, seraient fournies au public par les soins du Bureau central. Elle décida également

que le Bureau central aurait à publier le Catalogue sous forme de livre à des intervalles régulièrement espacés.

En résumé, deux questions essentielles avaient été réservées : celle de la classification et celle des moyens financiers à adopter pour la confection et la publication du Catalogue. La Société Royale fut priée de choisir dans son sein un comité qui aurait pour mission de les résoudre en même temps que quelques autres, moins importantes, laissées en suspens, et de faire un rapport sur ce sujet à tous les Gouvernements intéressés.

Tel fut le résultat de la première Conférence; il était, somme toute, très encourageant. Tous les délégués avaient pris part aux discussions en manifestant le désir le plus sincère de voir aboutir l'œuvre considérable proposée par la Société Royale; des résolutions précises et concordantes avaient été adoptées sur les points principaux. Les discussions qui avaient eu lieu sur les questions réservées avaient donné aux délégués l'idée la plus nette des difficultés qui se présentaient encore; et ces difficultés étaient loin de paraître insurmontables.

Le comité que nomma la Société Royale, sur l'invitation qui lui avait été adressée par la Conférence, travailla près de 2 ans. Il élabora des classifications très étendues et très détaillées pour les différentes sciences qui devaient figurer dans le Catalogue; il serra de près aussi la question financière en faisant connaître, d'une manière aussi approchée que possible, les dépenses qu'entraînerait la publication du Catalogue projeté. Son rapport, publié en mars 1898, fut envoyé à tous les Gouvernements, qui furent invités à prendre part à une deuxième Conférence internationale, dans laquelle on s'efforcerait de résoudre toutes les questions qui avaient été réservées.

Cette deuxième Conférence se réunit à Londres du 11 au 13 octobre 1898. Elle comprenait des délégués de tous les Gouvernements représentés à la première, à l'exception du Danemark, de la Grèce, de l'Italie, du Canada et de la Nouvelle-Galles du Sud. Confirmant presque toutes les résolutions adoptées dans la première réunion, elle ne put cependant parvenir à des résolutions définitives en ce qui concernait les deux questions principales qu'elle avait à résoudre, à savoir la classification par ordre de matières et les moyens financiers. Toutefois, les vues qui furent

échangées sur ces deux points essentiels furent loin d'être inutiles, et l'on put s'entendre notamment sur les principes qui devaient régir le système de classification. Un Comité international provisoire composé de huit membres fut chargé d'élaborer le plan définitif du Catalogue projeté.

On étudia aussi de plus près les questions relatives à la participation financière des différents Gouvernements, et il fut reconnu, sur la proposition des délégués français, que la forme la plus facilement réalisable de cette participation était celle d'une souscription à un nombre déterminé d'exemplaires du Catalogue, garantie par chacun des Gouvernements pour une période de 5 ans.

Le Comité international provisoire chargé d'exécuter les résolutions de la Conférence se réunit à Londres du 1er au 5 août 1899. Il se composait de sir M. Foster, de MM. Armstrong, Rücker pour la Grande-Bretagne, de MM. F. Klein et Schwalbe pour l'Allemagne, de M. Köppen pour la Russie et de M. H. Poincaré pour la France. Il prit connaissance des rapports envoyés par les différents pays et adopta des classifications pour les 17 sciences qui doivent entrer dans le Catalogue. La liste de ces sciences fut définitivement arrêtée de la manière suivante :

A. Mathématiques.
B. Mécanique.
C. Physique.
D. Chimie.
E. Astronomie.
F. Météorologie (y compris le Magnétisme terrestre).
G. Minéralogie (y compris la Pétrologie et la Cristallographie).
H. Géologie.
J. Géographie (mathématique et physique).
K. Paléontologie.
L. Biologie générale.
M. Botanique.
N. Zoologie.
O. Anatomie de l'homme (y compris l'Histologie et l'Embryologie).
P. Anthropologie physique.
Q. Physiologie (y compris la Psychologie expérimentale, la Pharmacologie et la Pathologie expérimentale).
R. Bactériologie.

Prenant surtout en considération les représentations du Gouvernement allemand qui tendaient à réduire le coût de l'entreprise, le Comité provisoire décida d'ajourner la publication du Catalogue sur fiches, qui avait été prévue dans les deux premières Conférences, et aussi de soumettre à une certaine limitation le nombre des mentions différentes ou des places distinctes que l'on

pourrait attribuer à chaque Mémoire dans le Catalogue par ordre de matières.

Une troisième Conférence se réunit à Londres, le 12 et le 13 juin 1900, pour examiner les propositions précédentes et faire connaître les résolutions définitives des Gouvernements. Elle accepta sans aucune difficulté les classifications qui avaient été proposées et reconnut que les engagements financiers pris par les Gouvernements représentés permettaient d'envisager l'avenir avec confiance. La Société Royale, qui, dans une question si ardue et si difficile, a montré un esprit de suite et une persévérance auxquels il convient de rendre hommage, leva d'ailleurs toutes les difficultés en se constituant comme éditeur du Catalogue au nom du Conseil international. La Société Royale consentit également à faire l'avance du capital nécessaire pour commencer l'entreprise, à charge d'être remboursée dans le délai de 5 années à partir de 1901.

L'œuvre entrait donc dans la période d'exécution. Les organes qui lui étaient nécessaires se sont, nous allons le voir, constitués avec la plus encourageante rapidité.

D'abord le *Conseil international,* qui a la responsabilité et la direction du Catalogue, a été nommé sans délai. Il se compose actuellement de sir Michaël Foster, de MM. les professeurs Rücker et Armstrong, du Dr L. Mond, délégués de la Société Royale, de M. H. Poincaré pour la France, du Dr Uhlworm pour l'Allemagne, de M. Nasini pour l'Italie. Le délégué des États-Unis sera désigné ultérieurement.

A la première réunion du Conseil, qui a eu lieu le 12 décembre 1900, il a été décidé de commencer la préparation du Catalogue à partir du 1er janvier 1901. Les traités pour l'impression et l'édition du Catalogue ont été approuvés. Pour pallier aux inconvénients, très grands selon nous, qui résultent de la suppression du Catalogue sur fiches, il a été décidé que le Catalogue sera imprimé sur deux colonnes et que l'on pourra livrer à tous ceux qui en feront la demande des exemplaires pour lesquels l'impression sera faite sur un seul côté de chaque feuille de papier, ce qui permettra de découper les volumes et de coller les titres sur des fiches ayant les dimensions habituellement employées par les bibliothécaires.

Chaque édition annuelle du Catalogue aura 17 volumes, dont le prix sera de 17 livres sterling pour les Gouvernements participants et d'environ 18 livres pour les particuliers.

Le Dr H. Forster Morley a été nommé directeur du *Bureau central*. Ce bureau est installé à Londres dans le Strand, 34 et 35, Southampton Street, et l'on y travaille déjà à la préparation du Catalogue pour l'année courante.

En ce qui concerne les *Bureaux régionaux*, les nouvelles sont au moins aussi satisfaisantes. Au mois d'août dernier, des Bureaux régionaux pourvus de toutes les ressources nécessaires avaient été constitués dans les pays suivants :

France.	Belgique.	Norvège.	Colonie du Cap.
Allemagne.	Autriche.	Pays-Bas.	Hongrie.
Italie.	Japon.	Danemark.	Portugal.
États-Unis.	Canada.	Inde.	Grèce.
Grande-Bretagne.	Suisse.	Mexique.	

Depuis, le mouvement s'est accentué : l'Académie de Cracovie a offert d'analyser tous les journaux écrits en langue polonaise; la Russie a constitué son Bureau régional sous la direction de M. le professeur Famintzine, de l'Université de Saint-Pétersbourg; la Finlande, l'Australie s'occupent des meilleurs moyens de cataloguer leur littérature scientifique. Le succès étant assuré, il est clair qu'aucun pays ne voudra être oublié.

Déjà les Bureaux régionaux ont envoyé 5000 fiches au Bureau central. Celui-ci ne reste pas inactif; il a publié en anglais les classifications et les instructions aux Bureaux régionaux. Tous ces documents ont été traduits en français, en italien et en allemand par les soins des Bureaux régionaux. Ces traductions ont paru ou vont paraître incessamment, ainsi que les listes des périodiques à analyser, accompagnées des abréviations propres à désigner chaque périodique. Nous avons déjà reçu la liste des périodiques français; elle comprend exactement 853 numéros. Les listes relatives à l'Allemagne, à la Grande-Bretagne et à plusieurs autres pays ont également paru.

L'avenir financier de l'œuvre se présente aussi sous l'aspect le plus encourageant. Les contributions des différents pays ont revêtu la forme de promesses de souscriptions annuelles à un

certain nombre d'exemplaires complets du Catalogue, ou à leur équivalent en volumes séparés pendant la période 1901-1906. La liste des souscriptions doit dépasser à ce jour 350 exemplaires.

L'œuvre peut donc être considérée comme fondée; elle sera contrôlée périodiquement par une *Convention internationale* qui se réunira à Londres en 1905, puis en 1910, et ensuite tous les 10 ans. Cette Convention s'occupera de l'examen et, s'il y a lieu, de la revision des règles qui ont été adoptées pour la publication du Catalogue. En tout état de cause, ces règles ne pourront donc être modifiées avant l'année 1906.

Dans l'intervalle entre deux réunions consécutives de la Convention internationale, l'administration du Catalogue incombe au Conseil international. Ce Conseil, qui vient de se réunir à Londres, a décidé que l'impression du Catalogue commencerait incessamment.

Notre pays peut se rendre cette justice que, dès le début, il a donné avec empressement son concours le plus actif à une œuvre dont l'utilité était incontestable, mais dont la réalisation pouvait paraître bien difficile. Comme l'a fait remarquer avec grande raison la Société Royale dans l'exposé qu'elle a fait présenter à la récente assemblée générale de l'*Association internationale des Académies,* les difficultés contre lesquelles les promoteurs du Catalogue ont eu à se débattre, alors qu'il n'existait aucun organe scientifique international, mettent en pleine lumière les services que cet organe pourra rendre en s'occupant des problèmes dont la solution nécessite la coopération de toutes les nations civilisées.

GASTON DARBOUX.

SUR QUELQUES TRAVAUX RÉCENTS RELATIFS A LA NOMOGRAPHIE [1];

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

Le principal objet de la présente Note est de donner une analyse critique d'un Mémoire de plus de 300 pages, publié

[1] Le *Traité de Nomographie* que nous avons publié en 1899 à la librairie Gauthier-Villars sera désigné dans la suite de cette Note par les lettres *T. de N.*

dans la livraison d'août 1901 du *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils,* par M. Soreau, ancien élève de l'École Polytechnique, sous le titre : *Contribution à la théorie et aux applications de la Nomographie.*

Par la même occasion, nous signalerons quelques autres Travaux relatifs au même sujet, parus depuis peu, et non dépourvus d'intérêt au point de vue purement mathématique. Nous indiquerons enfin, dans une Note annexe, le développement qu'a pris l'enseignement de la doctrine nouvelle dans diverses écoles techniques de la France et de l'étranger.

Rappelons tout d'abord que la Nomographie traite de la représentation des équations à un nombre quelconque de variables au moyen de Tableaux graphiques cotés dits *abaques* (1), ou mieux *nomogrammes*, suivant une proposition émanant de M. Schilling, professeur à l'Université de Göttingen.

I.

Le Travail de M. Soreau peut être considéré comme une exposition, sous une forme nouvelle en quelques-unes de ses parties, des principes fondamentaux contenus dans le *Traité de Nomographie* dont, en son ensemble, il suit l'ordre même à quelques variantes de détail près. Chemin faisant, d'ailleurs, il complète ou généralise plusieurs de ces principes, comme on va le voir.

Disons tout de suite que la contribution personnelle de l'auteur porte presque exclusivement sur les nomogrammes du type à alignement, ce qui vient confirmer une fois de plus l'intérêt qui s'attache à ce mode particulier de représentation cotée, intérêt déjà mis en évidence par le très grand nombre d'applications techniques qui ont suivi l'établissement de sa théorie dans notre brochure de 1891 (2), et, plus encore, le développement de cette

---

(1) D'après son étymologie, ce terme doit être réservé pour désigner les Tableaux graphiques dont la disposition rappelle celle d'un damier (ἄβαξ).

(2) *Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques.* Chap. IV et VI.

théorie dans notre Traité de 1899 (¹). Sur 80 exemples de nomogrammes qui servent à illustrer l'exposé de M. Soreau, il n'y en a pas moins de 57 du type à alignement, dont 44 nouveaux traduisant des formules empruntées à la Géodésie, à l'Hydraulique, à la Résistance des matériaux, à l'Artillerie, à la Navigation, aux Machines à vapeur, aux Chemins de fer, etc.

Ce qui caractérise le mode d'exposition de M. Soreau, c'est l'*emploi exclusif des coordonnées cartésiennes* et, ce qui en est une suite nécessaire, l'usage constant des déterminants. L'idée de principe qui nous a conduit à formuler la méthode des points alignés a consisté à opérer une transformation dualistique des abaques cartésiens, anamorphosés ou non, par la substitution aux coordonnées cartésiennes de certaines coordonnées tangentielles spéciales que nous avions étudiées sous le nom de *coordonnées parallèles*. Et de fait, ce sont bien là ce qu'on peut appeler les coordonnées naturelles de la question (²). Mais il est clair qu'une fois obtenus par cette voie, les nomogrammes à alignement peuvent être décrits au moyen de tout autre système de coordonnées, et notamment au moyen des coordonnées cartésiennes. Nous avons même très explicitement mis en lumière (³) le lien qui existe entre les équations servant à exprimer le principe de la méthode dans l'un ou l'autre système; et si, pour des raisons que nous avons fait connaître (⁴), nous avons préféré nous en tenir, d'une manière générale, à l'emploi des coordonnées parallèles, qui nous avait servi de point de départ, nous reconnaissons bien volontiers l'intérêt qu'il y avait, pour les techniciens, à ce que l'exposé complet de notre théorie fût repris en coordonnées cartésiennes, et nous ne pouvons que savoir gré à M. Soreau d'avoir mené cette tâche à bien (⁵).

(¹) *T. de N.*, Chap. III et V.

(²) Comparer notamment l'exposé, au moyen de ces coordonnées, de la méthode de transformation géométrique que nous avons proposée pour passer d'un nomogramme à droites entre-croisées à un autre à points alignés (*T. de N.*, p. 129), à celui qui résulte de l'emploi des coordonnées cartésiennes (*Mém. Soreau*, p. 237).

(³) *T. de N.*, p. 134.

(⁴) *T. de N.*, p. 127.

(⁵) Nous croyons devoir présenter ici une observation relative à un détail terminologique de l'exposé de M. Soreau, qui, pour les lecteurs déjà familiarisés

Rappelons que les équations à trois variables α_1, α_2, α_3 auxquelles s'applique la méthode des points alignés sont celles qui peuvent revêtir la forme

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

où f_i, φ_i, ψ_i représentent des fonctions de la seule variable α_i. Une telle équation exprime, en effet, l'alignement des trois points dont les coordonnées homogènes sont données respectivement par

$$x = f_i, \qquad y = \varphi_i, \qquad z = \psi_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

et, plus généralement, de ceux qui s'en déduisent par une transformation homographique quelconque ([1]).

Former, lorsqu'une équation appartient à ce type, les fonctions f_i, φ_i, ψ_i, qui sont dites ses *composantes*, c'est, d'après notre terminologie, effectuer la *disjonction des variables* de cette équation.

Le principal objet de la théorie que nous avons développée sur ce sujet a consisté à donner le moyen d'effectuer immédiatement cette disjonction pour certains types d'équations rentrant dans le type général à alignement, et qui constituent à cet égard des *formes canoniques*. Reprenant la question en coordonnées cartésiennes, M. Soreau fonde une classification des équations de ce type sur la remarque suivante :

Si, dans le type général (1) qui contient, au premier degré, six fonctions arbitraires ([2]) (obtenues en divisant les éléments de chaque ligne du déterminant par l'un d'eux), les fonctions d'une même ligne sont liées par une relation linéaire, elles se réduisent à une seule dans le déterminant développé et les points cotés correspondants forment une échelle rectiligne. M. Soreau appelle

---

avec le *T. de N.*, pourrait être la cause d'une certaine confusion. Contrairement à l'usage adopté dans cet Ouvrage, M. Soreau donne le nom de *réseau* à un seul système simplement infini de lignes, au lieu de le réserver pour l'ensemble de deux tels systèmes.

([1]) *T. de N.*, p. 134.

([2]) *T. de N.*, p. 417 (note).

dès lors *ordre nomographique* de l'équation le nombre des fonctions arbitraires *linéairement indépendantes* qu'elle renferme au premier degré. Ce nombre varie de 3 à 6 et l'on voit que *le nombre des échelles rectilignes qui figurent sur le nomogramme correspondant est égal à* $6 - p$.

L'idée de cette classification est bonne en soi, mais il nous semblerait préférable de prendre comme caractéristique de chaque type l'excès du nombre des fonctions composantes linéairement indépendantes sur celui des variables. Cet excès pourrait être dit le *genre nomographique* de l'équation proposée. Il varie, pour le type à simple alignement, de 0 à 3 et l'on voit qu'*il est égal au nombre des échelles curvilignes du nomogramme correspondant*. Avec une telle définition, les nomogrammes à simple ou à double alignement qui ne comportent que des échelles rectilignes, et sont entièrement comparables, sont indistinctement de genre 0, tandis qu'avec la définition de M. Soreau ils sont respectivement d'ordre 3 et d'ordre 4. Quoi qu'il en soit de cette définition, la forme la plus générale de l'équation représentable par trois échelles rectilignes, c'est-à-dire de l'équation d'ordre nomographique 3 (ou de genre 0 d'après la définition précédente), est la suivante :

$$(2)\quad A f_1 f_2 f_3 + B_1 f_2 f_3 + B_2 f_3 f_1 + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + C_3 f_3 + D = 0.$$

Nous en avons fait une étude complète [1] en prenant pour les fonctions f_1, f_2, f_3 les variables α_1, α_2, α_3 elles-mêmes, parce que nous avions en vue de déterminer les cas où les échelles servant à la représentation peuvent, par transformation homographique, être rendues *régulières*.

Si, sans changer un mot à notre théorie, on substitue les f_i aux α_i, on obtient la solution tout à fait générale de ce problème : Représenter l'équation (2) par trois échelles qui soient *projectives* de celles des fonctions f_1, f_2, f_3.

Cette étude nous a montré que, avec cette condition de projectivité, la disjonction des variables de cette équation peut être

---

[1] *T. de N.*, Chap. VI, Sect. II B. Cette étude avait précédemment fait l'objet d'un Mémoire spécial dans les *Acta Mathematica* (t. XXI, 1897, p. 301).

opérée *sous forme réelle* lorsque le discriminant Δ du premier membre de (2) rendu homogène est positif ou nul.

Si $\Delta > 0$, on effectue la disjonction en mettant l'équation sous la forme

$$(2') \quad M(f_1+s_1)(f_2+s_2)(f_3+s_3)+N(f_1+t_1)(f_2+t_2)(f_3+t_3)=0,$$

qui rentre dans le type canonique

$$(2'_1) \qquad \varphi_1\varphi_2\varphi_3=1,$$

et les trois échelles rectilignes correspondantes *ne sont pas concourantes.*

Si $\Delta = 0$, on met l'équation sous la forme

$$(2'') \qquad \frac{t_1}{f_1+s_1}+\frac{t_2}{f_2+s_2}+\frac{t_3}{f_3+s_3}=0,$$

qui rentre dans le type canonique

$$(2''_1) \qquad \psi_1+\psi_2+\psi_3=0,$$

et les trois échelles correspondantes *sont concourantes.*

Mais le calcul, dans tous les cas, des divers coefficients M, N, s_i, t_i, exige une discussion délicate tenant à ce que si, parmi les quantités

$$E_1=AC_1-B_2B_3, \qquad E_2=AC_2-B_3B_1, \qquad E_3=AC_3-B_1B_2,$$

il en est qui s'annulent, le résultat doit être mis sous une forme spéciale pour ne pas devenir illusoire. Cette discussion est complètement épuisée dans la solution que nous avons donnée, à laquelle n'échappe aucun cas. Mais cette solution, rejetée à la fin de notre Traité (parce que faite pour intéresser les mathématiciens plutôt que les techniciens, comme nous le disons expressément dans notre Introduction, p. IX), avait échappé à M. Soreau qui a, en conséquence, repris le problème par une marche un peu différente pour aboutir à un résultat d'ailleurs immédiatement réductible au nôtre dans le cas général [1], mais sans aborder la discus-

[1] Il suffit, pour opérer cette réduction, de remarquer que les quantités B_i de M. Soreau se confondent avec celles qui, au moyen de nos notations, s'écrivent $\frac{E_i}{\Delta}$.

sion, pourtant indispensable, à laquelle nous nous étions livré et qui vise les cas où certaines des quantités E_i s'annulent. Sur ce point, l'exposé de l'auteur n'a donc pas la généralité qu'il lui suppose (1).

La condition de projectivité que nous avons observée, en raison de la recherche des échelles régulières, exclut évidemment l'emploi de toute anamorphose transcendante. Si l'on s'affranchit de cette condition, il est clair qu'on peut réduire l'un à l'autre les types canoniques $(2'_1)$ et $(2''_1)$ en opérant, avec Lalanne, l'anamorphose logarithmique définie par

$$\psi_i = \log \varphi_i,$$

ce qui permet de faire correspondre à volonté à toute équation du type (2) pour laquelle $\Delta \geq 0$ un nomogramme à échelles concourantes ou non, en partant des types projectifs qui viennent d'être définis. En faisant cette remarque dans son Mémoire, M. Soreau semble croire (2) qu'elle nous avait échappé, alors que la phrase soulignée ci-dessus montre clairement la raison pour laquelle nous n'avions pas à la faire intervenir en cet endroit. On la rencontre d'ailleurs en un autre passage de notre Livre (3).

En outre, lorsque, comme M. Soreau, on ne s'astreint pas à conserver le caractère projectif des échelles, mais que l'on se donne toute latitude de leur faire subir une anamorphose quelconque, ce n'est pas seulement lorsque le discriminant Δ est positif ou nul, mais même lorsqu'il est négatif, que l'on peut représenter une équation du type (2) au moyen d'un nomogramme à alignement constitué par trois échelles rectilignes. M. G. Fontené a fait voir (4), en effet, que si $\Delta < 0$, l'équation peut être mise sous la

---

(1) *Loc. cit.*, p. 249, 255 et 257. Nous tenons à dire que, depuis que nous lui avons communiqué cette critique, M. Soreau a reconnu que le moyen de rendre son analyse applicable aux divers cas que notre solution avait mis en évidence consiste à laisser subsister dans le résultat final les quantités qu'il a appelées λ_i et μ_i, et qui, pour le passage à la limite, se prêtent au même rôle que nos quantités ρ'_i et ρ''_i auxquelles elles sont évidemment réductibles.

(2) *Loc. cit.*, p. 256 et 257.

(3) *Voir* la remarque qui, à la page 417, accompagne les types (1) et (1 *bis*) en la rapprochant des notes des pages 144 et 161.

(4) *Nouv. Ann. de Math.*, 3e série, t. XIX, 1900, p. 494.

forme

$$\text{arc tang}\, F_1 + \text{arc tang}\, F_2 + \text{arc tang}\, F_3 = K,$$

F_1, F_2, F_3 étant des fonctions linéaires respectivement de f_1, f_2, f_3, et K une constante. Sur le terrain où l'auteur avait entendu se placer, le résultat qu'il a obtenu manque donc encore, à cet égard, de généralité.

Sans donc méconnaître l'effort personnel qui se révèle dans le mode d'exposition de cette partie du Mémoire, on peut observer que, pour le fond, il ne s'y trouve pas autant de choses nouvelles que l'auteur avait pu le croire.

Nous tenons toutefois à signaler à part un type particulier d'équation d'ordre 5 (ou de genre 2) qui présente un véritable intérêt tant au point de vue des applications immédiates dont il est susceptible que de la généralisation à laquelle il conduit dans le cas du double alignement. Ce type, auquel l'auteur consacre un paragraphe spécial ([1]), est celui qui peut s'écrire

$$\frac{a_1 f_1 + a_2 f_2 + b}{A_1 F_1 + A_2 F_2 + B} = f_3,$$

les fonctions f_1 et F_1 d'une part, f_2 et F_2 de l'autre étant linéairement indépendantes.

Nous touchons maintenant à la partie incontestablement la plus originale du Travail de M. Soreau. C'est celle qui traite des nomogrammes *à double alignement*, applicables à des équations à quatre variables ([2]). L'auteur aboutit à leur considération par une méthode très heureuse qui consiste, après avoir généralisé dans l'espace, pour le cas de quatre variables, le principe de la méthode des points alignés, ce qui conduit à la notion des *points coplanaires* ([3]), à examiner dans quel cas le lien géométrique ainsi constitué est réductible à une construction plane.

Cette méthode conduit l'auteur à envisager les équations à

([1]) *Loc. cit.*, p. 301.

([2]) *T. de N.*, Chap. III, Sect. V.

([3]) Un exemple de nomogramme à trois dimensions fondé sur une ingénieuse application de ce principe a été donné par M. Mehmke (*T. de N.*, p. 348).

quatre variables susceptibles de se mettre sous la forme

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & l\varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & l\varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & m\varphi_3 & \psi_3 \\ f_4 & \varphi_4 & m\varphi_4 & \psi_4 \end{vmatrix} = 0,$$

où l et m sont des constantes.

Il montre qu'une telle équation est susceptible d'être représentée par *double alignement*, avec une ligne de pivots rectiligne (1), et, par suite, aussi par le procédé des *parallèles mobiles* (2), qui correspond au cas où, par une transformation homographique, la ligne des pivots a été rejetée à l'infini.

D'ailleurs, toute équation représentable par un tel procédé l'est évidemment aussi au moyen d'un *nomogramme à équerre* (3), ainsi que nous en avions déjà fait la remarque (4).

M. Soreau généralise, en outre, le type des nomogrammes à parallèles, sous la forme de ce qu'il appelle des *abaques*, ou nomogrammes, *proportionnels*, applicables au type général d'équation obtenu en supposant que l'on ait dans les troisièmes éléments des deux dernières lignes du déterminant (3) des constantes distinctes m et p au lieu de la seule constante m.

Ce type à double alignement (3), comme le type à simple alignement (1), peut donner lieu à une théorie algébrique visant la disjonction des variables dans des équations de forme plus particulière qui s'y rattachent. C'est en développant une telle théorie pour les cas les plus importants, et en l'illustrant par des exemples nombreux et intéressants, que M. Soreau a surtout fait œuvre personnelle.

Il convient de signaler tout particulièrement l'étude à laquelle il se livre pour les équations d'ordre 4 (ou de genre 0, suivant la terminologie ci-dessus proposée), dans laquelle il met en évidence certaines conditions de groupement et de disjonction des variables, et fait connaître divers types spéciaux, se rencontrant souvent

---

(1) *T. de N.*, p. 216.
(2) *T. de N.*, p. 241.
(3) *T. de N.*, p. 257.
(4) *T. de N.*, p. 242.

dans la pratique, pour lesquels ces conditions sont toujours réalisées.

Nous mentionnerons encore la partie du Mémoire où l'auteur examine les types de nomogrammes à trois variables qui se déduisent de ceux à quatre variables lorsque, dans ces derniers, on suppose deux des variables identiques ([1]), ou l'une d'elles remplacée par une constante ([2]).

Dans l'exposé qu'il présente ensuite des principes applicables à la représentation des équations à un nombre quelconque de variables supérieur à 3 ([3]), M. Soreau s'est surtout efforcé de mettre en lumière le parti que l'on peut tirer de l'accolement de nomogrammes du type à simple ou à double alignement s'appliquant à des groupes de variables convenablement isolés dans l'équation considérée. Il n'hésite d'ailleurs pas, lorsqu'il n'en résulte aucun inconvénient, à faire correspondre plusieurs systèmes cotés à une même variable pour rendre possible l'application de ce procédé. A ce propos, on doit une mention spéciale aux nomogrammes donnés sous les n°s 53 et 65. Le premier ([4]), relatif à l'épaisseur des tôles des foyers cylindriques, et qui se décompose en deux nomogrammes, l'un à équerre, l'autre à simple alignement, sert à représenter une équation à cinq variables au moyen de six systèmes cotés. Le second ([5]), relatif à la traction des locomotives, et qui se décompose en quatre nomogrammes, dont deux à équerre et deux à simple alignement, sert à représenter une équation à sept variables au moyen de dix systèmes cotés.

Nous nous étions attaché, dans notre Livre ([6]), à faire ressortir les précieux services que peut rendre la méthode des points alignés

---

([1]) *Loc. cit.*, p. 372. Au sujet des nomogrammes sur lesquels, à une même variable, correspondent plusieurs systèmes cotés, *voir* le renvoi au bas de la page 401 du *T. de N.*

([2]) *Loc. cit.*, p. 383.

([3]) *T. de N.*, Chap. V.

([4]) *Loc. cit.*, p. 410. On puet remarquer que le type d'échelle multiple à support curviligne qui se rencontre dans ce nomogramme, et que M. Soreau signale comme nouveau, rentre très explicitement dans la définition que nous avons donnée des échelles *à points condensés* (*T. de N.*, p. 296). Toutefois, c'est bien là le premier exemple *pratique* d'une telle échelle qui s'offre à nous.

([5]) *Loc. cit.*, p. 447.

([6]) *T. de N.*, Chap. III, Sect. IV.

pour la recherche de certaines lois empiriques, et nous avions, à cet égard, eu recours au remarquable exemple que l'on doit à M. Rateau et qui lui a permis de donner une expression analytique très approchée des consommations théoriques d'une machine à vapeur. Après avoir repris cet exemple dans son Travail, M. Soreau le fait suivre de deux autres qui lui sont personnels et qui visent l'un le maximum des efforts tranchants dans les poutres à une travée (1), l'autre la probabilité d'une relation entre le coefficient de chaleur spécifique d'électricité des métaux et leur point neutre (2).

En résumé, sans parler de l'élégance et de la variété des exemples nouveaux d'application qu'il contient, le Mémoire de M. Soreau nous semble devoir s'imposer à l'attention de tous ceux qui s'intéressent à la Nomographie, surtout en raison de la forme originale et féconde sous laquelle la théorie du double alignement s'y trouve exposée et généralisée, ainsi que de l'extension qui y est donnée à la représentation des équations à plus de trois variables par accolement de nomogrammes à alignement.

II.

Les avantages pratiques de la méthode des points alignés, que vient de confirmer encore l'ensemble des applications contenues dans le Mémoire de M. Soreau, après celles qui étaient dues déjà à de nombreux auteurs, rendent manifeste l'intérêt qu'il y a à étendre son emploi dans la plus large mesure possible.

Si l'on ne peut pas toujours (bien que ce soit extrêmement fréquent) mettre *rigoureusement* sous la forme du type général à alignement [équation (1) ci-dessus] toute équation se rencontrant dans la pratique, on parvient à le faire parfois *avec une approximation suffisante* en remplaçant, dans un domaine déterminé, l'équation donnée par une autre appartenant au type voulu.

---

(1) *Loc. cit.*, p. 493.
(2) *Loc. cit.*, p. 499.

Il arrive, en effet, qu'une relation entre trois variables, traduite en un abaque cartésien, entre certaines limites, donne lieu au tracé d'un système de lignes se confondant très sensiblement, dans le champ considéré, avec des droites. En substituant dès lors à ces lignes les droites qui en diffèrent très peu et appliquant à l'abaque ainsi obtenu la transformation dualistique rappelée plus haut, on obtient un nomogramme à points alignés qui représente l'équation proposée avec une certaine approximation. C'est ainsi notamment que le capitaine Lafay a construit ses ingénieux nomogrammes pour le tir des pièces de siège ([1]).

On peut aussi, lorsque les courbes obtenues sur l'abaque cartésien s'écartent par trop de lignes droites, s'efforcer de leur en substituer d'autres qui présentent cette particularité, grâce à l'emploi d'une *anamorphose graphique* ([2]) comme celle que Lalanne appliqua jadis, dans un cas particulier, à la Table de mortalité de Demonferrand. La même transformation que précédemment, effectuée après cette anamorphose, donne alors de nouveau un nomogramme à points alignés.

Mais on ne connaissait jusqu'ici, pour obtenir un tel résultat, d'autre moyen que le simple tâtonnement, et il était fort à souhaiter qu'une méthode plus sûre fût instituée à cet effet. C'est à quoi le capitaine Lafay a réussi en ramenant *approximativement*, par un ingénieux procédé graphique, une équation quelconque à trois variables à l'un des types canoniques

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0,$$

ou

$$f_1 \varphi_3 + f_2 \psi_3 + f_3 = 0,$$

respectivement de genre 0 et 1.

Pour le premier d'entre eux (auquel s'applique le procédé des nomogrammes à échelle mobile connus sous le nom de *règles à calcul*), le capitaine Lafay a indiqué une première solution à l'occasion d'un problème de tir ([3]). Il a, depuis lors, développé

([1]) *T. de N.*, p. 206.
([2]) *T. de N.*, p. 87.
([3]) *Revue d'Artillerie*, t. LVIII, 1901, p. 455.

une solution plus générale (¹) s'étendant au second type qui, grâce à la présence d'une fonction composante de plus, permet en quelque sorte de serrer de plus près l'équation donnée. Cette solution nous semble appelée à rendre de très réels services dans la pratique et constitue à cet égard un progrès qu'il convenait de noter.

III.

Nous dirons enfin un mot des problèmes que la Nomographie a fait naître dans le domaine des Mathématiques pures, et sur lesquels nous avons naguère attiré l'attention des lecteurs du *Bulletin* (²).

Il est bien clair, par exemple, que la théorie de la disjonction des variables dans les équations du type à alignement de genre o, dont il a été question plus haut, présente, indépendamment du but pratique qu'elle poursuit, un intérêt, au point de vue algébrique, qui n'est pas négligeable. On en peut dire autant, au point de vue de l'Analyse, de la détermination des caractères différentiels des équations auxquelles s'applique tel ou tel type de nomogramme, détermination dont notre Livre offre d'assez nombreux exemples (³).

Voici, dans cet ordre d'idées, un fait qui mérite d'être noté : Devant le *Congrès international des Mathématiciens*, tenu à Paris en 1900, le Président de la première Section, M. le professeur D. Hilbert, de l'Université de Göttingen, a, dans une conférence magistrale, signalé à la sagacité des Géomètres un certain nombre de problèmes dignes, selon lui, de tenter leurs plus sérieux efforts (⁴).

Or, ainsi que le dit très expressément l'auteur, c'est la

(¹) *Génie civil*, t. XL, 1902, p. 298.

(²) *Bull. des Sc. math.*, 2ᵉ série, t. XII, 1898, p. 177.

(³) *T. de N.*, Chap. VII, Sect. II A.

(⁴) La conférence de M. Hilbert, traduite par M. Laugel, figure *in-extenso* dans le *Compte rendu* du Congrès, page 58.

Nomographie qui lui a inspiré le problème qui figure sous le n° 13 ([1]), et voici comment :

Les seuls éléments à plusieurs cotes qui puissent figurer sur un nomogramme *ne comportant aucun élément mobile* sont ceux qui s'obtiennent par enchaînement de réseaux successifs ([2]), c'est-à-dire qui correspondent analytiquement à un enchaînement fini de fonctions de deux arguments. Dès lors, une équation ne sera représentable par un nomogramme sans élément mobile qu'autant que sa résolution pourra s'effectuer au moyen de fonctions de deux arguments seulement. Grâce aux transformations de Tschirnhausen, on peut étendre un tel mode de résolution aux équations algébriques quelconques jusqu'au 6e degré. Le problème posé par M. Hilbert consiste à démontrer que cette possibilité cesse à partir du 7e degré.

Cette Communication de l'éminent Géomètre a été pour nous l'occasion de faire voir ([3]) que la méthode des points alignés pouvait, toujours eu égard aux transformations de Tschirnhausen, permettre la résolution des équations algébriques jusqu'au 7e degré *inclusivement*, et, par suite, que l'adjonction à la partie fixe du nomogramme d'une simple ligne droite pour tout élément mobile permettait d'étendre à un degré de plus, pour les équations algébriques quelconques, le bénéfice de la résolution nomographique.

Cette recherche nous ayant amené à préciser, d'une façon plus complète que nous ne l'avions fait dans notre Traité, la distinction essentielle qu'il convient d'établir entre les éléments à plusieurs cotes suivant que, d'après notre terminologie, ils sont ou non *condensés*, nous avons, dans une Note spéciale ([4]), repris à ce point de vue l'exposé des principes fondamentaux de la Nomographie

---

([1]) *Loc. cit.*, p. 91.

([2]) *T. de N.*, p. 351.

([3]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXXI, 1900, p. 522.

([4]) *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XXIV, 1901, p. 256. Il a été fait de cette Note des traductions en allemand par M. Fürle (*Archiv der Mathematik*), en espagnol par M. Torres (*Naturaleza*), en italien par M. Lazzeri (*Periodico di Matematica*). M. Lovett nous a, en outre, fait connaître son intention d'en donner une traduction en anglais.

pour en indiquer ensuite l'application à la résolution nomographique des équations algébriques des sept premiers degrés.

NOTE ANNEXE

SUR LA PÉNÉTRATION DE LA NOMOGRAPHIE DANS L'ENSEIGNEMENT DES ÉCOLES TECHNIQUES.

Dans l'analyse qu'il a donnée du *Traité de Nomographie* (1), M. Maurice Lévy émet l'avis que le nouveau corps de doctrine « mérite de prendre place à côté de la Géométrie descriptive et de la Statique graphique ».

Et, de fait, la Nomographie, réduite au moins à ses principes les plus essentiels, commence à se faire, à côté de ses deux aînées, une petite place dans l'enseignement des écoles techniques. Elle a été généralement rattachée soit à des cours de Statique graphique (2), soit à des cours purement techniques dans les applications desquels peut intervenir l'usage des nomogrammes.

Voici l'indication de quelques-uns des Cours dans lesquels ont été successivement introduites des notions plus ou moins développées de Nomographie :

FRANCE.

École Polytechnique. — Cours de Géométrie descriptive.....	MM. Haag.
École des Ponts et Chaussées. — Leçons sur la cubature des terrasses.....	d'Ocagne.
École des Mines de Saint-Étienne. — Cours de Mécanique appliquée.....	Jouguet (3).
École forestière de Nancy. — Cours de construction de routes.....	Petitcollot.

(1) *Génie civil*, t. XXXV, 1899, p. 425.

(2) Sur la nécessité, en dépit de ce rattachement didactique, d'établir une distinction formelle entre le calcul nomographique et le calcul graphique proprement dit, *voir* la Note que nous avons présentée au *Congrès international des Mathématiciens* de 1900 (page 419 du *Compte rendu du Congrès*).

(3) A titre d'exercice, M. Jouguet fait construire à ses élèves quelques nomogrammes.

ALLEMAGNE.

École technique supérieure de Stuttgart. — Cours de Géométrie descriptive..... MM. Mehmke.
Université de Göttingen. — Cours de Statique graphique..... Schilling.

BELGIQUE.

Université de Louvain. — Cours spécial de Nomographie..... Suttor.

ITALIE.

École d'application des Ingénieurs de Padoue. — Cours de Statique graphique..... Favaro (1).
École d'application des Ingénieurs de Bologne. — Cours de Statique graphique..... Gorrieri.

PORTUGAL.

Académie polytechnique de Porto. — Cours de construction de routes et chemins de fer..... Laranjeira.

C'est en Belgique, à l'*Université de Louvain*, que l'enseignement de la Nomographie a pris jusqu'ici le plus complet développement. Sous l'inspiration de M. Pasquier (2), professeur de Mécanique à cette Université, il y a été fondé un Cours *spécial* de Nomographie confié à M. l'ingénieur Suttor, et qui comprend une leçon par semaine pendant le premier semestre de la deuxième année d'étude des Écoles spéciales d'ingénieurs annexées à l'Université. Cet enseignement est d'ailleurs complété par des constructions de nomogrammes que les élèves doivent exécuter à titre d'exercices pratiques. Les étudiants de l'Université appartenant à l'ordre des Sciences mathématiques ou physiques peuvent facultativement suivre ce Cours dont les pre-

(1) L'assistant du professeur, M. l'ingénieur Bellavitis, dirige des exercices pratiques de construction de nomogrammes.

(2) *Voir* à ce sujet l'article publié par M. Pasquier dans *L'Enseignement mathématique* (t. I, p. 350).

mières feuilles autographiées ont été publiées en 1900 par M. Suttor [1].

Indépendamment des Cours permanents dans le programme desquels elle a été admise, la Nomographie a donné lieu à des séries de conférences isolées dont quelques-unes ont, depuis lors, pris la forme de publications imprimées. A cet égard, on doit donner une mention spéciale à celles qui ont été faites, d'une part, sous l'inspiration de M. Félix Klein, par M. Schilling à la Société mathématique de l'Université de Göttingen [2], de l'autre, par M. Pesci à l'Académie navale de Livourne [3].

Les conférences de M. Pesci ont d'ailleurs été pour lui l'occasion de remarquables applications de la méthode des points alignés à l'Art naval et, plus particulièrement, à la Balistique navale, en collaboration avec le commandant Ronca [4].

SUR LES GROUPES DE TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES;

PAR M. ALFRED LOEWY.

(Extrait d'une lettre adressée à M. Picard.)

Je suis heureux que vous attachiez quelque intérêt à mes remarques sur le groupe de transformations d'une équation différentielle linéaire et je vous remercie pour l'invitation bienveillante de vous exposer le détail de ce sujet. J'emploie les mêmes notions que vous dans votre *Traité d'Analyse,* t. III, p. 531, (Paris, 1896).

---

(1) Louvain; typographie Gile.

(2) *Ueber die Nomographie von M. d'Ocagne,* par le Dr F. Schilling (Leipzig; Teubner, 1900).

(3) *Cenni di Nomografia,* par le professeur G. Pesci (Livourne; P. Giusti, 1900. 2e édition en 1901), reproduit en appendice du *Manuale* ci-dessous.

Un autre résumé de Nomographie a paru en langue italienne, sous la signature du capitaine Ricci, dans la *Rivista d'Artigliera e Genio* (1900-1901).

(4) *Manuale del Tiro,* par le capitaine de frégate Ronca (Livourne; P. Giusti, 1901). Cet important Ouvrage est complété par un album de nomogrammes à grande échelle, mis en usage dans la flotte italienne.

Soit

$$(1)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + p_2(x)\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m(x)y = 0$$

une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels; nous désignons par $y_1, y_2, \ldots, y_m$ un système fondamental d'intégrales et posons

$$(2)\qquad V = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \ldots + u_m y_m,$$

où les u sont des fonctions rationnelles arbitrairement choisies de x. En différentiant la relation (2) m^2 fois et ayant égard à l'équation (1), on forme un système de m^2+1 équations (3), qui donnent $V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^{m^2}V}{dx^{m^2}}$ en fonctions linéaires et homogènes des y et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $m-1$. Nous éliminons entre les m^2+1 équations (3) les fonctions y et leurs dérivées et nous obtenons une équation de l'ordre m^2 :

$$(E)\qquad \frac{d^{m^2}V}{dx^{m^2}} + P_1(x)\frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}} + \ldots + P_{m^2}(x)V = 0,$$

à coefficients rationnels. Parce que les fonctions u choisies arbitrairement sont indépendantes linéairement, l'équation (E), que M. Schlesinger, dans son *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, t. II_1, p. 60 (B. G. Teubner, Leipzig, 1897), appelle d'après votre nom *la résolvante de Picard*, est de l'ordre m^2, elle a pour intégrales les m^2 fonctions $u_i y_k$. Du système des équations (3) on peut tirer les valeurs des y et de leurs dérivées en fonctions linéaires de $V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}}$ à coefficients rationnels.

On a

$$\begin{aligned}
y_1 &= \alpha_1 V + \alpha_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \alpha_{m^2}\frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}},\\
y_2 &= \beta_1 V + \beta_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \beta_{m^2}\frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_m &= \lambda_1 V + \lambda_2 \frac{dV}{dx} + \ldots + \lambda_{m^2}\frac{d^{m^2-1}V}{dx^{m^2-1}},
\end{aligned}$$

où les $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont rationnels en x.

On voit qu'à toute intégrale V de l'équation (E) correspond un système d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de l'équation proposée (1). Seulement, dans le cas où le déterminant wronskien des y est nul, le système $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ne sera pas fondamental; de là résulte une équation différentielle :

$$(\varphi) \qquad \varphi\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^k V}{dx^k}\right) = 0,$$

à coefficients rationnels, k étant au plus égal à $m^2 - 1$. Prenant pour V une intégrale de l'équation (E) qui ne satisfait pas à l'équation (φ), on obtiendra un système fondamental y_1, $y_2, \ldots, y_m$.

Soit V une solution quelconque de l'équation (E) qui ne satisfait pas à l'équation (φ), nous formons l'équation différentielle à coefficients rationnels de l'ordre minimum qui est satisfaite par la fonction V. Nous désignons cette équation différentielle à coefficients rationnels de l'ordre minimum, qui a pour intégrale la fonction choisie V, par

$$(g) \qquad g\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^{p_1} V}{dx^{p_1}}\right) = 0.$$

Nous pouvons supposer que l'équation (g) est algébriquement irréductible par rapport à la dérivée $\frac{d^{p_1} V}{dx^{p_1}}$ de l'ordre le plus élevé.

C'est ici que mes considérations se distinguent de vos recherches. Parmi toutes les équations (g) qui correspondent aux différentes possibilités par lesquelles on peut choisir V, vous ne considérez que les équations de l'ordre minimum et vous prenez l'une d'elles, que vous désignez par la lettre (f) :

$$f\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right) = 0.$$

D'après votre détermination on doit avoir l'inégalité $p_1 \geqq p$.

En examinant vos considérations, on voit qu'elles sont basées sur ces faits que toute solution de votre équation (f) satisfait à l'équation (E) et que toute équation différentielle à coefficients rationnels qui est satisfaite par une intégrale de (f) n'appartenant pas à (φ) le sera pour toutes les solutions de (f).

Vous savez que M. Kœnigsberger a démontré le théorème : « Si

l'on a une équation différentielle quelconque (g) à coefficients rationnels et algébriquement irréductible par rapport à la dérivée de l'ordre le plus élevé, et si une intégrale V de l'équation (g) ne satisfait pas à une équation différentielle à coefficients rationnels d'un ordre inférieur que l'équation (g), chaque équation différentielle à coefficients rationnels vérifiée par cette intégrale V le sera pour toutes les solutions de (g). » (Koenigsberger, *Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen*, p. 69; Leipzig, 1889.)

En ayant égard à ce théorème de M. Kœnigsberger, on peut employer l'équation (g) de la même manière que vous le faites à l'aide de votre équation (f) et l'on obtient tous vos résultats.

Des résultats connus sur le groupe de transformations d'une équation différentielle linéaire, on sait déjà *a priori* que les conséquences déduites des équations différentes (g) ne peuvent pas être d'une généralité plus grande que les conséquences déduites des équations (f) de l'ordre minimum parmi toutes les équations (g). On peut démontrer directement que l'ensemble des équations (f) est le même que l'ensemble des équations (g).

Soit

$$g\left(x, \mathrm{V}, \frac{d\mathrm{V}}{dx}, \ldots, \frac{d^{p_1}\mathrm{V}}{dx^{p_1}}\right) = 0$$

une équation de la forme considérée ci-dessus; nous prenons une autre équation différentielle que nous désignons par

$$(f_1) \qquad f_1\left(x, \mathrm{V}_1, \frac{d\mathrm{V}_1}{dx}, \ldots, \frac{d^p\mathrm{V}}{dx^p}\right) = 0.$$

Je suppose que l'équation (f_1) est une équation d'ordre moindre p de la manière que vous la considérez (*comparez* p. 540 de votre *Traité*). En conséquence de cela, $p \leqq p_1$.

Puisque V est une fonction linéaire des y, et celles-ci s'exprimant aussi linéairement à l'aide de V_1 et de ses dérivées, nous aurons pour V une expression linéaire par rapport à V_1 et ses dérivées. Considérons deux intégrales déterminées v et v_1 des équations (g) et (f_1), n'appartenant pas à l'équation (φ), on aura

$$v = \alpha v_1 + \beta \frac{dv_1}{dx} + \ldots,$$

α et β étant des fonctions rationnelles de x. Nous supposons encore que l'intégrale déterminée v soit une telle intégrale de l'équation (g) qui ne satisfait pas à une équation différentielle à coefficients rationnels d'un ordre moindre que l'ordre de l'équation (g). L'équation (g) a toujours une telle intégrale v, car nous avons défini l'équation (g) par cette qualité.

Soit V_1 l'intégrale générale de (f_1), nous formons l'expression

$$W = \alpha V_1 + \beta \frac{dV_1}{dx} + \ldots.$$

L'équation (f_1) étant de l'ordre p, l'expression W satisfera à une équation différentielle à coefficients rationnels d'un ordre au plus égal à p :

$$(f_2) \qquad f_2(W) = 0.$$

Les deux équations (f_2) et (g) ont l'intégrale v commune, v ne satisfait pas à une équation différentielle à coefficients rationnels d'un ordre moindre que p_1 ; c'est pourquoi l'ordre de (f_2) doit être $\geqq p_1$, mais nous avions $p \leqq p_1$. De là résulte $p = p_1$.

Par ces considérations, nous avons étendu aux équations différentielles linéaires le théorème, relatif aux équations algébriques, que vous avez donné page 443 de votre *Traité*. On voit que :

Si l'on fait abstraction des intégrales de (E) *qui satisfont à* (φ) *et que l'on forme pour chaque intégrale de* (E) *l'équation de l'ordre minimum à coefficients rationnels, vérifiée par cette intégrale, toutes ces équations sont du même ordre.*

Comme vous l'avez démontré, on passe de l'une de ces équations à l'autre par une transformation rationnelle.

CORRESPONDANCE :
A PROPOS DE LA THERMODYNAMIQUE GÉNÉRALE DE GUSTAVE ROBIN ;

LETTRE DE M. L. RAFFY.

Les lecteurs du *Bulletin* ont certainement encore présente à la mémoire l'importante étude que M. Duhem a consacrée dans ce

Recueil à la *Thermodynamique générale* de Robin. Je suis d'autant plus à l'aise pour en discuter certains passages que M. Duhem m'a traité avec une courtoisie dont je ne puis que le remercier. Mais je ne suis pas seul en cause : dans l'intérêt de la Science, j'ai enfreint les volontés de l'ami qui n'est plus et fait connaître ses idées; je suis donc doublement tenu de les défendre.

A la vérité, il y a autre chose que des discussions doctrinales dans l'opuscule de M. Duhem. On y trouve des développements historiques sur la genèse des lois fondamentales de la Science et sur la part que M. Duhem a prise à leur coordination : je n'ai point à m'occuper de ces sujets.

On y trouve aussi des revendications de priorité : la liste que M. Duhem a établie en contient quatre, auxquelles s'en ajoute une cinquième, quand l'auteur, au cours de son article, les reprend l'une après l'autre, pour les renouveler chacune en son lieu. Je ne crois point devoir en faire l'examen, d'abord parce que ces sortes de questions n'intéressent pas le progrès même de la Science ([1]), ensuite et surtout parce qu'elles ne sauraient être posées à propos de Robin. Satisfait de son fier idéal, Robin s'isolait dans les hautes retraites où les préoccupations égoïstes n'ont point accès et il professait sur l'impersonnalité de la Science des opinions très fermes, qu'il mettait en pratique : se refusant toujours à faire imprimer ses travaux, il engageait ses auditeurs à publier sous leur nom, si bon leur semblait, les vues et les résultats qu'ils emportaient de ses leçons. Mais il y a plus. Après des méditations qui avaient duré de longues années, Robin formula deux principes absolument originaux, qui n'empruntent aux *Réflexions sur la puissance motrice du feu* que les notions de cycle et de réversibilité : au premier, qui, combiné avec le principe de l'équivalence, suffit presque pour refaire, en l'élargissant, toute l'ancienne Thermodynamique, il conserva le nom de Carnot; quant à l'autre, sur lequel il fondait la science générale des équilibres de la matière, il prit soin de l'appeler *second principe de Carnot* ([2]),

---

([1]) Qu'importe, en effet, que le thermomètre normal choisi par M. Duhem, dans son *Commentaire aux principes de la Thermodynamique* qui a paru au cours de 1892, soit celui que Robin avait défini dans une leçon de février 1892, ou qu'il remonte à J. Moutier, si ce n'est à Regnault?

([2]) « Pour honorer, dit-il (p. 68), l'homme de génie que l'on a trop souvent

comme pour s'opposer à ce qu'il fût plus tard mis sous son propre nom. Qui s'étonnerait que Robin, appliquant de la sorte ses principes de détachement, ne se souciât pas d'élucider devant ses auditeurs des questions de propriété scientifique, qui n'avaient point de sens pour lui? Aussi, en dehors de quelques appellations consacrées, la *Thermodynamique générale* ne contient guère de noms propres : Sir W. Thomson, Helmholtz, Clausius même y sont à peine cités plus d'une fois. Voilà qui est péremptoire. Robin n'écrivait point l'histoire de la Science : il la faisait ([1]).

Je vais maintenant passer en revue les principales observations critiques de M. Duhem, dans l'ordre même où il les a présentées.

Aux énoncés des deux « principes de Carnot », M. Duhem conteste ce caractère d'être la généralisation par voie inductive d'un grand nombre de faits observés : il a paru inutile de viser l'universelle et quotidienne expérience des machines à feu. Quant aux vérifications de laboratoire, faut-il s'étonner que les vues, si neuves, de Robin n'aient point inspiré les expérimentateurs avant d'être publiées?

M. Duhem reproche aussi à Robin d'avoir été infidèle à l'esprit de sa méthode en introduisant le *potentiel interne,* « qui n'est pas plus accessible à l'expérience que l'énergie et l'entropie ». Voici pourtant ce qu'on lit à la page 59 de la *Thermodynamique générale :* « On pourra toujours déterminer le travail isothermique réversible à toute température et par suite le potentiel interne, grâce à des expériences d'*équilibre,* dont on n'aura qu'à relier les résultats par des graphiques ou par une formule empirique. »

Un peu plus loin, M. Duhem s'élève contre les *corps témoins* et leurs *actions de présence,* si longtemps décriés et dont l'em-

---

sacrifié à Clausius, et qui a vu mieux que personne les faits les plus importants de la Thermodynamique, ayant découvert, en dehors du principe qui porte son nom, le principe même de l'équivalence, longtemps avant que Robert Mayer le promulguât. »

([1]) Esprit éminemment créateur, Robin, alors même qu'il employait des matériaux dont la découverte était due à d'autres, ne les enchâssait dans ses constructions qu'après les avoir soumis à une longue élaboration, d'où ils sortaient transformés; tellement que, pour leur attribuer une provenance vraisemblable, il faudrait le plus souvent l'œil exercé d'un érudit, sinon même la perspicacité jalouse d'un historien.

ploi systématique, fait par Robin en mainte occasion et notamment pour réaliser, dans la mesure du possible, les transformations réversibles, est un des traits les plus originaux de sa doctrine. Les exemples rapportés dans la *Thermodynamique générale* (p. 11 à 13) sont empruntés à l'expérience journalière et hors de toute contestation. M. Duhem s'attache à une expérience de Van't Hoff, discutable, paraît-il. Mais ce qu'il en dit n'est pas pour infirmer cette vérité, bien acquise, que nombre d'actions physiques ou chimiques, qui mettent en jeu des quantités considérables de chaleur ou qui transforment d'énormes masses de matière, sont dues à des agents mécaniques ou à des corps témoins qui n'éprouvent eux-mêmes que des modifications infinitésimales. Cette prodigieuse disproportion entre la cause et l'effet n'avait, sans doute, pas échappé aux physiciens et aux chimistes ; mais ils n'en avaient, que je sache, rien conclu, tandis que Robin, en construisant sa science des équilibres et des modifications de la matière ([1]), en a tiré un parti qu'on ne pouvait prévoir et que M. Duhem semble avoir méconnu.

A propos du premier Chapitre de l'Ouvrage, M. Duhem blâme Robin d'avoir parlé de chaleur rayonnante avant d'avoir défini la quantité de chaleur; il me paraît pourtant que le feu est *logiquement* antérieur à la calorimétrie. Quant au fer rouge dans le puits de glace, s'il n'échauffe pas la glace, il la fond, sans être en contact avec elle, ce que ne ferait pas une *source* de chaleur; il exerce donc sur elle une *action*, mot que M. Duhem prend dans un sens trop étroit en lui imposant une acception mécanique.

Il est assurément fort malaisé d'entrer dans la pensée d'autrui (l'esprit y a d'autant plus de peine qu'il est plus inventif) et M. Duhem donne un nouvel exemple de cette difficulté quand il oppose à la définition du travail, posée par Robin, l'objection que voici : « Pourquoi une partie du système tomberait-elle vers le sol, dont elle n'éprouve aucune action? » Ici encore M. Duhem,

---

([1]) Je dis *sa* science, car c'est Robin qui a le premier conçu et professé, dès 1880, la possibilité de construire, comme M. Duhem l'a écrit une douzaine d'années plus tard : « une science qui embrasse dans des principes communs tous les changements d'état des corps, aussi bien les changements de lieu que les changements de qualités physiques ». Il énonçait volontiers cette idée dans ses conversations et M. Duhem, qui voyait Robin à cette époque, a dû la lui entendre exprimer.

par le mot *action,* entend une *force,* ne séparant point la chute des corps, qui est un *fait,* de l'attraction terrestre, qui est une *hypothèse.* Or, l'une des visées principales de Robin est de définir le travail de tous les systèmes possibles *par la chute des corps* et par des mesures calorimétriques. Comment, si l'on tient compte de cette idée directrice, admettre qu'un système matériel ne tombera pas vers le sol, parce qu'il aura été *isolé?* Il eût suffi, pour bien entendre le passage incriminé (p. 18), qui contient le mot *isolé* en italiques, de se reporter à l'endroit (p. 10) où il est pour la première fois question de l'*isolement* du système, obtenu au moyen d'une *enveloppe :* l'objection, qui est purement verbale, tombait d'elle-même aussitôt.

Au sujet des principes de Carnot, M. Duhem soulève une question théorique très importante : le travail, au bout d'un cycle *monothermique,* pourrait être *nul,* le cycle étant *irréversible,* contrairement aux idées de Robin. M. Duhem en donne pour exemple les mouvements sans viscosité ni frottement qu'étudie la Mécanique classique. Je ne sais si Robin a eu connaissance de la démonstration de M. Duhem, ou s'il y trouvait quelque difficulté ; mais, le résultat admis, il n'avait pas à en tenir compte, les mouvements sans viscosité ni frottement n'existant que dans la Mécanique irréelle, non dans la nature. Aussi sommes-nous d'accord avec M. Duhem pour considérer la Dynamique classique comme un *cas limite* plutôt que comme un *cas particulier* de la Thermodynamique générale.

La démonstration sur laquelle Robin fonde la Statique générale est contestée par M. Duhem. Tout le désaccord tient à ce que M. Duhem conçoit les équilibres apparents et les modifications spontanées autrement qu'ils ne sont définis dans la *Thermodynamique générale* (p. 11, 12, 14) et à ce que *tout équilibre* se confond pour lui avec ce que Robin appelle un *équilibre stable.* Quant à l'équilibre mécanique, il est aisé d'expliquer le jugement de Robin sur le théorème de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet. Qu'il faille faire intervenir la considération du mouvement pour établir qu'un équilibre est stable, M. Duhem a parfaitement raison de l'affirmer et nul ne le conteste. Mais je maintiens avec Robin qu'on ne doit pas invoquer les formules

$$(1) \qquad X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z = m\frac{d^2z}{dt^2},$$

que visent les mots « lois exactes du mouvement » et qui ne sont, d'ailleurs, *rien moins que démontrées*. En effet, les prétendues démonstrations qu'en donnent les Ouvrages classiques reposent sur une confusion entre les forces considérées en Statique et ce que la Dynamique désigne sous le même nom. Cette opinion, trop peu répandue encore en France, est nettement formulée dans la *Thermodynamique générale* (p. 245); aussi Robin pouvait-il, et pour deux raisons, rejeter la démonstration de Dirichlet, qui implique le *postulat* exprimé par les formules (1).

En ce qui concerne la propagation de l'onde explosive, je crois devoir donner raison à M. Duhem : l'analyse de Robin établit le théorème de Hugoniot, mais sans le généraliser; sa portée est restreinte par le rapprochement judicieux que fait M. Duhem et qui a certainement échappé à l'auteur, mais qui n'aurait pas dû m'échapper.

Il ne me déplaît point de finir sur cet aveu. Aussi bien l'examen approfondi que M. Duhem a fait de la *Thermodynamique générale* ne révèle pas trop de défaillances dans l'exécution de la tâche que j'ai assumée. Qu'il me soit donc permis d'ajouter que je la poursuis et que je compte publier d'abord la *Théorie des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre,* enfin les *Leçons de Chimie physique* de Robin.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WERNER BOY. — Sur la *curvatura integra* et la topologie des surfaces fermées. Dissertation inaugurale. 52 pages et 3 planches de figures. Göttingue; 1901.

La Table des matières de cette intéressante Thèse peut servir à donner une idée des sujets traités, mais non de la richesse et de l'abondance des points de vue nouveaux :

Introduction.

Chapitre I. — *De la curvatura integra des courbes et de leur déformation parfaitement continue.*

Chapitre II. — *De la curvatura integra des surfaces fermées bilatères. Courbure « équivalente ».*

1. Représentation de la curvatura integra par une intégrale.
2. Application des formules obtenues; de la déformation parfaitement continue des surfaces.
3. De la représentation des points paraboliques sur la sphère de Gauss.
4. De la courbure « équivalente ».
5. De la curvatura integra de surfaces bilatères de caractéristique k qui ont un nombre quelconque de courbes doubles.
6. Particularisation relative aux polyèdres.

Chapitre III. — *Les surfaces unilatères, leur curvatura integra et leur topologie.*

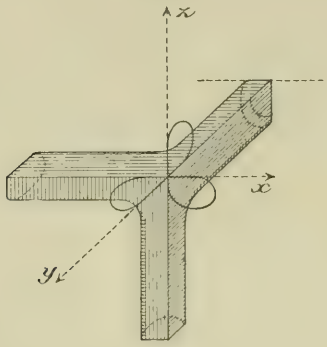
1. Les surfaces unilatères et leur curvatura integra.
2. Des diverses formes des surfaces fermées, exception faite des surfaces à caractéristique impaire et dépourvues de singularités.
3. Méthode pour la construction de surfaces dépourvues de singularités et qui ont une caractéristique donnée.
4. Les surfaces à caractéristique $k = 1$.

5. Une surface particulière à caractéristique $k = 1$. Ses rapports avec le plan de la Géométrie projective.

Voici une traduction abrégée de l'Introduction :

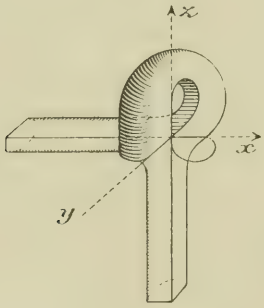
Dans le célèbre Mémoire *Disq. gen. circa sup. curvas* Gauss

Fig. 1.



désigne par les mots *curvatura integra* d'une portion finie de surface à courbure partout positive ou partout négative, l'aire de sa *représentation sphérique* (Darboux, *Théorie des Surfaces,*

Fig. 2.



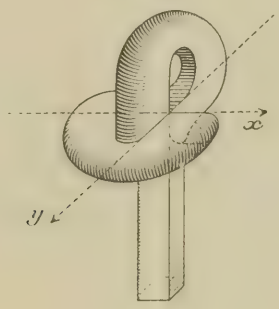
t. 1, n° 142, p. 200). Pour obtenir la curvatura integra d'une portion finie de surface quelconque, on devra décomposer la surface en parties que l'on peut représenter d'une manière univoque et réversible sur la sphère; on formera la somme algébrique des *curvatura integra* de ces parties, affectées des signes + ou —,

selon que leur courbure sera positive ou négative. L'expression analytique de la curvatura integra C est

$$C = \int k \, d\sigma,$$

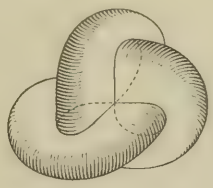
où k est la courbure [courbure totale = courbure gaussienne =

Fig. 3.



Krummungs-maas, mensura curvaturæ $= \frac{1}{R.R'}$ (*voir* Darboux, *Surfaces*, t. II, n° 497, p. 365)], où $d\sigma$ désigne l'élément superficiel et où l'intégrale doit être étendue à toute la région dont il s'agit d'évaluer la curvatura integra. Dans le n° 6 de son

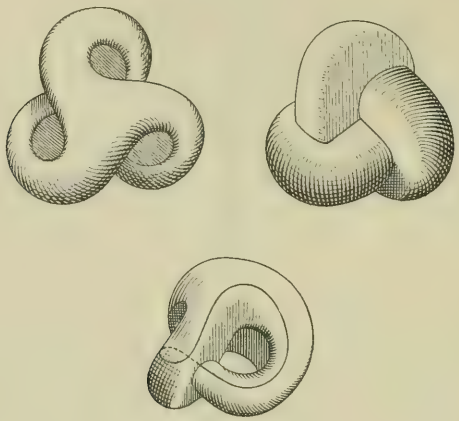
Fig. 4.



Mémoire, Gauss dit : « ... Nous nous réservons cependant de donner à une autre occasion une exposition plus étendue sur le sujet de figures conçues de la manière la plus générale. » Malheureusement Gauss n'est plus revenu sur ce sujet. Nous verrons plus loin que l'étude de la curvatura integra des surfaces *fermées*, seule étude dont nous nous occuperons, conduit directement à la considération de leur *connexion*. Ce rapport entre la connexion

et la curvatura integra a été découvert par Kronecker ([1]) et par Dyck ([2]). En effet, on a l'équation $C = (1 - p)4\pi$, p désignant le genre de la surface fermée. Il m'a semblé qu'il valait la peine de donner une nouvelle démonstration directe de ce théorème sans faire aucun usage des résultats de Kronecker et Dyck. La méthode que nous employons permet d'étendre la notion de curvatura integra aux points où la courbure gaussienne devient

Fig. 5.



infinie et par suite d'étendre le théorème aux surfaces qui possèdent des singularités.

En raison de l'analogie avec les surfaces, nous consacrerons un premier Chapitre à la *curvatura integra* des *courbes fermées* et à leurs *déformations parfaitement continues*.

Dans un deuxième Chapitre, nous démontrerons le théorème précité et nous l'étendrons. A cet effet nous introduirons la notion de *courbure équivalente*. Ici se rattache une application de nos résultats aux *polyèdres* et nous verrons qu'ils sont identiques à la célèbre proposition d'Euler et à ses diverses géné-

---

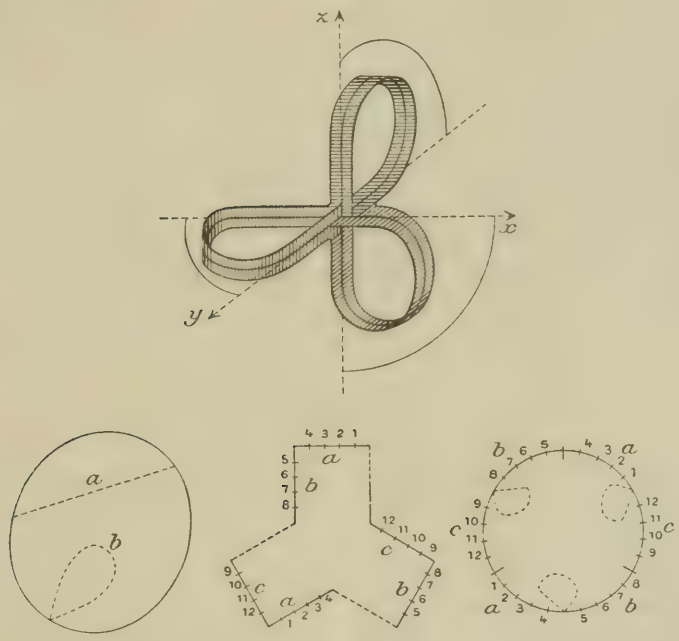
([1]) Kronecker, *Ueber Systeme von Functionen mehrerer variabeln.* Berlin. (*Monatsberichte*, Aug. 1869, p. 688.)

([2]) Dyck, *Analysis situs.* I. Abhandlg. (*Math. Annalen*, t. XXXII, 1888). Ce Mémoire fondamental à tous les titres est particulièrement riche au point de vue bibliographique. M. Boy le cite très souvent.

ralisations. Dans un troisième Chapitre, nous étendrons nos résultats aux surfaces unilatères et nous discuterons la question suivante :

Les diverses surfaces ayant un nombre donné de rétrosec-

Fig. 6.



tions ne les morcelant pas que l'on peut construire ont-elles toutes des représentants dépourvus de singularités?

Nous avons trouvé qu'à cette question l'on doit répondre par l'affirmative.

*En particulier il existe une surface dépourvue de singularités, située tout entière à distance finie, fermée, et qui au sens de l'*Analysis situs *est identique au plan de la Géométrie projective....*

Pour plus de détails nous devons renvoyer au Mémoire même de M. Boy. Contentons-nous de mentionner la surface unilatère

précitée de M. Boy. Cette surface est assez difficile à décrire sans entrer dans une foule de détails, mais les dessins ci-dessus permettront de s'en faire une idée assez claire. Un modèle de cette surface a été présenté par M. Hilbert à la Réunion des mathématiciens allemands à Hambourg, il y a peu de temps.

Cette surface présente des propriétés très intéressantes. Entre autres elle pourrait fournir une représentation *concrète* du plan elliptique, puisqu'elle peut servir à représenter le plan *projectif*. M. Boy n'entre en aucun détail sur cette question et ne parle pas de la Géométrie elliptique. Il se contente d'énoncer le théorème relatif au plan projectif et de le démontrer. Il termine en disant que la manière dont le plan projectif serait représenté sur la surface présente un grand degré d'arbitraire. Le plus simple serait, dit-il, de faire correspondre la droite de l'infini à la partie de la courbe double située sur les nappes de forme tubulaire.

L. L.

NETTO (E.). — Lehrbuch der Combinatorik (Teubner's Sammlung von Lehrbücher auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften, etc. Tome VII).

La librairie Teubner publie, en même temps que l'Encyclopédie, une série de Livres sur diverses branches des Mathématiques, qui ne laisseront pas de rendre de grands services aux étudiants. Ceux-ci, sans doute, ne les liront pas tous ; ils choisiront suivant leurs goûts, leurs aptitudes, les recherches qu'ils ont envie d'entreprendre, et se trouveront ainsi tout orientés, après un travail relativement facile, ou qui tout au moins n'a rien d'effrayant. Ils ne seront pas d'ailleurs les seuls à profiter de l'heureuse initiative de la librairie Teubner.

Le Livre de M. Netto sur la *Combinatoire* traite d'une branche des Mathématiques qui est peut-être un peu délaissée, mais qui toutefois a conservé et conservera des adeptes fervents ; car d'une part, cette *Combinatoire* se mêle à bon nombre de belles questions d'Algèbre, d'Arithmétique, d'Analyse, de Géométrie, de

Calcul des probabilités, et, d'autre part, les problèmes propres qu'on s'y propose sont d'ordinaire fort curieux, souvent amusants par leur énoncé, et parfois irritants par cela même qu'on ne sait comment les aborder; enfin, plusieurs de ces problèmes ont leur histoire, et la qualité de ceux qui s'en sont occupés ajoute à leur intérêt propre. Le Livre de M. Netto donnera sans doute satisfaction à des lecteurs très divers.

Après avoir établi les définitions et propositions fondamentales concernant les permutations, combinaisons, arrangements, les applications à la formule du binome et à ses extensions dans divers sens (Abel, Burg, etc.), ainsi que les principales propriétés de ces développements, l'auteur traite, dans une suite de six Chapitres, un grand nombre de questions qui se déduisent des problèmes fondamentaux en imposant quelque condition que doivent vérifier les arrangements ou les combinaisons. Le lecteur sera certainement satisfait de savoir qu'il y a précisément 3312 manières d'arranger les mots dans le vers du jésuite B. Bauhusius :

Tot tibi sunt dotes, Virgo, quot sidera cœlo

sans que les lois de la métrique soient violées (sauf celle qui concerne la césure). Beaucoup de gens s'y sont trompés.

Citons encore le problème des huit reines sur l'échiquier, dont aucune ne doit menacer les autres, et diverses questions analogues entre elles, qui ne sont pas sans intérêt mathématique, dont la plus simple est celle d'Euler :

Combien y a-t-il de permutations des nombres 1, 2, 3,... n dans lesquelles aucun de ces nombres n'est à sa place?

Quelque mauvais plaisant en appliquera peut-être la solution à la recherche de la probabilité pour qu'aucun candidat, à la suite d'un concours, ne soit placé à la place qu'il devrait occuper, On peut compliquer ce problème en supposant qu'il y ait plusieurs séries d'épreuves. Le compte des termes d'un déterminant qui satisfont à telles ou telles conditions fournit des problèmes du même genre. L'étude des inversions, et surtout celle des séquences, que M. D. André a poussée fort loin, est l'objet d'un intéressant Chapitre.

Lorsque les objets que l'on combine ou que l'on arrange sont des nombres, on peut se proposer de ne conserver que ceux des arrangements ou des combinaisons dont les éléments forment une somme donnée. De là, relativement à ces combinaisons elles-mêmes, ou à leur nombre, une suite de problèmes dont il suffit d'indiquer l'origine. Euler a montré comment on pouvait former la fonction génératrice qui fournit, comme coefficients, ces nombres de combinaisons (avec ou sans répétition) pour une somme prescrite. Nous entrons ici dans le problème de la partition des nombres. M. Netto expose les recherches de Sylvester sur la détermination du coefficient de x^n dans le développement suivant les puissances ascendantes de x de l'expression

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)\ldots},$$

coefficient dont la signification arithmétique est bien connue depuis Euler. Plusieurs questions, relatives à la partition des nombres, peuvent se traiter simplement par la considération de diagrammes de points; un Chapitre est consacré aux solutions de cette espèce. Enfin, en supposant toujours que les objets que l'on combine sont des nombres, on peut regarder une combinaison comme un produit et la considération des sommes de produits ainsi obtenus offre un nouveau champ de recherches.

Deux Chapitres sont consacrés aux systèmes de ternes et à des systèmes analogues; c'est d'abord le problème de Steiner, qui s'introduit dans l'étude des tangentes doubles des courbes du quatrième degré. Voici en quoi il consiste :

On donne n objets : peut-on les arranger par ternes (trois par trois) de manière que deux objets quelconques figurent dans un terne et seulement dans un? Un tel groupement constituera un système de ternes.

Si par exemple les objets sont les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, on trouve le système suivant de ternes qui répond à la question

123, 145, 167, 246, 257, 347, 356;

en dehors de ce système de ternes, il reste (sur les 35 combinaisons de 7 objets pris 3 à 3) 28 *ternes libres*.

Peut-on arranger les n objets par quaternes de manière qu'un

terne libre (en donnant à ce mot le sens de l'exemple précédent) figure dans un quaterne et dans un seul, sans que jamais trois éléments d'un quaterne ne constitue un des ternes du système primitif?

La question se continue en groupant maintenant les objets cinq par cinq, etc. : elle a été l'objet de travaux assez étendus.

Il est aisé de montrer que, pour l'existence d'un système de ternes, le nombre n doit être de l'une des formes $6\,N + 1$, $6\,N + 3$: l'existence d'un groupement en quaternes, tel qu'on l'a décrit plus haut, n'implique aucune condition nouvelle. Dans l'exemple précédent, on aurait le système de quaternes que voici :

1247, 1256, 1346, 1357, 2335, 2367, 4567.

Il n'y a pas pour ce même exemple de *quaternes libres,* c'est-à-dire de quaterne qui n'appartienne pas au système précédent et ne contienne aucun terne du système de ternes. Il n'y a pas lieu de chercher ici de groupements plus élevés. M. Reiss et M. H. Moore ont donné des constructions du système de ternes d'un nombre de la forme $6\,N + 1$ ou $6\,N + 3$. M. Netto a résolu lui-même la question par d'intéressantes considérations empruntées à la théorie des nombres. La construction donnée par M. Hefter complète sur un point celle de M. Netto.

Voici maintenant le problème de Kirkman :

Si l'on considère un système de ternes formé avec $6n + 3$ objets il contiendra évidemment $(2\,n + 1)(3\,n + 1)$ ternes : on demande de partager ces ternes en $3\,n + 1$ groupes de $2\,n + 1$ ternes, de façon que dans chaque groupe figurent les $6\,n + 3$ objets. On peut, dans le cas de $n = 2$, enjoliver la question en l'appliquant à quinze jeunes filles, pensionnaires du même établissement, qui vont, tous les jours de la semaine, se promener trois par trois, formant ainsi chaque jour un groupe différent de cinq ternes du système. Au bout de la semaine, chaque jeune fille a figuré dans un terne avec chacune de ses compagnes. C'est le problème des quinze écolières.

Dans l'avant-dernier Chapitre de son Livre, M. Netto passe en

revue les principales applications de la *Combinatoire*. Dans le dernier, enfin, il a rassemblé un grand nombre de formules relatives aux coefficients binomiaux.

ZOLL (Otto). — Ueber Flächen mit Scharen von geschlossenen geodätischen Linien. Inaugural Dissertation und zugleich von der philosophischen Facultät der Universität Göttingen, gekrönte Preisschrift. 45 pages. 1901.

L'Université de Göttingue avait proposé comme sujet de prix pour l'année 1901 la question suivante : « *Déterminer et étudier les surfaces sur lesquelles existe un réseau de lignes géodésiques fermées*. Dans le traitement de ce problème, on tiendra compte de la relation de la théorie des lignes géodésiques avec la dynamique du point. (*Voir* en particulier les remarques de M. Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. II, n° 547.) »

On sait de quelle importance est en Mathématiques pures et appliquées la théorie des équations différentielles qui possèdent des solutions périodiques. Les travaux de M. Poincaré sur ce sujet, dans ses recherches sur le problème des trois corps, ont encore accentué cette importance. Dans son Ouvrage célèbre *Sur les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, M. Poincaré se sert de ces mots bien remarquables pour caractériser les solutions périodiques : « C'est la seule brèche par laquelle nous puissions pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable. »

Or, le problème posé par la Faculté de Göttingue conduit précisément à certaines équations différentielles qui doivent posséder des solutions périodiques. En Mécanique, une ligne géodésique est définie comme la trajectoire d'un point qui, n'étant soumis à aucune force extérieure, se meut avec une vitesse constante sur une surface. Si la ligne géodésique doit se fermer il faut qu'après un certain temps T le point revienne à sa position initiale et parcourre de nouveau la même trajectoire. Quant à la surface sur laquelle se trouve la ligne géodésique on suppose qu'elle se com-

porte d'une manière régulière, au moins dans le voisinage des points où la géodésique suit son cours. Il s'ensuit que la géodésique elle-même est partout régulière et n'a pas de points saillants anguleux, car il n'existe qu'une géodésique passant par un point, dans une direction déterminée. Si l'on donne aux équations de la courbe la représentation paramétrique

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \chi(t),$$

le temps étant pris comme paramètre, φ, ψ, χ, et leurs dérivées jusqu'à un certain ordre, seront des fonctions continues. La condition de fermeture de la ligne géodésique s'exprime analytiquement en disant que φ, ψ, χ sont des fonctions périodiques ayant la même période T.

Inspiré par les travaux de M. Poincaré, M. Hadamard a fait des recherches du plus grand intérêt sur les trajectoires d'un point et a été conduit en particulier à s'occuper de la fermeture des lignes géodésiques. Dans le remarquable Mémoire *Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique,* M. Hadamard démontre que, sur une surface à courbure gaussienne toujours positive, deux lignes géodésiques fermées se coupent nécessairement. Quant aux surfaces à courbure partout négative, l'éminent géomètre obtient aussi des résultats très élégants. Au moyen de considérations tirées de l'*Analysis situs,* il démontre que sur toute surface de cette nature il existe des géodésiques fermées et que, pour chacune de ces dernières, il existe une ligne géodésique qui s'en rapproche asymptotiquement. [*Voir* Hadamard, *Les surfaces à courbures opposées* (*Journal de Liouville,* 1898).] Ces belles recherches de M. Hadamard sont d'un caractère très général. Devant répondre à une question particulière, les recherches exposées par M. Zoll dans le Mémoire couronné par la Faculté de Göttingue sont nécessairement plus spéciales.

Ce très remarquable Travail renferme toute une série d'importants et nouveaux résultats. Écrit dans un style clair et facile à lire il présente ce cachet d'élégance et de rigueur que l'on est en droit d'attendre d'un disciple de M. Hilbert. La forme n'en est pas moins attrayante que le fond. Après avoir rapidement décrit les points de vue et les méthodes servant à obtenir les surfaces possédant un réseau de lignes géodésiques fermées, l'auteur étudie

dans la première Partie de son Mémoire les classes spéciales de surfaces ayant la propriété requise, à savoir : les surfaces-canal qui sont les surfaces les plus générales ayant un réseau de lignes géodésiques fermées planes, puis les surfaces hélicoïdales et les surfaces de révolution. Cette première Partie renferme aussi un grand nombre d'intéressants théorèmes dont nous nous bornerons à citer le suivant :

Sur une surface à courbure gaussienne partout négative il n'existe aucun réseau de lignes géodésiques fermées.

Ce théorème, démontré par M. Zoll, permet d'exclure de suite de la recherche le groupe si étendu des surfaces minima et des surfaces réglées.

Dans la seconde Partie, M. Zoll s'occupe surtout des surfaces sur lesquelles *toutes* les géodésiques sont fermées. Ici, comme dans la plupart des questions relatives à la théorie des surfaces, il faut toujours revenir à l'Ouvrage classique de M. Darboux : *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*. On sait que l'éminent géomètre y a exposé une méthode pour construire de telles surfaces, mais cette méthode fournit toujours des surfaces qui ont un contour (t. II, n° 347, *loc. cit.*) Or, et c'est là le résultat capital de son Mémoire, M. Zoll est parvenu à construire une infinité de surfaces fermées, dépourvues de singularités, situées à distance finie, dont les lignes géodésiques sont toutes fermées, *et qui cependant ne sont* pas des *sphères*. M. Tannery, s'inspirant des recherches de M. Darboux, avait découvert une surface de révolution en forme de poire sur laquelle toutes les lignes géodésiques sont non seulement fermées mais encore algébriques. La collection de M. Brill en renferme un modèle. Mais cette surface ne répond pas tout à fait à la question, car elle possède un point nodal. La surface découverte par M. Zoll, au contraire, n'a aucun point singulier et résout donc le problème. Elle est également de révolution et piriforme. Le manque d'espace nous interdit d'entrer en plus de détails sur cet intéressant type de surfaces et sur leurs expressions analytiques. Maintenant, existe-t-il des surfaces jouissant de la propriété requise sans être de révolution? M. Zoll répond par l'affirmative, mais il ajoute

que l'expression analytique de ces surfaces serait très difficile à trouver.

Dans la conclusion, l'auteur expose des généralisations intéressantes. Entre autres propositions, il démontre, pour terminer, cet intéressant théorème :

La sphère est la seule surface dépourvue de singularités sur laquelle toutes les lignes à courbure géodésique constante soient fermées.

La Table des matières donnera une idée précise de la disposition de ce Mémoire dont on ne saurait trop recommander la lecture à ceux qu'intéresse la théorie des surfaces.

Introduction.

Partie I. — *Surfaces ayant un réseau de géodésiques fermées.*

1. Lignes géodésiques infiniment voisines.
2. Méthode générale pour trouver les surfaces ayant un réseau de géodésiques fermées.
3. Lignes géodésiques planes.
4. Hélicoïdes.
5. Surfaces de révolution.

Partie II. — *Surfaces dont les géodésiques sont toutes fermées.*

6. Méthode générale pour trouver les surfaces précitées.
7. Surfaces de révolution dépourvues de singularités et répondant à la question.
8. Propriétés des surfaces dont les géodésiques sont toutes fermées.

Conclusion. — Généralités.

L. Laugel.

MÉLANGES.

SUR LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT DES SURFACES MINIMA;

PAR M. H. LEBESGUE.

Je me propose de rechercher les transformations de contact qui font correspondre à *toute* surface minima une surface minima.

1. Soit une multiplicité M_1 d'éléments de contact dont les points forment une courbe c et dont les plans enveloppent une développable Δ. Si c est minima et si Δ est un cylindre de génératrices isotropes, et dans ce cas seulement ([1]), il existe une infinité de surfaces minima contenant les éléments de contacts donnés, M_1 est alors une multiplicité caractéristique. L'ensemble de ces multiplicités caractéristiques n'est pas altéré par les transformations cherchées.

Deux éléments de contact dont les plans ont une direction isotrope commune, et deux tels plans seulement, peuvent être considérés comme faisant partie de la même caractéristique; donc ils doivent être transformés en éléments de même nature. Par suite, à deux éléments dont les plans sont parallèles correspondent deux éléments parallèles. A un plan correspond donc une surface dont tous les plans tangents sont parallèles, c'est-à-dire un plan; *la transformation cherchée est tangentielle.*

Deux cylindres isotropes qui se déduisent l'un de l'autre par une translation pouvant être, et eux seuls parmi les cylindres de même direction, considérés comme circonscrits à la même surface minima le long de deux courbes minima du même système, ont pour transformés des cylindres jouissant de la même propriété.

([1]) Il y a exception si, c étant minima, Δ est circonscrite au cercle de l'infini; mais il n'existe qu'une de ces courbes minima par surface minima, et c'est une arête de rebroussement (DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. I, note p. 396).

Donc à un cylindre minima périodique correspond un cylindre périodique et par suite à une surface minima périodique correspond une surface de même nature.

Soient P, Q, R, ... des plans, P′, Q′, R′, ... ceux qu'on déduit par une translation λ. On peut construire une surface minima périodique non altérée par la même translation λ et tangente à tous ces plans; donc les transformés de P′, Q′, R′, ... se déduisent par une translation des transformés de P, Q, R, ... *A une translation correspond une translation.*

2. Soit le plan

$$(1 - uu_1)x + i(1 + uu_1)y + (u + u_1)z + \xi = 0,$$

où, en posant

$$x + iy = X, \qquad x - iy = Y, \qquad z = Z,$$
$$X - uu_1 Y + (u + u_1)Z + \xi = 0,$$

et soit

$$X' - vv_1 Y' + (v + v_1)Z' + \xi' = 0$$

son transformé. A tout point du cercle à l'infini correspond un autre point du même cercle; donc on peut supposer v fonction de u, v_1 de u_1. On pourrait même supposer ces deux fonctions identiques en tenant compte des développables circonscrites au cercle de l'infini, c'est-à-dire des solutions données par l'intégrale intermédiaire singulière, mais cela est inutile.

Si, à la translation α, β, γ, correspond la translation α', β', γ', on aura, en supposant $\xi' = f(u, u_1, \xi)$,

$$\xi' - \alpha' + vv_1\beta' - (v + v_1)\gamma' = f[u, u_1, \xi - \alpha + uu_1\beta - (u + u_1)\gamma].$$

La dérivée du premier membre par rapport à ξ étant indépendante de α', β', γ', donc de α, β, γ, il en doit être de même de celle du second membre, c'est-à-dire que ξ' est fonction linéaire de ξ,

$$\xi' = \varphi(u, u_1) + f_1(u, u_1)\xi.$$

En tenant compte de cette relation, l'équation précédente se réduit à

$$(1) \quad -\alpha' + vv_1\beta' - (v + v_1)\gamma' = f_1(u, u_1)[-\alpha + uu_1\beta - \gamma(u + u_1)].$$

Écrivons que les dérivées secondes du premier membre, par rapport à α, β, γ sont nulles, on a

$$\frac{\partial^2 \alpha'}{\partial \partial} - v v_1 \frac{\partial^2 \beta'}{\partial \partial} + (v + v_1) \frac{\partial^2 \gamma'}{\partial \partial} = 0,$$

quels que soient v et v_1, ou $v v_1$ et $v + v_1$; donc α', β', γ' sont des fonctions linéaires de α, β, γ.

A une translation isotrope correspond une translation isotrope; à deux translations isotropes de directions différentes correspondent des translations de directions différentes. A condition, peut-être, de prendre des axes imaginaires, mais des axes x', y', z' non isotropes, on peut donc supposer

$$\alpha' = a\alpha, \qquad \beta' = b\beta, \qquad \gamma' = a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma.$$

En écrivant que $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$ et $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ s'annulent à la fois, on a

$$a_1 = b_1 = 0, \qquad \pm a = \pm b = c_1 \text{ (1)}.$$

Dans tous les cas, après une transformation homothétique et peut-être le changement du sens de l'un des axes X, Y, Z, on a

$$\alpha' = \alpha, \qquad \beta' = \beta, \qquad \gamma' = \gamma;$$

donc, d'après l'équation (1),

$$f_1 = 1, \qquad u = v, \qquad u_1 = v_1,$$

et par suite

$$\xi' = \varphi(u, u_1) + \xi. \tag{2}$$

3. Pour que le plan considéré soit tangent à une surface minima il faut que l'on ait (2)

$$\xi = 2f(u) + 2f_1(u_1) - (u - u_1)[f'(u) - f'(u_1)]. \tag{3}$$

Mais ξ' devant être de même forme, $\varphi(u, u_1)$ ou $\xi' - \xi$ sera aussi

---

(1) Ce résultat s'obtient immédiatement en remarquant que les seules transformations homographiques du plan de l'infini qui n'altèrent pas le cercle isotrope sont celles qui résultent des déplacements et des symétries.

(2) Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. I, p. 356.

de même forme, c'est-à-dire sera le ξ d'une certaine surface minima.

La transformation la plus générale est donc trouvée. Pour obtenir un énoncé géométrique simple, remarquons qu'avant d'effectuer la transformation précédente nous faisons subir aux surfaces minima données une transformation par figures semblables; si nous effectuons de plus une homothétie de rapport 2, on aura à la place de (2)

$$\xi' = \tfrac{1}{2}(\xi_0 + \xi),$$

ξ_0 étant relatif à une surface minima Σ_0. Donc, *à une transformation par figures semblables près, on obtient ainsi la transformation cherchée : une surface minima* Σ_0 *étant arbitrairement choisie, on fait correspondre au plan* P *le plan* P′ *parallèle à* P *équidistant de* P *et du plan* π *tangent à* Σ_0 *parallèlement à* P.

Dans cet énoncé, il faut entendre par surface minima l'enveloppe des plans définis par une équation de la forme (3); mais $f(u)$ ou $f_1(u_1)$ pouvant se réduire à zéro, une telle équation peut définir une courbe minima [1]. Le cas où, Σ_0 étant une courbe minima, on applique la transformation à une courbe minima montre que nous avons obtenu une généralisation simple de la génération des surfaces minima que Sophus Lie a déduite des formules de Monge.

A l'aide de la formule (3) une surface minima est définie par deux fonctions f, f_1; soient f_0, $f_{1,0}$ les fonctions définissant Σ_0. Comme ces fonctions sont en général multiformes et différentes l'une de l'autre, la transformation obtenue n'est pas univoque. Si on l'applique à la surface Σ relative aux fonctions f, f_1, on obtient deux surfaces analytiquement distinctes relatives à

$$\tfrac{1}{2}(f + f_0),\quad \tfrac{1}{2}(f_1 + f_{1,0}) \qquad \text{et} \qquad \tfrac{1}{2}(f + f_{1,0}),\quad \tfrac{1}{2}(f_1 + f_0).$$

---

[1] Cette extension donnée aux mots *surface minima* correspond à l'extension du sens du mot *intégrale* que M. Goursat développe à la page 49 du Tome I de ses *Leçons sur l'Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.*

Pour que ces deux surfaces se réduisent à une, quelle que soit Σ, il faut et il suffit que Σ_0 soit une surface double.

4. La transformation trouvée est une conséquence de ce que ξ est linéaire par rapport aux fonctions f, f_1 et leurs dérivées. On déduit de là des transformations différentes, en apparence seulement, de celle déjà trouvée; elles expriment toutes ce fait : une somme algébrique de ξ relatifs à des surfaces minima, est le ξ d'une surface minima. Voici l'un de ces énoncés : soient S, Σ, Σ' trois surfaces minima, P, Π, Π' trois plans tangents parallèles à ces trois surfaces; la translation qui amène Π en P transforme Π' en P$'$, P$'$ enveloppe une surface minima. Si Σ se réduit à un point, on a l'interprétation de la transformation trouvée, sous sa forme primitive ($\xi' = \varphi + \xi$).

Soient des surfaces minima affectées de coefficients quelconques. Si l'on établit entre ces surfaces une correspondance par plans tangents parallèles, le centre des distances proportionnelles des points de contact décrit une surface minima [1].

5. La transformation trouvée peut encore être rattachée à cette propriété : soient deux surfaces S, S$'$ entre lesquelles est établie une correspondance par plans tangents parallèles, et Σ le lieu des milieux des points correspondants. En un point de Σ la somme des rayons de courbure principaux est la demi-somme des quantités analogues relatives aux points correspondants de S et S$'$.

Cela se démontre très facilement par la géométrie, et résulte immédiatement de la formule (27), p. 245, du Tome I de l'Ouvrage cité de M. Darboux. La transformation du n° 3 fait donc correspondre à toute surface parallèle à une surface minima une surface de même nature; et il en serait encore de même si Σ_0 était une surface parallèle à une surface minima. Je dis que *la transformation ainsi définie est la transformation de contact la plus*

[1] Ces transformations ne sont pas nouvelles; M. Goursat les a signalées comme pouvant servir à la détermination des surfaces minima ayant les mêmes plans de symétrie qu'un polyèdre régulier.

générale qui fait correspondre, à toute surface parallèle à une surface minima, une surface de même nature; une transformation par figures semblables ayant été préalablement effectuée.

Lorsqu'on se donne une courbe c et une développable Δ contenant c, il existe deux surfaces et deux seulement, tangentes à Δ le long de c et telles que la somme (positive) des rayons de courbure ait une valeur donnée λ; cela est évident puisqu'il suffit de déplacer chacun des éléments de contact, définis par (c, Δ), de façon que le plan soit parallèle à lui-même et que le point décrive une longueur λ sur la perpendiculaire au plan, pour obtenir une nouvelle courbe c_1, une nouvelle développable Δ_1 qui définissent une surface minima parallèle à la surface cherchée. On voit de plus que si, pour une certaine valeur λ_0 de λ, c_1 est minima, Δ_1 étant un cylindre isotrope, il y a une infinité de surfaces relatives à λ_0 tangentes à Δ le long de c, et aucune pour λ différente de λ_0. On pourrait raisonner à partir de ces multiplicités particulières (c, Δ) comme nous l'avons fait dans le cas des surfaces minima à partir des multiplicités caractéristiques, mais il est plus simple de raisonner ainsi.

Par tout point d'une surface parallèle à une surface minima passent deux de ces multiplicités singulières, puisqu'elles correspondent aux caractéristiques de la surface minima parallèle. Si nous considérons deux surfaces S, S′ relatives à la même valeur de λ, il est possible de construire une troisième surface Σ de la même famille tangente à S et à S′ le long de multiplicités singulières. Or l'ensemble de ces multiplicités est conservé par la transformation cherchée; donc par la transformation à deux surfaces relatives à la même valeur de λ correspondent deux surfaces relatives à une même valeur de λ, $\varphi(\lambda)$.

Ceci posé, à tous les éléments de contact faisons subir, comme il a été dit, un déplacement $\varphi(0)$ dans un sens convenable. Si ce déplacement est effectué sur l'espace après la transformation que nous cherchons, toutes les surfaces minima ont pour homologues des surfaces minima. La transformation totale est donc obtenue par une transformation par figures semblables, puis par la transformation du n° 3 relative à une certaine surface Σ_0. Mais il est évident que, pour effectuer en sens inverse le déplacement qui

nous a été utile, il suffit de remplacer, dans l'énoncé du n° 3, la surface Σ_0 par l'une, convenablement choisie, des deux surfaces parallèles à Σ_0 et relatives à la valeur $2\varphi(0)$ de λ.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Büttner (F.). — *Studien über die Green'sche Abhandlung : Mathematical investigations concerning the laws of the equilibrium of fluids* (1832). In-8°, v-98 p. Leipzig, Teubner. 6 m. 40 pf.

(Preisschriften der fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig.)

Dirichlet (L.). — *Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- u. Cosinusreihen* (1837). — Seidel (Ph.-L.). *Nota über die Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen* (1847). Herausgeg. von H. Liebmann. In-8°, 58 p. Leipzig, Engelmann. Cart. 1 m.

(Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. N° 116.)

Hagen (J.-G.). — *Atlas stellarum variabilium. Series III, complectens variabiles intra limites declinationis* $+25°$ *et* $+90°$, *quarum lux minima est infra magnitudinem* 10^M. Gr. in-4°, 37 planches avec 37 p. d'explications et v p. texte. Berlin, Dames. Atlas relié. Prix de souscription, 37 m.; prix de détail, 44 m. 40 pf.

Lüroth (J.). — *Vorlesungen über numerisches Rechnen.* Gr. in-8°, vi-194 p. avec 14 fig. Leipzig, Teubner. 8 m.

Scheffers (G.). — *Anwendung der Differential- u. Integral-Rechnung auf Geometrie.* 1 Bd. Einführung in die Theorie der Curven in der Ebene u. im Raume. Gr. in-8°, x-366 p. avec fig. Leipzig, Veit et Cie. 10 m.; relié, 11 m.

1re partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FESTSCHRIFT ZUR FEIER DES HUNDERTFÜNFZIGJÄHRIGEN BESTEHENS DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN. BEITRÄGE ZUR GELEHRTENGESCHICHTE GÖTTINGENS. Mit einem Titelbilde und 13 Tafeln. 1 vol. in-8°, 688 pages. Berlin, Weidmann, 1901.

Ce beau Volume, orné d'un assez grand nombre de portraits, renferme d'intéressants documents historiques relatifs à divers membres de la Société royale des Sciences de Gœttingue. Deux de ces documents, d'une nature fort différente, mais très intéressants l'un et l'autre, se rapportent à Gauss.

L'un n'est autre qu'une sorte de carnet, un *Notizenjournal* suivant l'expression de Gauss lui-même, où celui-ci a noté, en quelques mots très brefs, au jour le jour, ses recherches et ses découvertes mathématiques de 1796 à 1814. C'est un pauvre cahier de dix-neuf pages, inappréciable pour l'histoire de la pensée du grand géomètre.

Il avait été pieusement conservé par la famille de celui-ci et a été communiqué en 1898 à M. Stäckel, en vue de l'édition des Œuvres complètes. La publication (1) a été faite avec tout le soin désirable; quelques notes donnent les explications et renvois bibliographiques indispensables; le texte a dû être quelquefois complété, afin qu'il fût clair; les compléments ont été mis entre crochets. Enfin une page a été reproduite en fac-similé; nous en donnons ci-dessous le texte, qui suffira pour que le lecteur prenne l'idée de l'intérêt qui s'attache à ces quelques feuilles : cette page se rapporte aux années 1798-1799 :

De lemniscata elegantissima omnes expectationes superantia acquisivimus et quidem per methodos quæ campum prorsus novum nobis aperiunt.

Gott. Jul.

Solutio problematis ballistici.

Gott. Jul.

(1) Il en a été fait un tirage à part.

Cometarum theoriam perfectiorem reddidi.

Gott. Jul.

Novus in analysi campus se nobis aperuit scilicet investigatio functionum, etc.

Oct.?

Formas superiores considerare cœpimus.

Br. Febr. 14.

Formulas novas exactas pro parallaxi eruimus.

Br. Apr. 8.

Terminum medium arithmetico-geometricum inter 1 et $\sqrt{2}$ esse $= \frac{\pi}{\omega}$ usque ad figuram undecimam comprobavimus, quare demonsrata prorsus novus campus in analysi certo aperietur.

Br. mai 30.

In principiis Geometriæ egregios progressus fecimus.

Br. sept.

Circa terminos medios arithmetico-geometricos multa nova deteximus.

Br. not.

De l'examen attentif des passages qui concernent la théorie des fonctions elliptiques et de leurs dates, M. Klein tire cette induction : Le point de départ de Gauss n'est pas, comme on l'a cru d'après Schering, la théorie de la moyenne arithmético-géométrique, mais bien l'étude des fonctions lemniscatiennes. Il était en possession dès 1898 des fonctions ϑ pour le cas de la lemniscate, qui lui permettent en 1899 de résoudre, pour ce cas, le problème de la moyenne arithmético-géométrique. Il reconnaît, dans cette même année, la généralité de la méthode et est amené, par là même, à l'étude des fonctions elliptiques, dans le cas général.

On lira aussi avec un vif intérêt les souvenirs de M. R. Dedekind relatifs aux leçons de Gauss sur la méthode des moindres carrés. Ces souvenirs sont singulièrement nets : l'admiration pour le grand homme, la joie de l'apercevoir de loin, l'émotion de la première visite, la mauvaise humeur de Gauss quand on lui parle de faire son cours, le cabinet de travail et l'antichambre, la table où les neuf auditeurs n'arrivaient pas à se caser, la voix, l'attitude, la prononciation populaire et la belle écriture du savant, tout cela s'est imprimé dans le cerveau du jeune homme, en 1840,

et aujourd'hui le maître vénéré nous rend ses impressions avec une fraîcheur charmante et un relief saisissant. M. Dedekind a fait plus encore : en fouillant ses notes et ses souvenirs, il est parvenu à résumer de la façon la plus intéressante la première partie des *Leçons* de Gauss, une sorte d'introduction élémentaire et pratique, moins connue que l'exposition plus savante, fondée sur la théorie des probabilités.

Deux portraits figurent dans cette publication. Dans l'un, Gauss a vingt-six ans; les traits sont pleins, les cheveux sont épais et bouclés; dans l'autre, que la lithographie a rendu plus populaire, les jolies boucles sont remplacées par une calotte noire, d'où s'échappent quelques mèches grises; la pensée et l'âge ont creusé les traits; le front s'est éclairci et s'est bombé; la bouche a gardé sa finesse et les yeux leur vivacité.

Les documents biographiques sur Gauss auront leur place dans le Tome X de ses Œuvres, dont le Tome VIII vient de paraître. On peut avoir pleine confiance dans ceux qui s'occupent de parfaire et de terminer le monument élevé à la gloire du grand mathématicien. Est-ce ici le lieu, à propos de ces documents, de rappeler cette correspondance entre Gauss et Bolyai, que l'on a récemment éditée (1) avec luxe, qui nous fait pénétrer dans l'intimité de ces deux hommes, qui est pleine de traits touchants, comiques, admirables? Le lecteur connaît, par la traduction qu'a donnée M. Laugel du travail de MM. L. Stäckel et Engel (2), le rôle de Gauss et des Bolyai dans l'établissement des fondements de la Géométrie. Mais on ne saurait trop lui recommander, s'il veut passer quelques heures délectables, de lire toutes ces lettres, de savourer les anecdotes, les portraits, les rendez-vous, les pipes que chacun, à de certains jours et de certaines heures, fume en pensant à son ami, les malheurs arrivés aux barriques de vin, la placidité de Gauss, l'enthousiasme et le lyrisme débordant de Bolyai....

---

(1) *Bolyai Farkas és Gauss Frigyes Karoly Levelese;* in-4°. Budapest, Kiadja a Magyar Tud. Akademia, 1899.

(2) *Bulletin*, 2e série, t. XXI, p. 206.

VIVANTI (G.). — Teoria delle Funzioni analitiche. 1 vol. in-16; VIII-431 pages (de la collection des Manuels Hoepli). Milan, Hoepli; 1901.

Ce petit Volume, que le nom de son auteur recommande suffisamment, contient une Introduction où sont résumées les principales propriétés des ensembles; le reste est un exposé clair et concis des propositions essentielles de la théorie des fonctions analytiques. La grande concision est une condition nécessitée par le format : tous ceux qui veulent collaborer à cette collection si intéressante et si utile de Manuels que publie la maison Hoepli ont dû s'efforcer de la pousser aussi loin que possible. Dans certains de ces Manuels les démonstrations ont dû être supprimées; ce n'est pas le cas ici. L'exposition est faite dans le sens de Weierstrass, c'est-à-dire en prenant pour unique point de départ la théorie des séries procédant suivant les puissances entières de la variable : s'il est question de dérivées et d'intégrales, c'est de dérivées et d'intégrales de telles séries, qui peuvent être définies d'une façon purement formelle. L'intégrale prise entre des limites imaginaires ne joue aucun rôle.

L'Introduction contient d'abord les notions, définitions et propositions fondamentales de la théorie des ensembles. Elle présuppose la notion de nombre; elle est faite d'ailleurs avec un grand souci de la rigueur logique : ainsi l'auteur s'arrête sur la distinction entre le fini et l'infini et ne craint pas de démontrer qu'un ensemble contenu dans un ensemble fini est fini. Il développe les notions les plus importantes concernant les nombres transfinis et applique ces notions à certains points de la théorie des ensembles de points.

Immédiatement après la notion de cercle de convergence d'une série de puissances entières, M. Vivanti introduit la notion de valeur moyenne d'une fonction sur une circonférence de cercle, ainsi qu'a fait M. Pringsheim, en vue de la démonstration du théorème du commandant Laurent. Cette notion permet, comme on sait, d'éviter, dans plusieurs cas, la notion d'intégrale curviligne, dont elle est d'ailleurs très voisine. Puis viennent les notions de dérivation et d'intégration d'une série de puissances entières,

au sens qui a été spécifié plus haut, le prolongement analytique, la définition d'une fonction analytique, déduite d'un de ses éléments, dans toute sa généralité, la distinction entre les points singuliers, le théorème de Laurent démontré comme a fait M. Pringsheim, le théorème dû à Casorati et retrouvé par Weierstrass sur la façon dont se comporte une fonction dans le voisinage d'un point singulier essentiel qui n'est pas la limite d'un ensemble de points singuliers essentiels : on doit à M. Vivanti lui-même des remarques intéressantes sur ce sujet.

Après quelques indications concernant les séries de fonctions rationnelles (expressions arithmétiques), et sur le plan d'une étude systématique des fonctions analytiques, l'auteur développe les recherches de Weierstrass sur l'expression d'une fonction entière comme produit de facteurs primaires (avec application aux fonctions $\sin x$, σx), les principales propositions qui se rapportent à la notion de genre, les recherches de M. Mittag-Leffler sur la représentation d'une fonction uniforme avec une infinité de points singuliers.

Pour ce qui est des recherches plus récentes de MM. Poincaré, Hadamard, Borel sur les fonctions entières, recherches où intervient notamment la rapidité plus ou moins grande avec laquelle augmente le maximum de la valeur absolue de la fonction quand la valeur absolue de x augmente indéfiniment, M. Vivanti ne pouvait ni les passer sous silence, ni les développer, avec leurs démonstrations, sans sortir du cadre qu'il s'était tracé. Il a dû se borner à rapporter les définitions et les résultats les plus importants. Il analyse aussi rapidement les résultats obtenus par MM. Runge, Painlevé, Hilbert sur la représentation des fonctions analytiques, donne avec quelques détails le théorème de M. Mittag-Leffler sur la représentation, dans une étoile, d'une branche d'une fonction analytique déterminée par un de ses éléments, cite quelques exemples de fonctions lacunaires, s'arrête sur les questions que soulève la théorie du prolongement analytique (Poincaré, Borel, Fabry, etc.), puis sur les conclusions qu'on peut tirer de la nature des points singuliers de deux fonctions relativement à celle des points singuliers d'une troisième fonction construite avec les deux premières (Pincherle, Borel, Hadamard, etc.), et termine par quelques pages sur ce que l'on sait de la distribution des

points singuliers sur le cercle de convergence d'une série de puissances (Lecornu, Hadamard, Borel, Leau, Le Roy, Pringsheim, etc.).

AHL (Dr Fritz). — Untersuchungen über geodätische Linien. Inaugural Dissertation. 50 pages. Kiel; 1901.

Dans ces recherches sur les lignes géodésiques, l'auteur s'attache à l'étude des réseaux linéaires de géodésiques, c'est-à-dire des réseaux que l'on peut représenter par des équations linéaires de la forme

$$\alpha u + \beta v = \text{const.},$$

α et β désignant des constantes déterminées.

Sur une surface, il existe toujours *deux* réseaux linéaires de lignes géodésiques, et l'on n'a qu'à poser simplement

$$p = f(u, v) = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad q = g(u, v) = \text{const.}$$

Lorsque sur une surface il existe quatre réseaux linéaires de géodésiques, M. Finsterwalder (1) a démontré que la surface a nécessairement une courbure gaussienne constante. Prenant ensuite comme point de départ la proposition que sur toute surface de révolution il existe trois réseaux linéaires de géodésiques, M. Fritz Ahl s'est proposé de rechercher s'il n'existerait pas d'autres surfaces jouissant de cette propriété. Il s'est donc demandé s'il existerait des expressions de la forme

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

pour lesquelles l'équation des lignes géodésiques serait vérifiée par

$$u = \text{const.}, \qquad v = \text{const.}, \qquad u - v = \text{const.},$$

l'élément linéaire n'appartenant ni à une surface de révolution, ni à une surface applicable sur une surface de révolution. L'au-

(1) S. Finsterwalder, *Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation* (*Jahresberichte der D. M. V.*, Bd VI, 1889, p. 50 à 51).

teur est conduit à un système de trois équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre

$$(1)\qquad 2E\frac{\partial F}{\partial u} - E\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial E}{\partial u} \equiv 0,$$

$$(2)\qquad 2G\frac{\partial F}{\partial v} - G\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial G}{\partial v} \equiv 0,$$

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &E\left(2\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial v}\right)\\ &-F\left(3\frac{\partial E}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u} + 2\frac{\partial F}{\partial v} - 3\frac{\partial G}{\partial u}\right) - G\left(\frac{\partial E}{\partial u} + 2\frac{\partial E}{\partial v}\right) \equiv 0.\end{aligned}\right.$$

On ne peut espérer obtenir une solution générale de ces équations. M. Ahl s'est donc proposé d'étudier les cas particuliers où l'on peut arriver à un résultat. Il commence par démontrer que les six cas suivants conduisent toujours à des surfaces de révolution, à savoir :

$$(1)\qquad E = 0, \qquad G = 0,$$

$$(2)\ (^1)\qquad F = 0,$$

$$(3)\qquad F = \text{const.} \neq 0,$$

$$(4)\qquad E = \text{const.} \neq 0,$$

$$\left.\begin{aligned}(5)\qquad E &= \lambda F^2\\ (6)\qquad F &= \lambda E\end{aligned}\right\}\quad (\lambda = \text{const.}),$$

Mais la partie principale de la dissertation est celle consacrée à la discussion des cas

$$\begin{aligned} E &= A_0 u^2 + 2B_0 u + C_0,\\ F &= A_1 u^2 + 2B_1 u + C_1,\\ G &= A_2 u^2 + 2B_2 u + C_2,\end{aligned}$$

où $A_0, \ldots, C_2$ sont des fonctions de v seul, déterminées par la nature même du problème.

Cette hypothèse relative aux quantités fondamentales E, F, G, a été suggérée à l'auteur par une remarque verbale de M. Stäckel, à qui l'on doit d'ailleurs des études remarquables sur la théorie des lignes géodésiques.

On obtient alors un système de 15 équations différentielles du

---

(1) *Comparer* Darboux, *Leçons sur la Th. des surf.*, t. I, 1887, p. 148-151.

premier ordre pour les coefficients $A_0, \ldots, C_2$. Leur discussion conduit à distinguer un grand nombre de cas. Une simplification essentielle consiste d'abord à écarter ceux qui conduisent aux surfaces de révolution. L'auteur fait voir qu'il y a deux formes essentiellement différentes de l'élément linéaire auxquelles ne correspond aucune surface de révolution et pour lesquelles il existe trois réseaux linéaires de géodésiques, à savoir :

$$ds^2 = 3v(2u - v)du^2 + 2(2u - v)(u - 2v)du\,dv - 3u(u - 2v)dv^2,$$
$$ds^2 = (u + v)^2 du^2 - 2(u + v)(u - 2v)\,du\,dv.$$

A la seconde forme ci-dessus de l'élément linéaire ne correspond aucune surface réelle, mais la première donne les surfaces désignées par Sophus Lie sous le nom de *surfaces spirales* (¹). Une élégante propriété de l'élément linéaire de ces surfaces réelles est celle d'être transformé en lui-même par la transformation

$$u = u_1 - v_1, \qquad v = -v_1.$$

On voit que l'auteur a ajouté d'importants résultats à un des Chapitres de la théorie générale des surfaces.

L. Laugel.

TESSARI (D.). — La Costruzione delli ingranaggi ad uso delle scuole degli ingegneri e dei meccanici. 1 vol. in-8°; xv-225 pages et 8 planches. Turin, Bocca frères; 1902.

L'enseignement des choses techniques présente des difficultés spéciales et peut être conçu de façons assez diverses. Il peut se donner au milieu des choses mêmes, à l'atelier, au laboratoire. On n'a pas alors à se préoccuper de donner des définitions logiques : on montre les objets mêmes, on les nomme en les montrant, on les monte, on les démonte, on les voit fonctionner : les mots éveillent des images précises, des souvenirs de sensations,

---

(¹) Sophus Lie, *Theorie der Transformations-Gruppen* (*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*, t. III), Krist., 1878.

plutôt que des concepts. Cet enseignement-là, qui est une sorte d'apprentissage, n'est pas à dédaigner, même pour les futurs théoriciens : il peut, sans doute, être accompagné d'explications, mais ce n'est pas un enseignement scientifique. Dans un enseignement scientifique les objets doivent être schématisés, réduits à ce qu'ils ont d'essentiel; leur fonctionnement doit être expliqué par des principes appartenant à des Sciences que connaissent les élèves, à des propositions de Géométrie, s'il s'agit, comme ici, du jeu de mécanismes composés d'organes rigides.

Trop souvent les livres rédigés par les hommes de métier ne peuvent être compris que par ceux qui ont fait cette sorte d'apprentissage dont je parlais tout à l'heure; les auteurs ne s'astreignent pas suffisamment à cet ordre logique qui est le fond de toute Science, et ne se préoccupent même pas de définir les termes techniques qui viennent naturellement sous leur plume. De tels livres peuvent rendre de grands services aux lecteurs pour lesquels ils ont été écrits, qui y trouvent les renseignements dont ils ont besoin; ils ne peuvent guère servir aux étudiants proprement dits. D'autre part, le théoricien qui veut donner un enseignement soi-disant pratique laisse trop souvent de côté les détails qui l'ennuient et s'attarde volontiers aux problèmes théoriques qui lui sont suggérés par l'ordre de questions dont il s'occupe. Quelques-uns de ces problèmes ne valent que comme exemples ou comme amusement; il importe de ne pas en abuser et de ne pas se complaire uniquement, dans les choses d'ordre pratique, à celles qui donnent l'occasion de parler de quelque joli théorème de Mathématiques. D'autres problèmes se trouvent avoir un grand intérêt en eux-mêmes, et l'histoire de la plus pure des Sciences montre assez que les plus beaux développements théoriques ont été souvent les réponses à des questions posées dans la réalité; pour ne parler que du sujet traité par M. Tessari, que de Chapitres de Cinématique n'interviennent-ils pas dans la solution de ce problème : transformer, au moyen d'organes rigides en contact, un mouvement de rotation autour d'un axe en un mouvement de rotation autour d'un autre axe? Ce n'est pas ces Chapitres qu'il s'agit de développer dans un Traité des engrenages : si ce Traité avait dû être un livre essentiellement pratique, l'auteur se serait borné à l'énoncé des règles précises qui servent au tracé des figures:

le livre que M. Tessari a voulu écrire est un livre de Science où les applications ne sont jamais perdues de vue : c'est toujours des organes précis, déterminés qu'il a en vue; il ne sera satisfait que quand il aura montré comment la construction peut être achevée que son lecteur aura toutes les données nécessaires pour dessiner complètement ces organes et possédera toutes les raisons qui justifient ce dessin.

On a bientôt fait, par exemple, lorsqu'il s'agit d'engrenages cylindriques, de justifier, devant des auditeurs qui possèdent les éléments de la Cinématique, les diverses règles pour le tracé de deux profils conjugués. A coup sûr, l'auditeur, ou le lecteur, a trouvé là une application intéressante de principes qu'il connaissait, et cette application, bornée à ce que je viens de dire, est même une illustration naturelle de la théorie du déplacement d'une figure dans son plan. S'il ne sait que cela, notre auditeur sera fort embarrassé de dessiner un engrenage, et risquera de ne se rendre compte que bien imparfaitement du fonctionnement de l'appareil dont on lui a parlé. Quels profils choisira-t-il? Si c'est un engrenage épicycloïdal, comment prendra-t-il le rayon du cercle dont un point décrira les profils conjugués? Comment limitera-t-il ces profils? Comment fera-t-il les saillies et les vides? Quelles dents seront-elles en contact et pendant combien de temps? Combien ce mode d'engrenages comporte-t-il de dents? Les questions abondent, et je ne parle, bien entendu, que de celles qui sont du ressort de la Cinématique, et qu'a traitées M. Tessari; il y en a bien d'autres qui intéressent la Dynamique, l'élasticité, la résistance des matériaux, etc.; ces questions-là, l'auteur ne pouvait que les signaler en passant, pour indiquer à l'occasion comment d'autres considérations que celles qui sont tirées de la pure Géométrie interviennent, par exemple, dans le choix des dimensions des organes, et s'il se contente de dire parfois que la pratique a conduit à adopter tel ou tel nombre, son lecteur se contentera aussi de cette affirmation, d'autant que ce lecteur sent bien qu'on ne peut tout lui dire et qu'il n'est pas facile de tout expliquer : au moins sera-t-il satisfait d'être capable de dessiner un organe réel et qui pourrait fonctionner, de ne pas savoir seulement, d'une façon vague et troublante, que la Cinématique sert à quelque chose, mais d'être rassuré en sachant com-

ment elle sert. Et si même il ne doit jamais être ni ingénieur ni mécanicien, mais un homme de science ou un professeur, ou simplement un homme instruit, l'étude approfondie de quelqu'un des exemples simples développés par M. Tessari sera, à coup sûr, une excellente discipline. Ce que l'on gagne de modestie et de conscience, en ne se contentant pas de principes généraux que l'on se croit capable d'appliquer, si seulement on le voulait, et en étudiant jusqu'au bout un exemple précis, sans se laisser rebuter par ce qu'il peut avoir d'un peu méticuleux, n'est pas à dédaigner.

Les lignes qui précèdent suffiront, je l'espère, à caractériser l'esprit à la fois scientifique et pratique du livre de M. Tessari : celui-ci est ingénieur et l'on sent assez qu'il parle de sujets qu'il connaît : il est professeur au *R° Museo industriale italiano*, et l'on reconnaîtra, en lisant son livre, l'homme qui sait enseigner. Les divers problèmes sont traités d'une façon systématique, par l'étude du mouvement relatif d'une des roues par rapport à l'autre. Cette étude donne le plus simplement qu'il est possible toutes les popositions théoriques dont on a besoin. Sept Chapitres sont consacrés aux engrenages à axes parallèles, pour un rapport constant des vitesses angulaires : après avoir nettement posé les principes, étudié le jeu des appareils, énuméré les questions à résoudre dans chaque cas particulier, l'auteur traite successivement des profils épicycloïdaux, des flancs rectilignes, des profils à développantes de cercle et des engrenages à fuseaux. Un Chapitre spécial est consacré aux engrenages de Hooke et White (*roues à chevrons*) dans lesquels la surface des dents n'est pas cylindrique, mais hélicoïdale. L'auteur termine ce Chapitre en exprimant le souhait de voir établir des recherches expérimentales sur la comparaison, au point de vue du frottement, entre ces engrenages et les engrenages cylindriques ordinaires. Trois Chapitres très intéressants tant au point de vue théorique qu'au point de vue pratique se rapportent au cas où, les axes étant toujours parallèles, le rapport des vitesses est supposé variable. De nombreux exemples sont traités avec détail. Les problèmes analogues à ceux que l'on vient de dire sont repris dans le cas des axes concourants : ils sont distribués dans trois Chapitres.

Enfin, l'Ouvrage se termine par l'étude du cas où les axes sont placés d'une façon quelconque dans l'espace, les mouvements de

rotation étant supposés uniformes. Un Chapitre est consacré à l'étude de la disposition des deux hyperboloïdes de révolution, tangents le long d'une génératrice commune, que l'on est alors amené à considérer, l'autre à l'étude des dents dont on peut armer ces hyperboloïdes. J. T.

CELLÉRIER (Ch.). — Cours de Mécanique. 1 vol. in-8°; VIII-617 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1892.

Ce Cours de Mécanique, professé en grande partie à l'Université de Genève, et complètement rédigé par l'auteur, est très intéressant par les tendances multiples et quelquefois opposées qui s'y manifestent. L'auteur était un excellent géomètre, qui a écrit nombre de Mémoires sur la Mécanique et la Physique mathématique, et s'intéressait aux points les plus subtils de l'Analyse. On sent chez lui le goût de la généralité : ainsi son Cours, qui débute par la Statique, s'ouvre par la démonstration du principe des vitesses virtuelles, ramené, grâce à une ingénieuse disposition de ces petites poulies qui figurent dans plusieurs démonstrations classiques, à cet axiome : Si une force unique est appliquée à un système théorique, et si ce système peut se mouvoir de façon que le point d'application se déplace suivant la direction de cette force, le système ne restera pas en équilibre.

Mais, en même temps qu'il a le goût des théories générales, Cellérier ne perd pas de vue les phénomènes physiques : il en a le sens et veut le communiquer à son lecteur, qui ne restera pas longtemps dans les considérations abstraites; cela se prévoit d'ailleurs, ici et là, dès les premières pages; mais les applications mettent en évidence les préoccupations de l'auteur : tout d'abord, pour ce qui concerne les systèmes à liaisons complètes, il aura grand soin de faire ressortir le sens de l'énoncé populaire du principe des vitesses virtuelles : « Ce qu'on gagne en force, on le perd en vitesse »; il aura grand soin aussi de distinguer les divers déplacements, de nature très différente, que peut recevoir un système; il élucidera de son mieux la notion des *forces de*

contact, multipliant les exemples, tantôt en considérant le frottement, tantôt en le négligeant, parlera, dans un cas simple, de l'équilibre des voûtes, puis des murs de soutènement, et dira même quelques mots de la flexion des tiges. Les préoccupations du physicien se retrouvent dans l'établissement des principes de la Dynamique, lorsque, par exemple, il introduit la notion du point matériel.

« Dans ce qui précède, dit-il, nous faisons abstraction du fait que la matière, à un degré d'extrême subdivision, se réduit en molécules. Ce fait constitue un défaut d'homogénéité ou des irrégularités de structure dont les dimensions sont en général imperceptibles en comparaison de celles d'un corps, et dont l'influence par suite peut être négligée en Mécanique.

» Il en est de même s'il s'agit d'un élément ou d'un point matériel. En réalité, on pourrait sans erreur sensible le considérer comme infiniment petit, tout en lui attribuant des dimensions immenses en comparaison de l'intervalle moyen des molécules. Mais il n'est pas même nécessaire de s'arrêter à cette sorte d'approximation; en effet, les lois de la Mécanique ne peuvent dépendre de cet intervalle, dont la longueur nous est inconnue; si donc nous lui supposons une petitesse indéfinie, ces lois ne seront pas changées. Cela revient à regarder la matière comme continue, conformément, du reste, à sa nature apparente. »

Jamais, sans doute, un mathématicien qui ne serait que mathématicien, qui ne se préoccuperait que du jeu logique des définitions et des déductions, n'aurait écrit cette phrase sur les lois de la Mécanique, qui ne peuvent dépendre de l'intervalle moyen des molécules, intervalle dont la longueur nous est inconnue. On y sent l'homme qui a des scrupules et une certaine conception de la matière, mais on ne se rend pas bien compte de l'idée physique ou métaphysique que recouvrent ses paroles.

Je ne cite cet exemple que pour signaler les difficultés presque inhérentes aux livres, très utiles d'ailleurs, qui, comme celui de Cellérier, prétendent familiariser le lecteur avec les phénomènes ou les théories physiques. L'auteur pense ces phénomènes avec certaines habitudes d'esprit, et ces habitudes créent pour lui une sorte d'évidence qui ne peut être partagée par le lecteur. A la

vérité, lorsqu'il s'agit de spéculations telles que celles dont il vient d'être question, l'inconvénient que je signale n'a plus grande importance : sans doute, il ne s'agit de rien moins que des équations fondamentales de la Dynamique ; mais, après tout, ces équations sont plus claires, en elles-mêmes, que les raisonnements sur lesquels on prétend les fonder, et il est loisible au lecteur d'oublier ceux-ci s'il sait appliquer correctement celles-là. La vraie difficulté est peut-être dans les applications et dans l'appréciation de ces simplifications que l'on fait subir aux problèmes réels pour les mettre en équations ; la meilleure ressource, pour persuader le lecteur de la légitimité de ces simplifications, est sans doute de multiplier les exemples ; on en trouvera beaucoup, et d'ingénieusement choisis, dans le livre de Cellérier, qui, par cela même, ne pourra manquer de rendre de bons services.

Après l'étude du mouvement d'un point et une digression nécessaire sur l'évaluation des intégrales multiples qui s'introduisent en Mécanique (centres de gravité, moments d'inertie, attraction, formule de Green, etc.), l'auteur traite du mouvement d'un solide ou d'un système de solides, en partant du principe de d'Alembert; signalons le paragraphe sur le mouvement de l'axe de la Terre, la démonstration de la réciproque du principe des vitesses virtuelles, la discussion de la nature des liaisons, l'application des formules de Lagrange à l'effet, sur un pendule composé, de la secousse due à un tremblement de terre. Le chapitre se termine par la théorie des percussions et l'étude de la stabilité de l'équilibre dans le cas d'une fonction de forces.

Un important Chapitre, sous le titre *Complément de la Dynamique* traite, d'une part, des applications industrielles, des résistances passives, des moyens de régulariser et de mesurer le travail, et, d'autre part, de l'élasticité (vibrations longitudinales d'une tige élastique, relations fondamentales entre les pressions intérieures d'un corps, valeur des pressions en fonction des variables qui expriment la déformation, etc.).

La mécanique des fluides est traitée surtout au point de vue des applications pratiques.

La brève analyse qui précède a eu pour but de mettre en évidence les tendances du livre de Cellérier : s'il touche à tous les sujets que comporte un Traité de Mécanique rationnelle, l'auteur

s'efforce évidemment de rapprocher son enseignement, d'une part de la Mécanique pratique, d'autre part de la Physique mathématique : il y a eu un temps où l'enseignement de la Mécanique rationnelle semblait avoir pour but principal de fournir aux étudiants des exercices intéressants de Calcul intégral ; il ne faut pas regretter que ce temps-là soit passé.

ALEZAIS (Raymond). — Sur une classe de fonctions hyperfuchsiennes. (Thèse). Paris, Gauthier-Villars; 1901.

La Thèse de M. Alezais trouve son origine dans l'étude de certaines fonctions hyperfuchsiennes envisagées par M. Picard (*Acta mathematica*, t. I, II et V). Les périodes de l'intégrale abélienne

$$(1) \qquad \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t(t-1)(t-x)(t-y)}}$$

sont des fonctions des deux paramètres x et y, et ont trois déterminations linéairement indépendantes; soient ω_1, ω_2, ω_3 trois de ces déterminations convenablement choisies, et posons

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \qquad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v.$$

x et y sont des fonctions uniformes de u et v, dont le champ d'existence est le domaine de l'espace à quatre dimensions correspondant aux deux variables complexes u et v, défini par l'inégalité

$$uu_0 + v + v_0 < 0,$$

en désignant par u_0 et v_0 les conjuguées de u et v.

M. Alezais fait d'abord explicitement la recherche de ces fonctions x et y de u et v (fonctions hyperfuchsiennes) au moyen des fonctions Θ. Considérant ensuite la courbe entre z et t

$$z^3 = (t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)(t-\delta)$$

et l'intégrale analogue à (1) relative à cette courbe, il fait une

étude approfondie du groupe S des substitutions linéaires relatives à u et v, quand les points critiques α, β, γ, δ tournent les uns autour des autres, groupe qui admet cinq substitutions fondamentales. Comme il résultait des recherches de M. Picard, le groupe S pris sous forme homogène transforme en elle-même la forme quadratique ternaire à indéterminées conjuguées

$$F = xx_0 + yz_0 + y_0 z.$$

M. Alezais se pose alors la question très intéressante de savoir si le groupe S coïncide avec le groupe des substitutions semblables de F, ou s'il ne forme qu'un sous-groupe de celui-ci. Pour élucider la question, l'auteur considère un nouveau groupe T provenant des échanges des valeurs α, β, γ, δ entre elles. Le groupe T transforme F en elle-même et contient le groupe S. M. Alezais établit que les substitutions de S sont congrues à la substitution unité suivant le module $1 - \lambda$ (en désignant par λ une racine cubique imaginaire de l'unité), et que S est donc un sous-groupe à congruences du groupe T; il en est, par suite, un sous-groupe invariant. On peut donc décomposer le groupe T en classes de substitutions incongrues selon le module $1 - \lambda$. Il est alors possible de montrer que *le groupe* Φ *de toutes les substitutions transformant* F *en elle-même admet comme sous-groupe invariant d'indice deux le groupe* T, *qui admet lui-même le groupe* S *comme sous-groupe invariant d'indice vingt-quatre*. L'étude du groupe des substitutions semblables de F est ainsi faite complètement, et ces résultats sont, au point de vue arithmétique, d'un réel intérêt. On sait, en effet, qu'il n'est pas en général facile de pousser jusqu'au bout la recherche des substitutions fondamentales du groupe relatif à une forme quadratique indéfinie. Au groupe Φ correspondent, d'ailleurs, comme à tout groupe de substitutions transformant en elle-même une forme quadratique ternaire indéfinie à indéterminées conjuguées, des fonctions hyperfuchsiennes.

Continuant son étude arithmétique, M. Alezais passe aux substitutions qui multiplient par un entier k la forme F. Les célèbres travaux d'Hermite sur la transformation des fonctions abéliennes du premier ordre appelaient, dans le cas actuel, d'ailleurs plus complexe, l'attention sur la *réduction* et l'*équivalence* de ces

substitutions. Dans plusieurs questions de nature algébrique, le nombre des substitutions non équivalentes jouera certainement un rôle important, quand on poussera plus loin l'étude des fonctions hyperfuchsiennes correspondant à la forme F. M. Alezais retrouve à ce sujet le nombre indiqué autrefois sans démonstration par M. Picard, quand k est premier et de la forme $3m+1$; il fait aussi le calcul assez délicat pour $k=3$. Ces résultats seront à utiliser par ceux qui voudront entreprendre la formation effective de certaines équations analogues aux équations modulaires, et obtenir ainsi des exemples de *surfaces hyperfuchsiennes*, c'est-à-dire de surfaces algébriques pour lesquelles les trois coordonnées s'expriment par des fonctions hyperfuchsiennes de deux paramètres.

La dernière partie est consacrée à un problème de transformation linéaire de certaines fonctions θ de genre *trois*, qui conduit l'auteur à un nouvel exemple concret de fonctions hyperfuchsiennes, et lui fournit le moyen de vérifier directement l'invariance des fonctions x et y considérées au début.

Le travail très soigné de M. Alezais, qui témoigne d'une réelle puissance de calcul, intéresse à la fois, comme on voit, l'Arithmétique et la Théorie des fonctions; sa lecture sera indispensable à ceux qui voudront aborder les nombreux problèmes qui se présentent encore dans cet ordre d'idées.

FREYCINET (C. DE). — SUR LES PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE RATIONNELLE. 1 vol. in-8°, 167 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

On ne peut lire un livre de M. de Freycinet sans admirer d'abord l'écrivain, la limpidité du style, et cette simplicité dans l'élégance qui, chez les riches, est la marque du goût. Dans ce livre-ci, qui touche aux points les plus difficiles de la Mécanique, il n'y a pas une formule, pas un symbole analytique; les théorèmes et les principes sont dépouillés de tout cet appareil mathématique, dont on se contente parfois, sans se donner la peine de regarder ce qu'il y a dessous; les mathématiciens sont si habitués

à leurs symboles et s'amusent si volontiers au jeu de ces symboles, qu'il faut peut-être leur arracher leurs jouets pour les forcer à penser. Forcer le lecteur à penser aux choses, c'est là sans doute ce qu'a voulu M. de Freycinet, et sa modestie semble excessive lorsqu'il dit, à la fin de son livre, qu'il s'est seulement efforcé de dégager les abords de la Mécanique rationnelle « et d'assurer les premiers pas de ceux qui voudraient pénétrer à l'intérieur de l'édifice ».

C'est parmi ceux qui sont à l'intérieur de l'édifice, qui sont curieux de savoir comment ils y sont entrés, et si le chemin qu'ils ont suivi était bon, que M. de Freycinet trouvera sans doute le plus de lecteurs.

Quand on a affaire à un esprit aussi lucide que le sien, à un écrivain qui dit exactement ce qu'il veut dire, ni plus, ni moins, il est quelque peu dangereux de prétendre lire entre les lignes et de prêter à l'auteur des opinions qu'il n'a peut-être pas, ou dont il n'accepterait pas l'expression. Il semble bien, toutefois, que M. de Freycinet n'ait pas de sympathie pour l'école de mathématiciens ou de logiciens dont l'idéal est de placer au début de chaque branche des Mathématiques une « table des idées premières », des définitions précises, des postulats dont on ait constaté l'indépendance et qui soient en nombre suffisant, puis de constituer le reste de la science avec de purs raisonnements logiques. Ce n'est peut-être pas à ceux qui poussent le radicalisme aussi loin, mais bien à ceux qui ont quelques tendances de ce côté, voire modérées et timides, que s'adressent les pages suivantes de la préface :

« A mon avis, ces voies nouvelles ne sont pas sûres, et en tout cas elles ne sont pas favorables à la découverte des lois naturelles. Je crois prudent de m'en tenir à la tradition des Galilée, des Newton, des d'Alembert, des Laplace, des Lagrange; et si quelque changement doit être apporté à des méthodes, naguère réputées classiques, c'est plutôt, selon moi, pour en accentuer le caractère expérimental et pour mettre davantage en relief les données physiques qui leur servent de bases. Sans doute la Mécanique ainsi exposée présente un « mélange » de calcul et d'observation « avec » quelque peu d'anthropomorphisme ». Mais quelle est la branche

de nos connaissances qui échappe à ce dernier reproche? Toute science ne porte-t-elle pas l'empreinte de nos concepts et, quand elle sort de la pure logique, l'empreinte aussi de nos sensations vis-à-vis du monde extérieur? Sa fécondité et sa certitude ne sont-elles pas alors en raison de son intime contact avec la nature et ne devient-elle pas stérile à mesure qu'elle s'en éloigne?

» J'ai voulu, dans les pages qui suivent, reprendre précisément la méthode que certains inclinent à délaisser. Loin d'en atténuer le prétendu défaut, je l'ai délibérément accru en donnant plus de place aux considérations empiriques. Le « mélange » signalé comme un manque d'unité n'en sera que plus apparent; j'espère toutefois qu'il ne passera pas pour de la confusion. Car, au fond, les deux parties, abstraite et concrète, sont parfaitement distinctes.

» Celle-ci sert de support à celle-là. Les données expérimentales précèdent et motivent les théories analytiques; elles les maintiennent dans la région du réel, hors de laquelle les plus brillants exercices de calcul sont décevants. »

Que la Science puisse se développer sans que les concepts qui sont à la base de cette Science aient été l'objet d'une critique sévère, c'est ce que l'histoire met hors de doute; il est même certain qu'on ne revient sur les concepts, pour les étudier, les distinguer, les débarrasser de ce qu'ils ont d'inutile, que lorsque la Science est déjà très avancée; c'est à la lumière de la Science elle-même qu'on en peut scruter les principes : vaudrait-il mieux ne jamais s'arrêter à cette critique, s'efforcer d'aller toujours en avant et accumuler plus de vérités nouvelles? Sans doute, il ne faudrait pas faire dire cela à M. de Freycinet, puisque, après tout, son livre même est, d'un bout à l'autre, la preuve de l'intérêt qu'il attache à l'étude des principes; mais il est vrai que l'organisation d'une science est autre chose que son accroissement. Quelques-uns regrettent cet appauvrissement des concepts qui résulte de leur critique; rien n'est plus riche que l'intuition; mais cette richesse est confuse et cachée : il faut la découvrir, et l'on ne sait comment l'utiliser. Rien ne semble plus pauvre que les concepts qui sont à la base de la Géométrie, si ce n'est ceux qui sont à la base de l'Analyse : toute la richesse est dans le dévelop-

pement logique; est-ce une richesse bien solide? n'est-ce pas plutôt un rêve de richesse, si elle ne consiste qu'en formules abstraites, en signes conventionnels, sous lesquels il n'y a aucune réalité? Il est permis, en tout cas, de priser davantage les spéculations qui s'adaptent aux choses et nous permettent de mieux les connaître, et, d'ailleurs, il est certain que l'étude des problèmes réels a singulièrement contribué au développement de la Science pure. D'un autre côté, l'enseignement d'une science logiquement constituée ne peut s'adresser qu'à des esprits très mûris par cette science même : il ne convient assurément pas, si l'on en pousse la rigueur jusqu'au bout, à des gens qui n'ont pas la longue habitude des abstractions, qui ne sont pas accoutumés à respirer un air raréfié; ceux qui enseignent la Mécanique rationnelle, en particulier, ont, d'ordinaire, le souci de donner à leurs auditeurs le sens des problèmes physiques et de ne pas perdre, eux non plus, ce « contact avec la nature » que recommande M. de Freycinet : j'en trouverais la preuve, s'il était besoin de la chercher, dans le soin et le détail avec lesquels sont définies les unités pratiques de mesure dans les traités récents de Mécanique.

Malgré tout, il est dans la nature d'une science de s'organiser, de se subdiviser en parties dont chacune se différentie naturellement par les concepts et les postulats qui lui sont propres, prétend réduire les uns et les autres au minimum et ne s'appuyer que sur ce qui est à elle; la Mécanique s'est subdivisée en Statique, Cinématique, Dynamique; la Statique et la Cinématique ont des parties purement géométriques; la Dynamique a des parties purement analytiques, où l'on étudie certains types d'équations différentielles. Des notions plus ou moins confuses de force, de mouvement, de matière sont sortis des éléments géométriques, numériques, analytiques sur lesquels on spécule sans penser ni à la force, ni au mouvement, ni à la matière : ces diverses parties se prêtent un mutuel appui, et c'est leur ensemble seul qui constitue la Mécanique rationnelle; elles n'en sont pas moins déjà séparées, se sépareront davantage les unes des autres et continueront à se subdiviser. Cette division de la Science en parties correspond à une division des concepts et des postulats, qui tend à préciser et à appauvrir les premiers, à mieux distinguer les seconds, et à rapprocher la Science de l'idéal des purs logiciens. C'est un mouve-

ment inévitable par lequel, toutefois, il convient de ne pas se laisser entraîner trop vite : il est même désirable que des voix autorisées viennent de temps en temps en montrer les inconvénients ou les dangers.

Si même cet idéal des logiciens était atteint, si chaque livre qui traite d'une partie des Mathématiques contenait au début la « table des idées premières », la suite des définitions et des postulats indispensables, la critique philosophique et historique aurait encore à s'exercer sur ces idées premières et sur ces postulats, à en discuter l'origine et la formation ; pour ce qui concerne la Mécanique, il est hors de doute que l'expérience a contribué pour une très grande part à l'une et à l'autre. Les livres comme celui de M. de Freycinet auront donc toujours leur place. Il est même permis de croire que, pour ce qui concerne les principes, le rôle de l'expérience est loin d'être épuisé, si, comme le veut M. de Freycinet, on fait rentrer le principe de l'équivalence dans les lois fondamentales de la Mécanique rationnelle : d'autres principes du même genre pourront s'ajouter à celui-là.

Quoi qu'il en soit, en insistant sur le caractère expérimental des données de la Mécanique, M. de Freycinet ne va pas à l'encontre du mouvement dont je parlais tout à l'heure; mais ses fines analyses contribueront sur plus d'un point à détruire la fausse évidence sous laquelle on est parvenu quelquefois à cacher ces données, grâce à des raisonnements dont on ne sait pas bien ni s'ils sont *a priori,* ni sur quoi ils s'appuient. Il est bon de reléguer ces raisonnements-là, qui sentent la Métaphysique, dans l'histoire; qu'on leur y fasse une place honorable, puisqu'ils ont été utiles à la constitution de la Mécanique; ceux même qui croient que le monde extérieur nous est donné, que nous sommes incapables de le construire avec des vérités soi-disant nécessaires et de prétendues évidences métaphysiques, ne s'en plaindront pas.

M. de Freycinet examine successivement les notions essentielles de la Mécanique, mouvement, vitesse, accélération, force, masse, etc., et les principes fondamentaux de cette science.

Il passe rapidement sur les notions d'espace et de temps, qui interviennent dans la notion de mouvement; à vrai dire, la critique de la notion d'espace appartient plutôt à la Géométrie qu'à la Mécanique. Toutefois, il ne pouvait pas ne pas s'arrêter un

instant sur la question du mouvement relatif et du mouvement absolu, dont il admet la notion. Il est vrai qu'on ne trouve rien à répondre à ceux qui soutiennent que, pour qu'il y ait une Mécanique rationnelle, il faut bien qu'il y ait un système de repères et une façon de mesurer le temps, tels que les lois de cette Mécanique soient vraies.

« La première origine de la notion de force se trouve, sans conteste, dans nos impressions personnelles. Bien avant que l'homme eût créé une science des forces et se fût élevé dans la sphère des abstractions, il avait acquis, par sa propre expérience, le sentiment très net d'un effort à déployer pour écarter les obstacles ou pour déplacer les corps. Soit qu'il exerçât une pression sur quelque objet fixe, soit qu'il essayât de vaincre des frottements ou la pesanteur, soit seulement qu'il voulût faire osciller un poids suspendu, il était amené à développer une contraction musculaire, à *faire effort* pour atteindre son but. Tel est l'acte spécial et bien défini par lequel l'homme prend conscience de sa force et des effets qu'il en peut attendre. Aucun argument ne saurait prévaloir contre ce fait; aucune interprétation ne saurait enlever à la force ainsi conçue et ressentie son caractère nettement concret. Elle n'est point une abstraction, un être de raison, mais quelque chose de réel et d'efficace dont nous portons en nous un type certain. »

Sans doute, et l'on ne saurait mieux dire; mais qu'il y a loin de la sensation musculaire à ce *vecteur* qui, pour le mathématicien, traduit la force! En particulier, la comparaison entre deux forces, l'égalité, l'addition de deux forces comportent bien des difficultés que le savant auteur ne cherche pas à dissimuler. Pour éclaircir ces notions, on imagine d'ordinaire que l'on ait à sa disposition de petites forces que l'on accroche ou que l'on décroche à volonté : le moins que l'on pourrait dire sur les mécanismes plus ou moins complexes que l'on invente pour réaliser ces opérations est que la théorie de ces mécanismes impliquerait cette Mécanique rationnelle dont il s'agit d'établir les premières notions. Au fond, on s'efforce de rattacher, tant bien que mal, les notions que l'on veut introduire dans l'esprit des commençants à des phénomènes avec lesquels on suppose qu'ils sont familiers; il est d'ailleurs possible que des

considérations de ce genre soient intervenues historiquement dans le travail plus ou moins conscient qui a abouti à substituer à la notion vague de force un vecteur ayant, pour ce qui concerne le mouvement, des propriétés définies.

« ... Ainsi le corps a une double propriété : la *mobilité,* en vertu de laquelle, s'il est libre, il cède au moindre effort; et cette autre propriété d'après laquelle il réclame des efforts différents, selon sa nature et ses dimensions, pour prendre le même mouvement. Cette seconde propriété est déterminée par ce qu'on appelle la *masse*. Ainsi, la masse des corps se reconnaît à la grandeur des forces qui leur font prendre le même mouvement.

» Si donc nous avions le moyen d'évaluer immédiatement l'intensité de la force ou le nombre de kilogrammes nécessaires pour imprimer à un corps un mouvement convenu, nous saurions, par là-même, mesurer sa masse. D'une manière générale, les masses de tous les corps seraient proportionnelles aux grandeurs des forces ainsi enregistrées....

» Les physiciens ont constaté que tous les corps sans exception, depuis le plus léger duvet jusqu'au bloc de plomb ou de platine, abandonnés à eux-mêmes dans le vide, prennent le même mouvement : partis en même temps de la même hauteur, ils arrivent ensemble au bas de la chute. Les forces qui les sollicitent, c'est-à-dire leurs poids, sont donc, par définition, proportionnelles à leurs masses. Dès lors, au lieu de mouvoir les corps à l'aide d'appareils spéciaux, pour en évaluer la masse, il suffit de les peser. »

Au fond, cela revient à dire que la masse est définie au moyen de la balance, et c'est sans doute ce que l'on peut en dire de plus clair et de plus sûr, puisque, après tout, c'est au moyen de la balance qu'on mesure effectivement les masses. Sans doute, ici encore on pourrait dire que la balance est un appareil compliqué, dont la théorie implique une bonne partie de la Mécanique rationnelle; c'est même cette Mécanique rationnelle qui fournit le moyen de construire des balances qui soient justes et sensibles : quoiqu'une partie des difficultés soit supprimée en ne considérant, comme le veulent les physiciens, que des doubles pesées, il n'est pas *logique* de se servir de la balance pour définir une

notion fondamentale de la Mécanique. De quelque côté que l'on se retourne, on se heurtera toujours à l'impossibilité de construire le monde extérieur avec la pure logique. D'ailleurs, à chacune des notions fondamentales de la Mécanique ne correspond pas *une* expérience qui permette de la définir : il y a une infinité d'expériences dont la Mécanique explique et coordonne les résultats d'une façon admirable, et c'est, comme on l'a dit, la cohérence de toute la Science, nullement l'évidence de ses principes, qui en garantit la valeur.

M. de Freycinet insiste avec raison sur l'impossibilité où l'on est de prévoir logiquement le rôle de la masse, de ce coefficient numérique attaché à la matière, que la balance nous permet d'évaluer : pour les corps qui sont à notre portée, il s'efforce de faire pénétrer dans l'esprit de son lecteur cet étonnement devant les choses que l'habitude n'arrive pas à dissiper chez le véritable philosophe. Pour me borner à la façon même dont M. de Freycinet introduit la notion de masse, était-il possible de prévoir logiquement ce fait que le temps de chute d'un corps est indépendant de sa masse?

Je passe sur les concepts de quantité d'action, de travail, de masse vive, d'énergie, etc., que M. de Freycinet examine ensuite et à propos desquels il est obligé d'anticiper un peu sur ces *lois générales du mouvement* auxquelles il consacre le second Chapitre de son livre, et qu'il range dans l'ordre suivant : loi d'égalité entre l'action et la réaction ; loi d'inertie ; loi de l'indépendance d'action des forces ou de l'indépendance des mouvements ; loi de l'équivalence mécanique de la chaleur.

Il déduit de la seconde et de la troisième loi la relation fondamentale de la Mécanique $F = m\gamma$ et la règle du parallélogramme. Or on peut, inversement, par intégration, déduire de ces deux dernières propositions et la loi de l'inertie et la loi de l'indépendance des effets des forces. Je me demande en quoi il est préférable d'adopter un ordre plutôt qu'un autre, et de partir d'un système de lois plutôt que d'un autre. La façon de procéder qu'a adoptée M. de Freycinet est plus conforme aux habitudes et à l'histoire : est-elle plus claire? On dira peut-être, comme on l'a dit à propos d'autres sujets, que l'expérience ne peut fournir des relations différentielles, mais bien des relations entre des intégrales, d'où nous

déduisons les relations différentielles : dans le cas actuel, cette observation n'est guère concluante, car ni la loi de l'inertie, ni celle de l'indépendance des actions des forces ne sont susceptibles d'une démonstration expérimentale directe. S'il n'y a donc, dans l'espèce, ni évidence *a priori,* ni vérification expérimentale directe, il semble très légitime de se décider, dans le choix, par la simplicité et la clarté de l'énoncé; or la relation $F = m\gamma$ et la règle du parallélogramme sont, à ce qu'il me semble, des énoncés plus clairs que le principe de l'indépendance des effets des forces et du mouvement antérieurement acquis : celui-ci, si je ne me trompe, n'a de sens que si les forces sont données en fonction du temps, et ne se prête à des déductions faciles que si les forces sont constantes : M. de Freycinet a lui-même signalé ce dernier point.

Je ne puis, en terminant, m'empêcher de citer quelques-unes des observations que fait M. de Freycinet sur les lois générales du mouvement :

« Elles sont dues entièrement à l'observation et ne sont, à aucun degré, susceptibles d'une démonstration logique. Elles diffèrent donc essentiellement des principes en usage dans les Mathématiques pures.

» Elles sont d'une généralité à laquelle, jusqu'ici, on ne connaît pas d'exception. On est autorisé à croire qu'elles s'appliquent non seulement dans l'étendue du système solaire, mais au delà, dans l'universalité des mondes. A mesure que l'identité de la matière, chez les différents astres, s'affirme davantage à la suite des merveilleuses découvertes de la Spectroscopie, il devient de plus en plus probable qu'ils sont soumis aux mêmes lois dynamiques. Le mouvement des étoiles multiples en fournit un nouvel indice.

» Elles sont d'une exactitude rigoureuse. Leurs formules ne sont pas approximatives, comme celles de nombreuses lois physiques et chimiques, mais elles ont la rectitude d'une proposition de Géométrie. Ainsi, pour ne citer que la première loi générale, celle qui concerne l'égalité entre l'action et la réaction, le principe énoncé se vérifie intégralement. Il n'est pas, selon les cas, exact à un millième ou à un dix-millième près, mais il l'est d'une manière absolue; il ne comporte pas la plus légère erreur.... »

Que ces lois ne soient nullement susceptibles d'une démonstration logique, c'est ce qui me paraît incontestable et bon à dire. En disant qu'elles sont dues entièrement à l'observation, M. de Freycinet n'a certainement pas entendu que ces lois avaient été observées directement : elles expriment une induction très lointaine et une interprétation des observations bien pénétrante et bien hardie; on n'admirera jamais assez ceux qui sont parvenus à les penser et à les exprimer clairement. Quant à leur valeur absolue, il est peut-être permis d'être moins affirmatif que M. de Freycinet : elles s'étendent à des domaines extraordinairement vastes et jusqu'à des profondeurs singulières; grâce à elles, notre connaissance du monde extérieur s'accroît et s'organise dans des proportions et avec une précision qui sont, pour le philosophe et le savant, un sujet d'étonnement et de légitime orgueil; mais ne ressemblent-elles pas à un conquérant qui ne peut se maintenir qu'en reculant toujours ses frontières et qui, *de gré ou de force*, fait rentrer dans son empire, au moins nominalement, ceux mêmes qui ne voudraient pas le reconnaître? J. T.

HAMEL (Georg). — Ueber die Geometrien in denen die Graden die kürzesten sind. Inaugural-Dissertation, 90 pages. Göttingen; 1901.

Dans le Problème 4 de ses *Mathematische Probleme* (¹), M. Hilbert avait proposé celui qui fait le sujet de la belle Thèse de M. Hamel, à savoir : l'exposition et la discussion systématique des Géométries où la droite est *par définition* le plus court chemin d'un point à un autre.

Cet énoncé : « La droite est le plus court chemin. . .» se réduit essentiellement, nous dit M. Hilbert (*loc. cit.*), au théorème d'Euclide que dans un triangle la somme de deux côtés est toujours plus grande que le troisième; dans ce théorème, il ne s'agit que de concepts élémentaires, c'est-à-dire dérivant immédiatement des

(¹) *Göttinger Nachrichten*, 1900, et *Travaux du Congrès de* 1900 (traduction Laugel).

axiomes, et sa discussion est donc plus abordable que celle de la proposition de la droite plus court chemin. Dans la démonstration de ce théorème d'Euclide, aux propositions de congruence relatives au transport d'angles et de segments il est absolument indispensable d'ajouter un théorème de la congruence des triangles, celui d'après lequel les angles à la base d'un triangle isoscèle sont égaux. Alors cette question se présente : Existe-t-il une Géométrie où sont vérifiés tous les axiomes de la Géométrie euclidienne, et en particulier tous les axiomes de congruence, sauf l'axiome de congruence des triangles dont il vient d'être parlé (c'est-à-dire une Géométrie où ne sera pas vérifié le théorème d'après lequel les angles à la base d'un triangle isoscèle sont égaux), et où, de plus, le *théorème* que dans tout triangle la somme de deux côtés est plus grande que le troisième est posé comme un *axiome* particulier?

Cette Géométrie existe effectivement; c'est celle de M. Minkowski ([1]), qui est caractérisée essentiellement par les conventions suivantes. Premièrement, les points à égale distance d'un point fixe O sont représentés par une surface convexe fermée de l'espace euclidien habituel dont le centre est le point O. C'est la surface étalon (*die Aichfläche*). Deuxièmement, deux segments sont *encore* dits *égaux* quand on peut les faire coïncider au moyen d'une translation de l'espace euclidien habituel. Dans la Géométrie de Minkowski, l'axiome des parallèles est vérifié.

Il existe une autre Géométrie où l'axiome des parallèles n'est pas vérifié, tandis que tous les autres axiomes de la Géométrie de Minkowski le sont; c'est la Géométrie dite de Hilbert ([2]).

Cela posé, il s'agit de discuter et d'exposer systématiquement toutes les Géométries possibles dans cet ordre d'idées. Dans le cas du plan et en admettant l'axiome de continuité, on est conduit à étudier une question traitée par M. Darboux ([3]), à savoir : Déterminer tous les problèmes du calcul des variations dans le plan où les solutions sont toutes les droites du plan. Ce sont les généralis-

---

([1]) *Geometrie der Zahlen*. Leipzig, Teubner.

([2]) Voir *Math. Annalen*, t. XLVI, p. 91, et *Enseignement math.*, 3e année, n° 3, 1901 (traduction Laugel).

([3]) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. III, p. 54.

sations fécondes et intéressantes de toutes ces questions qui font le sujet de la remarquable Thèse de M. Hamel.

L'attention toute particulière qui se porte actuellement sur le calcul des variations ajoute encore à l'intérêt de la question proprement dite. Le problème est en effet un cas particulier de ce que M. Hamel désigne sous le nom de *problème d'inversion du calcul des variations*, à savoir :

Étant donnée une certaine équation différentielle, déterminer un problème du calcul des variations qui ait pour équation de Lagrange l'équation donnée.

La première question de ce genre se présenta en Mécanique, à propos du principe hamiltonien. Helmholtz (1) donna ensuite certains résultats qui furent vérifiés par M. A. Mayer (2); mais en ce cas, où il s'agit de systèmes d'équations différentielles, la question a été résolue seulement en ce sens que l'on a assigné les conditions requises pour que chacune des équations différentielles données soit identique à chacune des équations de Lagrange; mais il n'a pas été tenu compte de la possibilité de combiner les équations différentielles données.

Dans le cas particulier où l'on n'a qu'une seule équation différentielle à considérer, le problème, considérablement généralisé d'ailleurs à d'autres points de vue, a été résolu par MM. Konigsberger (3) et Böhm (4) et d'une manière particulièrement élégante par M. Hirsch (5); en aucun de ces cas, d'ailleurs, la question n'a été poursuivie au delà du point de vue purement formel, et l'on n'a jamais examiné d'autres conditions que celles de Lagrange.

Outre son importance en Mécanique et en Géométrie, le problème d'inversion du calcul des variations fournit encore des renseignements précieux sur la portée de ce calcul dont on s'occupe tant actuellement. Aussi il ne serait pas inutile, avant de lire le travail de M. Hamel, de se familiariser avec les théories, les désignations

(1) *Crelle*, t. 100.
(2) *Sachsische Berichte*, 1896, p. 519.
(3) *Berliner Berichte*, t. II, 1896. — *Crelle*, t. 121, p. 141.
(4) *Crelle*, t. 121, p. 124.
(5) *Math. Annalen*, t. XLIX, p. 49, et t. L, p. 429.

et les notations empruntées au Traité de M. Kneser ([1]). M. Hadamard a déjà fait l'éloge de ce dernier livre dans ce *Bulletin* ([2]), et M. Stäckel vient aussi de lui consacrer un très intéressant article dans les *Archives de Grünert* ([3]). Les *Untersuchungen über Variations-rechnung* de M. Zermelo (Berlin, 1894) et le Mémoire récent de M. Osgood sur ce sujet présentent aussi un très grand intérêt. Nous profitons de l'occasion pour exprimer un vœu que nous croyons général, ce serait de voir publier les Leçons sur le calcul des variations faites par M. Hadamard au Collège de France. Depuis Lagrange, et depuis la publication du Traité de Moigno-Lindelöf, il n'a été publié, en France, aucun livre didactique sur ce calcul; c'est une lacune regrettable qui ne saurait être comblée trop tôt.

Le Mémoire de M. Hamel, qui n'a pas loin de 100 pages, ne saurait être analysé dans tous ses détails en ce peu de lignes, tant à cause des nouvelles théories exposées que de leurs nombreuses applications. Après avoir dit quelques mots sur la définition de la ligne droite, plus court chemin d'un point à un autre, nous terminerons cette trop rapide analyse en donnant la Table des matières de cette intéressante Thèse.

C'est Archimède ([4]) qui avait énoncé comme *postulat* que la droite est le plus court chemin d'un point à un autre; plus tard, une fausse interprétation du texte d'Archimède fit prendre cette propriété comme *définition* de la droite ([5]).

Un grand nombre de géomètres ont élevé les objections les plus sérieuses contre cette définition ([6]). Mais on peut, avec M. Hamel, regarder comme très licite de prendre cet axiome : La droite est le plus court chemin d'un point à un autre, comme axiome fondamental de la *Métrique*, pourvu que l'on *définisse* auparavant la

---

([1]) *Lehrbuch der Variationsrechnung*. Braunschweig, Vieweg.

([2]) *Bulletin des Sc. math.*, 2e série, t. XXV, janvier 1901.

([3]) *Archiv d. Math. und Physik.*, 3e série, t. II, p. 186.

([4]) « Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου » Λαμβάνεσθαι α'.

([5]) *Commentaire d'Anaritius sur les Œuvres d'Euclide*, p. 6 de l'édition Kurtze; *comparer* Houel, *Essai critique sur les principes de la Géométrie*, Note IV; Paris, 1882, p. 74, et aussi Veronese, *Grundzüge der Geom. Anhang*, p. 635; Leipzig, Teubner.

([6]) *Voir* en particulier Houel et Veronese (*loc. cit.*).

droite et le point. C'est ce que fait M. Hamel; il prend le postulat d'Archimède comme axiome fondamental du concept qu'exprime le mot *longueur*. Cela seul suffit à faire sauter aux yeux le rôle prépondérant que joue le calcul des variations dans toute la dissertation.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

CHAPITRE I. — *Les Géométries dans le plan.*

1. Les axiomes de la Géométrie projective.
2. Les axiomes de la Métrique.
3. Les axiomes de monodromie.
4. Applications :

   1° La Géométrie de Minkowski;
   2° La Géométrie de Hilbert et ses généralisations.

5. Un principe de dualité.
6. Remarques sur les axiomes du second groupe. Axiomes de congruence et axiome d'Archimède. Énoncé d'un théorème sur l'influence de certaines discontinuités. Théorème de M. Erdmann.
7. Démonstration du théorème précédemment énoncé. Application.
8. Singularités d'ordre supérieur.
9. De la droite de l'infini. Le Postulat d'Euclide.
10. Généralisation du concept de la « courbe étalon » (*Aichcurve* de Minkowski.

CHAPITRE II. — *Les Géométries dans l'espace.*

11. Les axiomes de la Géométrie projective et de la Métrique.
12. Les axiomes de monodromie.
13. Applications.
14. Sur les équations différentielles.
15. Interprétation géométrique des résultats. Généralisation du concept de la « surface étalon » (*Aichfläche* de Minkowski).

CONCLUSION.

L. LAUGEL.

MÉLANGES.

SUR LES INTÉGRALES DOUBLES DE FONCTIONS RATIONNELLES DONT TOUS LES RÉSIDUS SONT NULS;

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. Étant donnée une fonction rationnelle $F(x, y)$ des deux variables indépendantes x et y, je rappelle d'abord ce que l'on doit entendre par *résidu* de l'intégrale double [1]

$$\iint F(x, y)\, dx\, dy. \tag{1}$$

Nous pouvons poser

$$F(x, y) = \frac{M(x, y)}{A(x, y)^{\alpha}.B(x, y)^{\beta}\ldots L(x, y)^{\lambda}},$$

M étant un polynome en x, à coefficients rationnels en y, et A, B, ..., L désignant des polynomes irréductibles en x et y, contenant la lettre x; α, ..., λ sont des entiers positifs.

Considérons alors la fonction algébrique x_1 de y définie par

$$A(x_1, y) = 0. \tag{2}$$

Pour une valeur arbitraire de y, l'expression F considérée comme fonction rationnelle de x a un résidu relatif au pôle $x = x_1$, qui sera nécessairement une fonction rationnelle de x_1 et y, soit

$$R(x_1, y).$$

Les périodes de l'intégrale abélienne

$$2\pi i \int R(x_1, y)\, dy$$

[1] Cette notion est due à M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. IX). J'ai présenté cette théorie sous une forme différente dans le Tome I de ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, p. 52.

relative à la courbe (2) sont dites *les résidus de l'intégrale double* (1) relatives au continuum $A(x, y) = 0$. Il y aura pareillement des résidus de l'intégrale double relativement aux continuum $B = 0, \ldots, L = 0$.

2. La question que nous voulons traiter est la suivante :

Quels sont les caractères d'une intégrale double de fonction rationnelle dont tous les résidus sont nuls?

Une question analogue se pose dans les éléments quand, étant considérée une fonction rationnelle d'une variable $F(x)$, on demande à quelles conditions les résidus de l'intégrale simple

$$\int F(x)\,dx$$

sont nuls. La réponse est alors que

$$F(x) = \frac{dU}{dx},$$

U étant une fonction rationnelle de x.

Nous allons avoir, pour notre problème, une réponse présentant une analogie intéressante avec la question élémentaire que je viens de rappeler.

La condition nécessaire et suffisante pour que tous les résidus de l'intégrale double (1) *soient nuls est que l'on ait*

$$F(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \tag{3}$$

P *et* Q *étant des fonctions rationnelles de* x *et* y [1].

On aura ainsi en même temps une manière élégante d'exprimer

[1] Ce résultat se déduit immédiatement de la théorie générale des intégrales doubles de seconde espèce pour les surfaces algébriques, comme on peut le voir dans le premier fascicule (Chapitre VII) du Tome II de ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, mais ici je traite directement la question sans me reporter à aucun théorème général concernant les surfaces algébriques, en suivant la méthode que j'ai donnée récemment dans mon Cours.

les conditions pour qu'une fonction rationnelle de x et y puisse se mettre sous la forme (3).

3. Il est d'abord très aisé de montrer que la condition est suffisante. On va voir en effet que les résidus de

$$\int\int\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy$$

sont nuls, P et Q représentant des fonctions rationnelles de x et y. La chose est immédiate pour

$$\int\int\frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy,$$

puisqu'on doit prendre d'abord, pour une valeur constante donnée à y, l'intégrale

$$\int\frac{\partial P}{\partial x}\,dx$$

le long d'un contour fermé, ce qui donne *zéro*.

En ce qui concerne la seconde intégrale, soit, comme plus haut,

$$Q=\frac{M(x,y)}{A^{\alpha}B^{\beta}\ldots L^{\lambda}},$$

et désignons par x_1 la fonction algébrique de y correspondant à $A(x_1,y)=0$. Le résidu de la fonction Q de x, pour $x=x_1$, sera visiblement une fonction rationnelle

$$\rho(x_1,y)$$

de x_1 et y, et le résidu de $\frac{\partial Q}{\partial y}$, pour $x=x_1$, sera

$$\frac{d}{dy}\rho(x_1,y).$$

Un résidu de l'intégrale double

$$\int\int\frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy$$

par rapport au continuum $A(x_1,y)=0$ sera donc une période

de l'intégrale abélienne

$$2\pi i \int \frac{d}{dy}[\rho(x_1, y)]\,dy,$$

c'est-à-dire *zéro*.

4. Passons à la réciproque. Il s'agit de démontrer que :

Si tous les résidus de l'intégrale double

$$\int\int F(x, y)\,dx\,dy$$

sont nuls, on aura

$$F(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y},$$

V *et* W *étant rationnelles en* x *et* y.

En posant comme plus haut

$$F = \frac{M(x, y)}{A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda},$$

on peut tout d'abord, d'après les éléments de la théorie des fractions rationnelles d'une variable, mettre F sous la forme

$$F = \frac{\pi_1(x, y)}{A} + \frac{\pi_2(x, y)}{B} + \ldots + \frac{\pi_l(x, y)}{L} + \frac{\partial \chi}{\partial x},$$

les π étant des polynomes en x à coefficients rationnels en y et χ une fonction rationnelle de x et y. Les résidus de F relatifs au continuum $A(x, y) = 0$ sont les périodes de l'intégrale abélienne

$$2\pi i \int \frac{\pi_1(x, y)}{A'_x}\,dy$$

relative à la courbe algébrique $A(x, y) = 0$. D'après les hypothèses faites, l'intégrale précédente est une fonction rationnelle de x et y, et l'on peut par suite écrire

$$\int \frac{\pi_1(x, y)\,dy}{A'_x} = H(x, y),$$

H étant un polynome en x, à coefficients rationnels en y.

De là résulte que l'on a

$$\frac{\pi_1(x,y)}{A'_x} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial y}}{\frac{\partial A}{\partial x}}.$$

Cette identité a d'ailleurs lieu en vertu de la relation $A(x,y)=0$. On peut dire par conséquent que le polynome en x

$$\pi_1(x,y) - \left(\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial y}\right)$$

est divisible, quel que soit y, par $A(x,y)$, et nous pouvons écrire l'identité en x et y

$$\pi_1(x,y) - \left(\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial y}\right) = C(x,y)\,A(x,y),$$

C étant un polynome en x, à coefficients rationnels en y.

Ceci posé, envisageons l'expression

$$U = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{H}{A}\right) - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H}{A}\right),$$

qui est de la forme $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$, comme tout déterminant fonctionnel. D'ailleurs

$$U = \frac{\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial x}}{A}.$$

Si donc nous retranchons U de F, le terme $\frac{\pi_1}{A}$ se trouvera remplacé par

$$C(x,y),$$

où C est un polynome en x, qui est par suite de la forme $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$. Nous avons donc ainsi fait disparaître, par une soustraction d'un terme de la forme voulue, l'expression $\frac{\pi_1}{A}$. On fera le même calcul pour $\frac{\pi_2}{B}, \ldots, \frac{\pi_l}{L}$ et finalement *nous trouvons bien*

$$F(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y},$$

V *et* W *étant rationnelles en* x *et* y, comme nous voulions l'établir.

5. La recherche des conditions, pour qu'une fonction rationnelle $F(x, y)$ soit de la forme précédente, se trouve donc ramenée à la recherche des conditions pour qu'une intégrale abélienne soit algébrique; c'est un problème classique, sur lequel nous n'avons pas à insister. Le problème proposé se trouve alors très élégamment résolu.

On pourrait traiter la question relative à la fonction F d'une manière plus élémentaire, sans se reporter à la théorie des résidus des intégrales doubles. Le problème paraît en effet tout élémentaire; sa solution directe est cependant moins immédiate qu'on pourrait d'abord le penser. C'est cette solution directe que nous allons maintenant exposer.

Tout d'abord, comme nous l'avons dit plus haut, F peut être supposé de la forme

$$\frac{M(x, y)}{AB\ldots L},$$

M étant un polynome en x, rationnel en y, et A, B, ..., L des polynomes en x et y, irréductibles et renfermant x. Soit donc

$$(4) \qquad \frac{M(x, y)}{AB\ldots L} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y};$$

P et Q doivent devenir infinies pour $A = 0$, pour $B = 0$, ..., $L = 0$ et peuvent aussi devenir infinies pour d'autres courbes $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, ..., $N_1 = 0$,

Je dis d'abord qu'on peut supposer que P et Q renferment seulement à la première puissance A, B, ..., L et, s'ils existent, A_1, B_1, ..., N_1.

Supposons en effet que Q renferme A^α $(\alpha > 1)$ au dénominateur; on peut, d'après les éléments, trouver une fraction rationnelle

$$R = \frac{Z(x, y)}{A^{\alpha - 1}},$$

Z étant un polynome en x, rationnel en y, de telle sorte que

$$Q = \frac{\partial R}{\partial x}$$

contienne seulement dans son dénominateur A à la première puissance. Or on peut écrire le second membre de (4) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(P + \frac{\partial R}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(Q - \frac{\partial R}{\partial x}\right).$$

On a alors une expression de la forme

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y},$$

où Q_1 et par suite P_1 deviennent seulement infinies comme $\frac{1}{A}$. Le même raisonnement s'applique à tous les autres dénominateurs. Nous pouvons donc supposer que notre identité a la forme

$$(5)\quad \frac{M(x, y)}{AB\ldots L} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{H(x, y)}{AB\ldots LA_1B_1\ldots N_1}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{K(x, y)}{AB\ldots LA_1B_1\ldots N_1}\right];$$

H et K sont des polynomes en x, rationnels en y. Les polynomes au dénominateur sont irréductibles, distincts et renferment x. Nous ne savons rien des polynomes $A_1, B_1, \ldots, N_1$, mais on peut heureusement, comme nous l'allons voir, les faire disparaître, et c'est là *le point essentiel dans la recherche que nous effectuons.*

Soit (x_0, y_0) un point arbitraire de la courbe

$$A_1(x, y) = 0.$$

Le premier membre de (5) est une fonction holomorphe des deux variables indépendantes x et y dans le voisinage de (x_0, y_0); nous pouvons, dans le voisinage de cette valeur, l'écrire sous la forme $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, en désignant par φ une fonction holomorphe autour de (x_0, y_0). Nous aurons donc

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H}{AB\ldots LA_1\ldots N_1} - \varphi\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K}{AB\ldots LA_1\ldots N_1}\right) = 0.$$

Envisageons alors l'intégrale de différentielle totale

$$\int \frac{K}{AB\ldots LA_1\ldots N_1}\,dx - \left(\frac{H}{AB\ldots LA_1\ldots N_1} - \varphi\right)dy;$$

c'est une intégrale de différentielle totale possédant, dans le voisinage de (x_0, y_0), toutes les propriétés d'une intégrale de différen-

tielle totale de fonctions rationnelles. En particulier, *les périodes de l'intégrale de fonction rationnelle de x*

$$(6) \qquad \int \frac{K}{AB\ldots LA_1\ldots N_1}\,dx$$

ne dépendent pas du paramètre y. C'est là pour nous un point capital; nous en concluons que l'expression

$$2\pi i \frac{K}{AB\ldots L\dfrac{\partial A_1}{\partial x}B_1\ldots N_1},$$

qui, pour x racine de l'équation $A_1(x, y) = 0$, représente une période de l'intégrale (6), ne dépend pas de y. On a donc

$$\frac{K}{AB\ldots L\dfrac{\partial A_1}{\partial x}B_1\ldots N_1} = \gamma.$$

γ étant une constante convenable, et x et y étant liées par la relation $A_1(x, y) = 0$; on peut encore dire que le polynome en x

$$K - \gamma . AB\ldots L\frac{\partial A_1}{\partial x}B_1\ldots N_1$$

est divisible par $A_1(x, y)$. Envisageons alors le second membre de (5) mis sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{H(x, y)}{AB\ldots LA_1\ldots N_1} + \gamma\frac{\partial \log A_1}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{K(x, y)}{AB\ldots LA_1\ldots N_1} - \gamma\frac{\partial \log A_1}{\partial x}\right];$$

on voit de suite, d'après ce qui précède, que la fraction rationnelle sous le signe $\frac{\partial}{\partial y}$ ne renferme plus A_1 au dénominateur, et il en est par suite de même de la fraction rationnelle sous le signe $\frac{\partial}{\partial x}$.

On peut ainsi faire disparaître tous les dénominateurs A_1, B_1, ..., N_1 et, par suite, nous pouvons admettre que, dans le second membre de (5), *les polynomes connus* A, B, ..., L *figurent seuls au dénominateur*.

6. La question proposée se résoudra maintenant aisément.

Désignons par P le produit AB...L; nous avons l'identité

$$(7)\qquad \frac{M(x,y)}{P} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{H(x,y)}{P}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{K(x,y)}{P}\right],$$

où M, H et K sont des polynomes en x. Soit ν le degré de P en x; on sait que, d'une fraction rationnelle en x

$$\frac{K(x,y)}{P}$$

on peut retrancher une expression $\frac{\partial V}{\partial x}$ (V étant un polynome en x, ici rationnel en y) de telle sorte que, en posant

$$\frac{K(x,y)}{P} - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{K_1(x,y)}{P},$$

le degré de K_1 en x soit au plus $\nu - 1$. D'ailleurs, par une soustraction analogue, nous pouvons supposer que M est en x de degré $\nu - 1$ au plus. Par suite, dans l'identité (7), nous pouvons supposer que la fonction donnée M, polynome en x et rationnelle en y, est de degré $\nu - 1$ en x, et qu'il en est de même pour les deux fonctions inconnues H et K.

Les inconnues dans l'identité (7) sont alors les coefficients des diverses puissances de x dans H et K. Si le problème est possible, on devra pouvoir choisir pour ces coefficients des fonctions rationnelles de y.

Or comptons le nombre des inconnues et le nombre des conditions. Nous avons dans H et K un nombre de coefficients égal à 2ν. On doit égaler le second membre de (7) à

$$\frac{M}{P} \quad \text{ou} \quad \frac{MP}{P^2};$$

Les numérateurs sont de part et d'autre des polynomes de degré $2\nu - 1$; on a donc à identifier deux polynomes de degré $2\nu - 1$, ce qui donne 2ν relations entre les 2ν fonctions rationnelles inconnues de y. Ces relations constituent un système d'équations différentielles linéaires, car les dérivées premières des ν fonctions de y se trouvant dans K figurent dans ces relations. *On est donc ramené, en dernière analyse, à reconnaître si une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels en y*

admet comme solution une fonction rationnelle de y. C'est là un problème que l'on sait résoudre.

On voit que la solution de la question proposée prend une tout autre forme, en suivant cette voie directe, qu'avec la méthode d'abord indiquée où l'on envisageait les résidus d'une intégrale double; l'énoncé des conditions se présente sous une forme beaucoup moins élégante.

7. Il est intéressant de se rendre compte du degré d'indétermination de la solution (H, K) de l'identité (7), quand elle est susceptible de solution, en supposant toujours, comme ci-dessus, que H et K sont de degré $\nu - 1$ en x. Avec deux solutions différentes, on peut former une solution, non identiquement nulle, de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H}{P}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{K}{P}\right) = 0.$$

Alors l'intégrale

$$\int \frac{K}{P}\,dx - \frac{H}{P}\,dy \tag{8}$$

est une intégrale de différentielle totale. En posant, comme plus haut,

$$P = AB\ldots L,$$

elle est nécessairement de la forme

$$\alpha \log A + \beta \log B + \ldots + \lambda \log L,$$

α, β, ..., λ étant des constantes. Inversement, en mettant l'expression précédente sous forme d'intégrale (8), on aura des valeurs admissibles de H et K.

Il résulte de là que, si l'identité (7) a une solution, cette solution renferme les constantes arbitraires α, β, ..., λ en nombre égal à celui des facteurs irréductibles de P.

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BOREL (E.). — Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France. Recueillies et rédigées par *R. d'Adhémar*. 1 vol. in-8°; VI-91 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1902.

Le petit Livre que M. Borel nous donne cette année se rapporte à la théorie des séries à termes positifs et à quelques sujets connexes, en particulier à la théorie de la croissance. Il est inutile de dire au lecteur qu'il trouvera, dans ce nouveau Volume, le même intérêt que dans les précédents.

L'auteur s'occupe d'abord des séries dont les termes sont constants, et des critères (de convergence) de première espèce, c'est-à-dire qui ne font intervenir qu'un terme. Les critères de Bertrand sont rattachés de la façon la plus simple au théorème de Cauchy sur le caractère des deux séries

$$\sum u_n, \quad \sum a^n u_{a^n} \quad (a > 1),$$

qui, lorsque les termes positifs u_n vont en décroissant, convergent ou divergent en même temps. Après avoir montré comment, de ces critères de première espèce, on peut déduire des critères de seconde espèce concernant le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, M. Borel explique la façon dont intervient, dans l'application des critères de Bertrand à une série donnée, et pour une certaine suite qu'il apprend à former, *la plus grande des limites* de cette suite, c'est-à-dire la limite supérieure de l'ensemble de ses points d'accumulation. Paul du Bois-Reymond et M. Hadamard ont montré l'importance de cette notion, qui remonte à Cauchy. On doit aussi à ces géomètres d'intéressantes propositions, dont le principe appartient à Abel, sur la déduction de séries dont la convergence ou la divergence est de plus en plus lente, et sur des sujets voisins : M. Borel montre, en particulier, que l'on peut obtenir des séries pour lesquelles les critères de Bertrand sont toujours applicables et toujours en défaut. Parallèlement à l'étude de la convergence et de la divergence des séries, il est naturel de traiter de la convergence et

de la divergence des intégrales dont la limite supérieure est infinie. La proposition de Paul du Bois-Reymond sur la possibilité de trouver une fonction $\Phi(x)$ qui croisse plus vite que les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... dont on suppose que chacune croisse plus vite que les précédentes, montre bien l'identité des deux questions : le théorème de du Bois-Reymond est, d'ailleurs, dans un certain sens, complété par celui de M. Poincaré, sur la possibilité de trouver une fonction *entière* $E(x)$ qui croisse plus vite qu'une fonction croissante donnée $\Phi(x)$.

Toutes ces questions se rattachent à la théorie de la croissance des fonctions, théorie que l'auteur élucide sur quelques points très importants, de façon à parvenir à la notion de *croissance régulière*.

Après avoir montré nettement la nécessité qu'il y a de préciser cette notion, en construisant une fonction entière à croissance très irrégulière, qui, pour certaines valeurs de x, est comparable à

$$e^x,$$

et, pour d'autres, à

$$e^{e^x},$$

il s'attache à l'étude des *ordres d'infinitude*. Cette notion est bien élémentaire lorsqu'il s'agit de fonctions comparables à x^p, $x^q (p, q > 0)$, et l'on voit de suite que le produit de ces deux fonctions est de degré $p + q$, que la fonction obtenue en substituant la première, à la place de x, dans la seconde est de degré pq. Ces simples remarques conduiront, par une voie logique, à la notion de l'addition et de la multiplication des degrés dans des cas plus compliqués; le degré de la fonction e^x est représenté par le symbole ω qui sera, si l'on veut, le symbole de M. G. Cantor, sans que, toutefois, on ait besoin de la théorie des nombres transfinis; le degré de $\log x$ sera représenté par ω^{-1}, le degré du produit de deux fonctions étant, par définition, la somme de leurs degrés : le degré de la fonction $f[\varphi(x)]$ sera un produit dont le premier facteur sera le degré de f, et le second le degré de φ; ces définitions permettent d'abord de faire la théorie de l'addition ou de la multiplication des nombres positifs finis et des symboles ω, ω^{-1} : l'addition est commutative; la multiplication est associative et n'est pas, en général, commutative; la multiplication à droite

est distributive par rapport à l'addition ; la multiplication à gauche ne l'est pas, en général. Dès lors, tout polynome tel que

$$i = ab + c\,de + fg,$$

$a, b, c, \ldots, g$ étant des nombres positifs ou l'un des symboles ω, ω^{-1}, définit une fonction croissante de degré i. Cette notion s'étend notablement en introduisant une considération analogue à celle que l'on doit à Cauchy pour les infiniment petits; en désignant, par exemple, par $F(x \mid b)$ la fonction croissante de degré

$$i = ab + cde + fg,$$

une fonction $\varphi(x)$ telle que, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut, on ait

$$\lim_{x=\infty}\left[\frac{\varphi(x)}{F(x \mid b-\varepsilon)}\right] = \infty,$$
$$\lim_{x=\infty}\left[\frac{\varphi(x)}{F(x \mid b+\varepsilon)}\right] = 0,$$

sera dite de degré

$$j = a(b) + cde + fg.$$

Les fonctions simples, que l'on rencontre naturellement, ont un degré de la forme i ou j; les fonctions à croissance régulière seront celles que l'on peut comparer à ces fonctions simples. Je me suis borné à esquisser le point de vue auquel se place M. Borel; la non-distributivité de la multiplication à gauche laisse soupçonner dans cette théorie diverses difficultés que l'auteur met en lumière : il termine cet intéressant Chapitre en faisant un retour sur les critères de Bertrand, afin d'introduire la notion de la fonction idéale de Paul du Bois-Reymond.

Après s'être arrêté un instant sur les séries à entrée multiple pour faire ressortir l'influence du groupement des termes, et sur les intégrales multiples, qui donnent lieu à des observations analogues, il traite, en supposant toujours positifs les coefficients et la variable, des séries de la forme

$$f(x) = \sum_{=0}^{n=\infty} a_n x^n.$$

Signalons la remarque relative à la série

$$\sum_n \frac{x^n}{n^{np}} \quad (p > 0),$$

où il y a un terme qui l'emporte sur tous les autres, et le théorème qui s'en déduit :

Si, en posant

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \varphi(n),$$

la fonction $\varphi(n)$ *est croissante et de degré* $p (p > 0)$, *la fonction* $f(x)$ *sera de degré* $\omega\left(\frac{1}{p}\right)$.

Après avoir reproduit une Note du *Bulletin de la Société mathématique* (1896, p. 186) où M. Hadamard a donné, au moyen de considérations géométriques fort simples, quelques indications précieuses sur les relations entre le mode de croissance d'une fonction entière et la nature des coefficients de la série qui la définit, M. Borel s'occupe du cas où le rayon de convergence est fini, établit une proposition de M. Appell, dont M. Cesàro a su montrer la portée, sur la limite, pour $x = 1$, du rapport de deux fonctions

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n x^n$$

définies par des séries convergentes pour $|x| < 1$, divergentes pour $x = 1$, lorsque le rapport $\frac{a_n}{b_n}$ des coefficients correspondants, que l'on suppose positifs, tend vers une limite pour n infini; il montre enfin comment, dans diverses séries constituées comme les précédentes, il arrive, lorsque x tend vers un par des valeurs croissantes, qu'*un* terme devient très grand par rapport aux autres, et comment on peut déterminer le degré de croissance : c'est la même circonstance que l'on a signalée plus haut pour les fonctions entières. M. Borel compare les résultats auxquels on parvient ainsi à ceux que M. Le Roy a publiés ici même [1]. Il

---

[1] T. XXIV, 1900, p. 245.

analyse, en terminant ce Chapitre, une partie des belles recherches de M. Hadamard sur la façon dont se comporte une série sur la circonférence de son cercle de convergence, pour faire ressortir l'importance de l'hypothèse relative à la croissance régulière des coefficients de la série.

Le dernier Chapitre est consacré aux séries à deux variables, de la forme

$$\sum\sum a_{p,q}\, x^p y^q \quad (a_{p,q} > 0);$$

l'auteur s'occupe d'abord des séries entières (dans le sens de fonctions *entières*). Pour ces séries, il y a lieu de considérer l'*ordre total*, que l'auteur avait déjà introduit dans son Livre sur les *fonctions entières*, et l'ordre de la fonction d'une variable que l'on obtient en donnant à l'autre variable une valeur constante. Ces notions donnent lieu à des relations intéressantes. M. Borel analyse ensuite les résultats publiés dans le *Bulletin* par M. Lemaire [1], et rappelle les remarques de Cauchy sur les diverses régions de convergence de la série obtenue en développant

$$\frac{1}{1 - x - y}$$

(x, y réels), suivant que l'on groupe les termes d'une façon ou d'une autre. Cet exemple si simple met bien en évidence la nature des difficultés que présente la théorie des séries de plusieurs variables, et fait prévoir les ressources qu'un géomètre habile peut tirer du groupement des termes. C'est en faisant allusion aux récents travaux de M. Mittag-Leffler que M. Borel termine son Livre.

LEMOINE (E.). — GÉOMÉTROGRAPHIE OU ART DES CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES. 1 vol. in-8°, 87 pages, de la Collection *Scientia*. Paris, Naud; 1902.

C'est pour le promeneur une joie très vive que de découvrir un site nouveau dans un pays bien connu, pour lequel les cartes,

(1) T. XX, 1896, p. 286.

les plans, les guides abondent : il se hâte d'y conduire ses amis et même de se faire de nouveaux amis afin de les y conduire; il jouit de *son* paysage, qui était tout près et que l'on n'avait pas soupçonné.

Les gens qui aiment la Science sans en faire leur métier, qui s'y promènent, et se proposent surtout d'en jouir, peuvent connaître cette joie-là et être ainsi récompensés d'avoir bien placé leur affection : il ne faudrait pas croire, toutefois, que leurs découvertes sont le résultat d'une bonne chance; leur chance est en eux, dans leur activité, dans leur curiosité d'esprit, dans leur aptitude à l'effort, dans le goût qu'ils ont à suivre leurs idées, à grimper obstinément le sentier non frayé, malgré les obstacles qui l'embarrassent; ils mentent à eux-mêmes et aux autres quand ils se traitent de flâneurs : ce sont des gens qui n'aiment pas les grandes routes. Tel est le cas de M. Lemoine qui, à plusieurs reprises, en Mathématiques, et ailleurs encore, a montré ce que pouvait une initiative intelligente et suivie, en dehors des chemins battus.

Cette « Géométrographie » qu'on lui doit a pris corps; elle a pénétré dans quelques livres et dans quelques enseignements. M. Lemoine vient d'en publier, pour la collection *Scientia,* un petit Traité qui contient, outre une exposition très claire des principes, une étude, au point de vue « géométrographique », des constructions classiques de la Géométrie élémentaire; il prépare pour la maison Teubner un Livre sur le même sujet, qui n'est plus, aujourd'hui, une simple vue de l'esprit, mais bien quelque chose d'organisé et de précis. C'est qu'il y a au fond de la « Géométrographie » une idée qui ne manque ni de finesse, ni même de profondeur. Il est vrai, comme l'a observé M. Lemoine, que les géomètres, et surtout les Grecs, se sont préoccupés essentiellement de la simplicité des déductions, de la façon dont s'enchaînent, non les constructions, mais les raisonnements. Je crois bien que cette préoccupation restera la principale, mais ce n'est pas une raison pour qu'elle supprime toutes les autres : au point de vue pratique, si l'on réalisait les constructions, il est clair que leur *simplicité* et leur *exactitude* importeraient singulièrement; elles importent peut-être au point de vue théorique plus qu'on n'est disposé à le croire tout d'abord; cette disproportion entre la simplicité des constructions et la simplicité des raisonnements, que les recherches

de M. Lemoine ont mise en évidence, parfois d'une façon si inattendue, n'est peut-être, au moins dans certains cas, qu'une apparence; elle peut tenir à des raisons profondes qu'on n'aurait pas pensé à chercher, si M. Lemoine n'avait pas, tout d'abord, donné le moyen de la reconnaître, et il est permis d'espérer que la critique de la Géométrie, au point de vue « géométrographique », conduira à en perfectionner l'enseignement. Il faut donc savoir gré à l'auteur d'avoir donné à ces mots *simplicité, exactitude* un sens net, qui permette une évaluation numérique, et, par là-même, une comparaison précise. Les lecteurs se convaincront qu'il suffit, comme le dit M. Lemoine, de quelques minutes pour s'assimiler les principes de la méthode, principes qui tiennent en deux ou trois pages. Quant à l'art de manier ces principes, d'obtenir rapidement les coefficients numériques qui sont la mesure de la simplicité ou de l'exactitude d'une construction donnée, c'est affaire d'habitude, et les nombreux exemples que fournit M. Lemoine permettront d'acquérir facilement cette habitude; pour ce qui est de l'art plus subtil de parvenir à la construction la plus simple possible, il est sans doute plus difficile à acquérir, mais la possession d'un instrument de comparaison y est sans doute singulièrement précieux.

KOMMERELL (Karl). — Die Krummung der zweidimensionalen Gebilde in ebenen Raum von vier dimensionen. Inaugural-Dissertation, 53 pages. Tubingen; 1897.

Parmi les figures qui se présentent dans un espace à n dimensions, ce sont principalement celles à 1 et à $(n-1)$ dimensions qui ont été étudiées jusqu'ici. On peut renvoyer, à ce sujet, au beau Livre de M. Killing : *Nichteuclidische Raumformen in analytischer Behandlung,* où l'on trouvera de nombreux renseignements bibliographiques. On a très peu écrit sur les figures à $(n-2)$ dimensions. L'auteur a choisi comme sujet de thèse le cas particulier $n-2=2$. Ce cas spécial est caractérisé par ce fait qu'il renferme aussi les surfaces de notre espace et qu'en même temps l'existence simultanée de deux équations entre les coordon-

nées d'un point d'une surface permet de poursuivre très loin l'analogie avec les courbes dans l'espace.

M. Kommerell s'est surtout proposé le problème de transporter les théorèmes les plus importants relatifs aux surfaces de l'espace à 3 dimensions, aux surfaces de l'espace plan à 4 dimensions (figures à $n - 2 = 2$ dimensions dans un espace à $n = 4$ dimensions). Il montre que certaines propriétés se présentent de nouveau, tandis que d'autres disparaissent. Ainsi une surface dans l'espace à 4 dimensions possède en chacun de ses points 4 rayons de courbure principaux, et l'on peut de même tracer sur la surface un système quadruplement infini de lignes de courbure. Si l'on passe aux surfaces de l'espace à 3 dimensions, deux des rayons de courbure principaux deviennent infiniment grands, et au système ∞^1 des lignes de courbure correspond le système des lignes de courbure et des lignes asymptotiques de ces surfaces de notre espace.

L'analyse de toutes ces nombreuses analogies nous conduirait trop loin. Contentons-nous de dire que l'auteur généralise la notion d'indicatrice et se sert de cette généralisation pour caractériser la courbure. Il donne aussi une élégante extension du théorème de Meusnier et fait aussi l'application au cas $n - 2 = 2$ des théorèmes de M. Killing sur les formes non euclidiennes de l'espace. M. Kommerell était d'autant plus compétent pour écrire ce nouveau Chapitre de la *Théorie des surfaces* que, dès 1893, il avait, en collaboration avec M. Stahl, publié un excellent Ouvrage d'enseignement sur cette branche de la Science : *Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie*. (VI-114 pages. Leipzig, Teubner.) L. Laugel.

HEIDKE (Paul). — Ueber Kreisteilungsgleichungen von Primzahlgrad $p = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots p_\mu^{\pi_\mu} + 1$ ($\mu > 1$). Inaugural-Dissertation. Greiswald; 1899.

On sait que la méthode célèbre de Gauss, pour la résolution des équations binomes de degré p, revient en principe à résoudre successivement une suite d'équations dont la première seule a des coefficients rationnels.

Lorsque le nombre $p-1$ renferme plusieurs facteurs premiers distincts, au nombre de μ par exemple, la méthode de Gauss est susceptible d'une simplification dont on trouvera l'exposition dans l'Ouvrage si connu de M. Bachmann : *Die Lehre von der Kreistheilung,* ou encore dans le *Traité d'Algèbre* de M. Weber. En appliquant en effet les théories de Galois, on peut alors ramener la résolution de l'équation binome en question à celle de μ équations à coefficients entiers.

Si l'on désigne par $p_k^{\pi_k}$ la puissance la plus élevée du facteur premier p_k par laquelle est divisible $p-1$, ce nombre $p_k^{\pi_k}$ sera le degré d'une des équations auxiliaires de Gauss précitées. Gauss résout cette équation en résolvant successivement π_k équations de degré p_k, dont la première seule a des coefficients rationnels.

Lorsque toutes les μ équations sont ainsi résolues, on peut exprimer rationnellement au moyen de leurs solutions les racines de l'équation binome. Le principe de cette méthode a été communiqué à l'auteur par M. Study.

L'exposé de ce procédé et son application, qui semble plus aisée pour le calcul que la méthode primitive de Gauss, font l'objet de la thèse de M. Geck. L'auteur donne les calculs avec tous leurs principaux détails dans les cas $p = 7, 11, 13, 19, 29, 31$.

Les calculs, véritablement trop pénibles dans le cas $p = 23$ ($p - 1 = 2.11$) n'ont pas été poursuivis dans tous ces détails.

Pour effectuer les très longues multiplications, l'auteur de cette intéressante et consciencieuse contribution à la théorie de la *Kreistheilung* a employé une machine à calculer faisant partie du cabinet de Physique de l'Université de Greiswald. Il eût été intéressant de savoir laquelle. L. Laugel.

SCHUR (I.). — Ueber eine Klasse von Matrizen die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen. Inaugural-Dissertation, 75 pages. Berlin; 1901.

Ce travail, dont le sujet a été probablement choisi par l'auteur sous l'inspiration des savantes recherches de M. Frobenius, est d'une nature très abstraite et ne se prête guère à une analyse détaillée. Nous essayerons néanmoins, à cause de l'importance et

de la nouveauté des résultats, d'en esquisser les grandes lignes, en renvoyant le lecteur, pour les détails, au Mémoire original.

Soient

$$A = (a_{ik}), \quad B = (b_{ik})$$

deux matrices d'ordre m dont les éléments sont des variables indépendantes; soit

$$C = (c_{ik}) = AB$$

la matrice composée au moyen des deux premières; on a

$$c_{ik} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{im} b_{mk}.$$

L'auteur considère dans sa thèse les matrices T(A) d'ordre premier r, et qui jouissent des propriétés suivantes :

1° Les r^2 éléments de la matrice T(A) sont des fonctions rationnelles entières des m^2 variables a_{ik};

2° Si la matrice T(A) est transformée respectivement en T(B) ou T(C) quand on remplace a_{ik} par b_{ik} ou c_{ik}, l'équation

$$T(A)\,T(B) = T(C)$$

devra être vérifiée.

Une telle matrice T(A) est désignée par M. Schur sous le nom de *forme* ou *matrice invariante* formée avec A ou tout simplement de forme invariante de A. La formation d'une telle matrice est dite une *opération invariante*.

En particulier, si tous les éléments de T(A) sont des fonctions homogènes de degré n des variables a_{ik}, l'opération sera dite *homogène* et de degré n.

Pour reconnaître qu'il existe effectivement de telles opérations invariantes, il suffit de faire T(A) égal à A ou égal au déterminant $|A|$ de la matrice A.

Quand T(A) est une forme invariante de A, si l'on désigne par P une matrice constante quelconque, de même degré que T(A) et dont le déterminant n'est pas nul, la matrice $P^{-1}\,T(A)\,P$ possédera les propriétés définies précédemment dans les n°s 1 et 2, et par suite sera aussi une forme invariante de A. Deux pareilles formes sont dites *équivalentes*.

Si T(A) est décomposable en deux matrices $T_1(A)$ et $T_2(A)$,

et si l'on a par suite

$$T(A) = \begin{pmatrix} T_1(A) & \\ & T_2(A) \end{pmatrix},$$

on voit immédiatement que $T_1(A)$ et $T_2(A)$ sont aussi des formes invariantes de A. Toute forme invariante équivalente à une forme décomposable sera dite une *forme décomposable* ou *réductible*. Si $T(A)$ est décomposable en les formes $T_1(A)$ et $T_2(A)$, l'auteur désigne $T_1(A)$ et $T_2(A)$ sous les noms de *diviseurs de* $T(A)$; il dit encore qu'ils sont contenus en $T(A)$. Une forme invariante qui n'est égale à aucune forme décomposable est dite *irréductible* ou *primitive*.

Voici maintenant le rôle des opérations invariantes : Soit G un groupe abstrait (fini ou infini), et soient A, B, Γ, ... ses éléments; si l'on fait alors correspondre à l'élément A la matrice A, à l'élément B la matrice B, à l'élément Γ la matrice C, ..., et ainsi de suite, en sorte qu'à l'élément AB corresponde la matrice AB, ..., on dira que les matrices A, B, C, ... représentent le groupe G [1].

Cette représentation sera dite *propre* ou *impropre*, selon que les déterminants des matrices A, B, C, ... sont tous différents de zéro ou non. Cela posé, si $T(A)$ est une opération invariante et si l'on fait subir cette opération aux matrices A, B, C, ... qui représentent le groupe, les matrices

$$T(A), \quad T(B), \quad T(C), \quad \ldots$$

fourniront une nouvelle représentation du groupe G.

On peut encore exprimer ce fait comme il suit : les matrices $T(A)$, quand on remplace A par toutes les matrices de degré m, forment un groupe isomorphe au groupe linéaire homogène général à m variables.

Ces préliminaires nécessaires posés, le but principal du savant travail de M. Schur est la démonstration et l'étude des propositions suivantes : Deux formes invariantes $T(A)$ et $T_1(A)$ sont équivalentes lorsque leurs *traces* [2] (*Spuren*), c'est-à-dire la

---

[1] *Comparer* M. Frobenius, *Ueber die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen* (*Berlin Sitzungsberichte*, 1897, p. 994).

[2] *Comparer* H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, t. I, 1re édition, p. 461.

somme des termes de leur diagonale principale, sont égales, et c'est là le seul cas d'équivalence. Le nombre des opérations primitives homogènes d'ordre n distinctes (non équivalentes) est un nombre fini. Ce nombre est égal au nombre k des décompositions de l'entier n en sommes formées au plus de m termes égaux ou différents. M. Schur est aussi parvenu à déterminer les degrés et les traces des formes invariantes.

La démonstration et la découverte de ces nouveaux résultats reposent sur la proposition fondamentale suivante également trouvée et démontrée par M. Schur : Toute opération invariante homogène d'ordre n fournit, au moyen de substitutions linéaires, une représentation du groupe symétrique d'ordre n, et, réciproquement, à toute pareille représentation correspond une opération invariante et une seule, si l'on regarde les opérations équivalentes comme n'étant pas distinctes.

Nous pensons en avoir dit assez pour démontrer le mérite du beau Travail de M. Schur et pour faire voir qu'il a réalisé un progrès considérable dans ces théories si difficiles et abstraites.

En effet, avant lui la détermination complète des opérations invariantes T(A) n'avait été effectuée que dans les deux cas suivants :

1° Lorsque T(A) est du premier degré, et fonction par conséquent des variables a_{ik}; en ce cas T(A) est égal à une puissance du déterminant de A, résultat dû à M. Hurwitz (1).

2° Lorsque les éléments de la matrice T(A) sont des fonctions linéaires homogènes des a_{ik}, le déterminant $|T(A)|$ n'étant pas identiquement nul; M. Frobenius (2) a démontré qu'alors la matrice T(A) est une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{bmatrix}.$$

L. Laugel.

(1) *Zur Invarianten-Theorie* (*Math. Annalen*, t. 45, p. 381-404, § 5).

(2) *Ueber die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen.* (Second Mémoire.) (*Berlin. Sitzungsberichte*, 1899, p. 482).

MATTER (Dr Karl). — Die den Bernoulli'schen Zahlen analogen Zahlen im Korper der dritten Einheitswurzeln. Inaugural-Dissertation, 39 pages. Zurich, 1900.

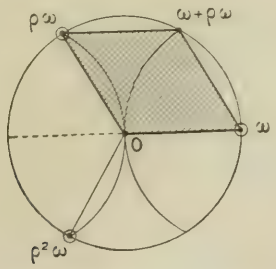
Dans un beau Mémoire publié dans le Tome LI des *Math. Annalen*, M. Hurwitz (1) a fait une étude approfondie des coefficients du développement de la fonction lemniscatique. Dans ces coefficients entrent des nombres E_n, que l'on peut nommer *nombres de Hurwitz*, et qui jouent dans ce développement un rôle analogue à celui des nombres de Bernoulli B_n dans le développement de la cotangente.

M. K. Matter s'est proposé d'étudier, au point de vue analogue, le développement de la fonction $\wp(u; 0, 4)$ de Weierstrass ($g_2 = 0$, $g_3 = 4$).

On sait que cette fonction doublement périodique a un rapport intime avec les nombres $a + b\rho$ du corps des racines cubiques de l'unité (2), ρ désignant une racine cubique de l'unité définie par l'équation

$$\rho^2 + \rho + 1 = 0.$$

Le parallélogramme des périodes de la fonction précitée est un



losange et la figure ci-jointe en donnera l'intuition complète. Si l'on désigne par ω une période primitive, l'autre période sera $\rho\omega$.

(1) *Ueber die Entwickelungskoefficienten der lemniscatichen Functionen* (*Math. Annalen*, t. LI, p. 196).

(2) M. Bachmann a consacré tout un Chapitre de son Livre bien connu sur la *Kreistheilung* à l'étude des nombres $a + b\rho$.

Tandis que les nombres de Bernoulli peuvent être définis par la formule

$$\sum_r{}' \left(\frac{1}{r^{2n}}\right) = \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

la somme devant être étendue à tous les nombres entiers réels positifs et négatifs à l'exception de zéro (ce qui est indiqué par la virgule attachée au signe *somme,* notation de Weierstrass), et où le nombre π peut être regardé comme la valeur de l'intégrale

$$\pi = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

les nombres de Hurwitz qui entrent dans le développement de la fonction lemniscatique sont définis par l'équation

$$\sum_{r,s}{}' \left[\frac{1}{(r+is)^{4n}}\right] = \frac{(2\omega)^{4n}}{(4n)!} E_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

où la somme doit être étendue à tous les entiers complexes $r + si$ du corps quadratique à l'exception de zéro, et où le nombre ω désigne la valeur de l'intégrale

$$\omega = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

De même, dans le développement de la fontion $\wp(u; 0, 4)$, les nombres $F_1, F_2, \ldots, F_n$, analogues aux nombres de Bernoulli et de Hurwitz, sont définis par l'équation

$$\sum_{r,s}{}' \left[\frac{1}{(r+s\rho)^{6n}}\right] = \frac{(2\omega)^{6n}}{(6n)!} F_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

la somme doit s'étendre à tous les entiers complexes $r + s\rho$, à l'exception de zéro, ρ désignant la racine cubique de l'unité

$$\rho = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

et le nombre ω la valeur de l'intégrale

$$\omega = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^6}}.$$

La substitution $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ rend, d'ailleurs, à l'intégrale la forme de Weierstrass, à savoir

$$\omega = 2\int_1^8 \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - 4}}.$$

Le but principal de l'intéressant travail de M. Matter est l'étude de la formation et de la représentation des nombres F_n. Ces nombres obéissent à une loi fondamentale tout à fait analogue à celle exprimée par le théorème de v. Staudt-Clausen relatif aux nombres de Bernoulli; les principaux résultats de l'intéressant et consciencieux travail de M. Matter peuvent être résumés ainsi :

Si l'on développe la fonction $p(n; 0, 4)$ aux invariants $g_2 = 0$, $g_3 = 4$, et aux périodes primitives ω et $\rho\omega$ (ρ désignant la racine cubique de l'unité et ω la valeur de l'intégrale $\omega = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^6}}$), suivant les puissances de u, les coefficients F_n du développement peuvent être mis sous la forme suivante

$$F_n = G_n + \frac{(-1)^n}{4} + \sum \frac{(2\mathfrak{a})^{\frac{6n}{p-1}}}{p}.$$

Dans cette formule G_n désigne un nombre entier. La somme $\sum$ doit être étendue aux nombres premiers p de forme $6k + 1$ pour lesquels $p - 1$ est un diviseur de $6n$.

Quant au nombre $\mathfrak{a}$ qui correspond à chacun des nombres premiers précités, c'est le nombre $\mathfrak{a}$ qui entre dans la décomposition

$$p = \mathfrak{a}^2 + 3\mathfrak{b}^2.$$

Ce nombre doit être pris avec le signe requis pour que la congruence

$$\mathfrak{a} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{6}} \pmod 3$$

ait lieu.

L'auteur donne à la fin de cette intéressante Thèse deux Tables; dans la première se trouvent les décompositions de p en ses fac-

teurs primaires m et m',

$$m = a + b\rho, \qquad m' = a + b\rho^2,$$
$$b \equiv 0 \pmod 3, \qquad a \equiv -1,$$

jusqu'à $p = 73$, ainsi que les valeurs correspondantes de $\mathfrak{A}$.

Dans la deuxième Table, il donne la décomposition précitée des nombres F_n en leur partie entière et fractionnaire jusqu'à $n = 12$. La partie entière de ces nombres croît avec une rapidité tout à fait extraordinaire. Le nombre G_5 a déjà 13 chiffres. Au delà de ce nombre G_5, M. Matter s'est borné à calculer la partie fractionnaire de F_n, car le calcul de G devient insurmontable; la seule recherche du nombre approximatif de chiffres de la partie entière de

$$F_{12} = \frac{3^{35}.5^{13}.11^6.17^4.23^3.29^2.41.47.53.59.46783069200 1}{2^2.7.13.19.37.73}$$

exigerait déjà un long et pénible calcul. L. Laugel.

EPSTEEN (Dr Saül). — Untersuchungen ueber lineare Differentialgleichungen 4. Ordnung und die zugehörigen Gruppen. Inaugural-Dissertation, 56 pages. Zurich, 1901.

On sait que Sophus Lie a fait l'application de sa théorie des groupes de transformations, et tout particulièrement celle des groupes finis (dont les transformations ne dépendent que d'un nombre fini de paramètres), à l'intégration des équations différentielles.

L'illustre géomètre norvégien démontra que, dans presque tous les cas où l'on était parvenu à abaisser l'ordre d'une équation différentielle ordinaire, la raison en est l'existence de transformations à nombre fini de paramètres pour lesquelles l'équation précitée reste invariante. Ces transformations forment nécessairement un groupe. A chaque groupe de transformations, défini par ses transformations infinitésimales, Sophus Lie fait correspondre certaines fonctions, dont l'importance était, d'ailleurs, déjà connue avant lui; ce sont les invariants différentiels qui restent inva-

riables pour toutes les transformations du groupe, et pour celles-là seulement. A l'exception de certains cas très particuliers, toute équation qui reste invariable pour toutes les transformations du groupe est une relation entre les invariants différentiels précités.

Or, quelles que soient la fécondité et la portée des méthodes du grand géomètre, elles ont quelque chose d'incomplet, car une équation différentielle ordinaire quelconque d'ordre supérieur

$$(1) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots\right) = 0$$

ne reste pas, en général, invariante vis-à-vis d'un groupe au sens de Lie.

Il est vrai que l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} + p_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + p_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

et les systèmes complets étudiés par Lie restent invariants vis-à-vis d'un groupe formé par un certain nombre de paramètres et par les $n+1$ variables $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Mais de tels systèmes sont d'une nature très particulière.

Si l'on compare à ceci la perfection de la théorie de Galois des équations algébriques, on se rendra mieux compte de ce qui manque à la théorie de Lie en remarquant les deux faits suivants; d'abord, étant donnée une équation différentielle, on ne peut pas toujours affirmer que la réduction opérée au moyen du groupe soit la seule possible; et, ensuite, certaines équations, par exemple l'équation différentielle des lignes géodésiques des surfaces du second ordre, peuvent être intégrées, quoiqu'elles n'admettent aucune transformation *en elles-mêmes*.

C'est M. Picard qui, le premier, a indiqué la voie à suivre pour généraliser les méthodes de Lie dans le sens de la théorie de Galois (*Comptes rendus,* 1883; *Annales de Toulouse,* 1897). L'exposition des belles recherches de M. Picard, aujourd'hui classiques, fit ensuite le sujet de la Thèse bien connue de M. Vessiot (Paris, 1882, et *Annales de l'École Normale supérieure*). Dans ce beau Mémoire, M. Vessiot étudia en particulier l'équation différentielle du second ordre, et quelques cas particuliers de celle du troisième.

C'est l'étude de l'équation différentielle linéaire du quatrième ordre dont les coefficients sont des fonctions de x

$$(3) \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} + 4\lambda_1 \frac{d^3 y}{dx^3} + 6\lambda_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4\lambda_3 \frac{dy}{dx} + \lambda_4 y = 0,$$

dont s'occupe M. Epsteen dans sa remarquable dissertation inaugurale. Ce domaine de recherches très étendu n'a été jusqu'ici que très peu étudié, et l'auteur n'a pu qu'effleurer un sujet si vaste.

Sa Thèse est divisée en trois Chapitres ou Sections. En voici la Table des matières :

INTRODUCTION.

CHAPITRE I. — *De l'intégration rationnelle des équations différentielles linéaires du quatrième ordre.*

1. De l'intégration rationnelle. Énoncé du problème. Domaine de rationalité.
   Invariants formels et numériques.
   Groupe des fonctions invariantes.
   Équations transformées.
   Résolvantes.
   Un théorème analogue au théorème de Lagrange.
   Groupe de rationalité (groupe de transformations).
   Type caractéristique invariant.
   Résumé.
2. Subdivision du problème.
   Groupes intégrables.
   Condition d'intégrabilité.

CHAPITRE II. — *Des groupes dans* R_4.

3. Groupes homogènes linéaires dans R_4.
   Groupes connus dans R_4.
   Groupes projectifs dans R_3.
   Groupes dans R_4.
   Résumé.
   Remarques.
4. Sous-groupes à trois termes.
   Méthode pour les déterminer.
   Méthode des groupes dérivés.
   Combinaison des deux méthodes.
5. Intégrabilité des groupes.

6. Démonstration que les groupes sont algébriques.
   Première méthode.
   Deuxième méthode.
7. Sous-groupes invariants.

CHAPITRE III. — *Applications.*

8. Première réduction au moyen du groupe spécial linéaire.
   Équation différentielle d'ordre n.
   Équation différentielle du quatrième ordre.
9. Deuxième réduction. Relation cubique entre les intégrales.
10. Troisième réduction. Relation quadratique entre les intégrales.
11. Réduction au moyen de résolvantes assignées.
   La résolvante est l'équation différentielle du cylindre elliptique, c'est-à-dire $\frac{d^2y}{dx^2} + (q^2 + 2q_1 \cos 2x)y = 0$.
   La résolvante est l'équation de Lamé.
   La résolvante est l'équation de Lagrange.
   La résolvante est l'équation de Legendre.
   La résolvante est l'équation de Bessel.

CONCLUSION.

Les sept premiers paragraphes renferment l'étude préliminaire du sujet, et cette étude est faite aussi complètement qu'elle peut l'être en une trentaine de pages. Le n° 1 est un aperçu des théories de MM. Picard et Vessiot, appliquées à l'équation (3). Ce résumé est nécessaire aux développements qui suivent, et présente un intérêt tout particulier, car il éclaircit sur un exemple spécial une théorie peut-être assez difficile à saisir au premier abord dans toute sa généralité. Les n°s 2 et 7 sont consacrés aux problèmes soulevés dans le n° 1; le Chapitre III est consacré aux applications, et dans le n° 11 est examinée l'intéressante question inverse : Étant donnée une résolvante, retrouver l'équation primitive.

En résumé, la méthode de M. Epsteen consiste à déterminer le plus grand nombre possible des groupes de R_4 et à faire la recherche des réductions correspondantes, en supposant successivement que chaque groupe est celui de l'équation différentielle. Le problème reviendrait ainsi tout naturellement à la détermination de tous les groupes de R_4.

L'auteur détermine un certain nombre de ces groupes, pour la plupart primitifs, et il y choisit les termes linéaires homogènes.

Mais ceci ne suffit pas. Il est, en effet, possible que quelques-uns des termes laissés de côté soient transformables en la forme linéaire homogène, et, par suite, pour résoudre complètement le problème il faut encore examiner ces cas. Les termes linéaires homogènes, considérés par l'auteur, forment encore un groupe.

Pour distinguer si les groupes sont intégrables ou non, M. Epsteen applique les théories de Lie-Engel (n° 2) et la méthode des groupes dérivés. Il considère 14 groupes, qu'il serait trop long d'énumérer, et le seul intégrable est celui qui laisse invariante la surface de Cayley

$$4x_1x_2x_3 - x_3x_4^2 - 2x_1^3 = 0.$$

Les résultats de l'auteur semblent donc indiquer que, si quelques groupes sont intégrables, le plus grand nombre ne l'est pas. Ceci montre qu'en général l'équation proposée (3) ne peut être résolue au moyen de l'intégration d'un certain nombre d'équations linéaires du premier ordre, mais que le problème de l'intégration peut être ramené à l'intégration d'une ou plusieurs équations différentielles d'ordre inférieur au quatrième.

M. Epsteen démontre aussi que tous les groupes, comme on pouvait s'y attendre, sont algébriques (n° 1, I; n° 2).

Comme les groupes du n° 3 laissent invariante une relation, soit cubique, soit quadratique, entre les intégrales, on a à résoudre le problème qui consiste à opérer les réductions correspondantes. Dans les n°s 9 et 10, l'auteur donne plusieurs exemples de ces réductions.

Enfin, au n° 11 sont déterminées les équations du quatrième ordre dont les intégrales peuvent être représentées au moyen de certaines fonctions connues d'ordre moins élevé.

Il reste encore un problème à traiter, beaucoup plus difficile d'ailleurs (n° 1, IV), à savoir : Déterminer le groupe d'une équation différentielle donnée.

L'auteur, estimant que cette question dépassait beaucoup le cadre de sa Thèse, l'a réservée pour une autre occasion.

L. Laugel.

BOUVIER (E.). — La méthode mathématique en Économie politique. 1 vol. in-8°; 145 pages. Paris, Larose; 1901.

Le Livre de M. Bouvier, professeur à la Faculté de droit de l'Université de Lyon, est un plaidoyer modéré et modeste en faveur de l'introduction des méthodes mathématiques en Économie politique. L'auteur risque de passer pour un esprit singulier et dangereux. Comment! il fait attention à ce qui se dit dans cette Université de Lausanne, où M. Walras a enseigné, où M. Paréto enseigne à son tour, lui qui est professeur à Lyon, en France, et professeur de droit? Ignore-t-il que, dans notre pays, on ne peut « faire » son droit ou sa médecine qu'après des études exclusivement littéraires? Serait-il capable de penser que, dans notre société moderne, les avocats et les juges peuvent avoir à traiter des affaires où les sciences interviennent, et des cas qui ne sont point prévus dans le *Digeste?* Est-il possible qu'il regrette de ne pas savoir les Mathématiques? En tout cas, c'est un homme infesté par l'esprit philosophique, qui parle de l'unité de la Science, du mutuel appui que ses diverses parties doivent se prêter, qui cite non seulement M. Boutroux, mais encore M. Poincaré, qui ne rejette pas ce qu'il ne connaît point, qui tâche même de s'en rendre compte, qui trouve des raisons pour réfuter les arguments de ceux qui ne veulent point entendre parler, en Économie politique, d'équations, d'inconnues, de courbes ou d'intégrales.

A vrai dire, ces arguments sont fort amusants. On soutient que les Mathématiques n'ont rien à faire ici, parce qu'il s'agit de phénomènes variables, et non de constantes, ou bien parce que les Mathématiques sont une science exacte, et que les phénomènes économiques ne peuvent être connus qu'approximativement, ou encore parce qu'il est arrivé à quelques mathématiciens de se tromper, et que leur science est assurément inutile dès qu'elle n'est pas infaillible, ou enfin parce que les Mathématiques sont bien obscures pour ceux qui ne les savent pas. A la vérité cette dernière assertion est assez exacte. Mais, à la lecture de pareils arguments, un mathématicien ne peut s'empêcher de devenir

modeste, en pensant à ce qu'il risquerait de dire s'il se mêlait de parler d'Économie politique. Un autre argument, sur lequel on peut s'arrêter un instant, est que les mathématiciens négligent volontiers ce qui les gêne; voici, par exemple, M. Walras, qui spécule sur un milieu économique qui est purement idéal. Le reproche vaudrait contre les conséquences de ces spéculations, si l'on prétendait les appliquer de suite à la réalité : il a à peu près la même portée que celui qu'on adresserait à un physicien, parce qu'il étudie la chute des corps dans le vide, et non dans l'air où ils sont plongés : il manifeste simplement l'ignorance de la méthode de ces sciences expérimentales, où l'on s'efforce d'isoler les causes, de les étudier dans des conditions simples, quitte à superposer au contraire leurs effets pour expliquer la réalité. M. Walras n'a sans doute pas la prétention d'avoir mis en formules toute l'Économie politique.

Que les Mathématiques puissent intervenir utilement en Économie politique, soit pour élaborer les résultats de la statistique et ses tableaux de nombres, soit pour éclairer certains points de la théorie des échanges, c'est ce qui, théoriquement, n'est pas douteux. Au point de vue pratique, la complication des phénomènes sociaux constitue assurément une grande difficulté. La mise en équation des problèmes réels est toujours difficile. On y pense avec découragement tant qu'elle n'est pas réalisée, avec étonnement lorsque quelqu'un y a réussi. M. Walras s'est efforcé d'avoir toujours autant d'équations que d'inconnues : cela est fort bien; on peut regretter que, dans ses équations, il reste parfois plus d'une *fonction* inconnue; il ne faut pas le lui reprocher, ni en conclure que les Mathématiques n'ont rien à faire avec l'Économie politique. Les problèmes de la Météorologie sont des problèmes déterminés qui, en fin de compte, sont du ressort des Mathématiques : on est loin, à coup sûr, de posséder une formule qui permette la prévision du temps. Il n'est pas sûr que les phénomènes économiques soient plus simples que ceux de la Météorologie. Est-ce une raison pour ne pas étudier les données numériques de l'une ou l'autre science, et de tirer mathématiquement des lois que l'on connaît, ou des hypothèses qu'on peut faire, les conséquences qu'elles comportent? Assurément la possibilité de progrès importants, dans cette voie, ne sera démontrée que par la réalisation même de ces progrès :

est-ce une raison pour dédaigner et railler ceux qui s'y efforcent? M. Bouvier a raison : le dédain que l'on affecte pour un ordre de recherches est presque toujours la marque de l'incapacité où l'on est d'entreprendre ces recherches et même de les comprendre, c'est un moyen court et facile de cacher aux autres et à soi-même cette incapacité; mieux vaudrait faire, tout simplement, ce dont on est capable. M. Bouvier termine son Livre en insistant sur la nécessité de donner aux jeunes gens une instruction générale : Eh! quoi? Il y a maintenant, dans notre pays, des gens qui parlent d'une « instruction générale » d'où les Sciences ne seraient pas exclues? Que cela est nouveau et audacieux!

J. T.

DASSEN (C.-C.). — METAFISICA DE LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS FUNDAMENTALES (espacio, tempo, cantidad, limite) Y DEL ANALYSIS LLAMADO INFINITESIMAL. Tesis para optar al titulo de Doctor en ciencias fisico-matematicas. 1 vol. in-8°; 183 pages. Buenos-Aires, Tailhade et Rosselli; 1901.

La thèse de M. Dassen représente un travail notable de lecture et de réflexion. Les « informations » de l'auteur sont nombreuses; il a puisé à des sources fort diverses et il a su tirer parti de travaux récents. L'effort de pensée nécessaire pour embrasser, comme a voulu le faire M. Dassen, l'ensemble des principaux concepts mathématiques est d'ailleurs considérable, et le sujet est si vaste qu'on serait malvenu de reprocher à l'auteur de ne pas en avoir approfondi toutes les parties. Celui-ci s'occupe d'abord, au point de vue philosophique, de divers concepts qui, comme l'espace, le temps, la quantité, sont fondamentaux en Mathématiques. Peut-être accepte-t-il bien rapidement l'opinion, d'ailleurs soutenue par des mathématiciens éminents, que la théorie de Kant sur l'espace, comme forme *a priori* de la sensibilité, est ruinée par le développement de la Métagéométrie. Assurément Kant n'a ni connu ni prévu les diverses géométries, et, quoiqu'il ne faille s'étonner de rien dans ces matières, je ne crois pas qu'aucun de ses disciples trouve dans la possibilité des diverses géométries une confirmation de la théorie kantienne; on se

contentera, si cela n'est déjà fait, de plaider la conciliation; mais je me figure que Kant, s'il avait connu les spéculations modernes sur l'espace, n'aurait pas, pour si peu, changé sa pensée fondamentale : tout au plus en aurait-il modifié l'expression et aurait-il atténué quelques arguments; cela est aujourd'hui l'affaire de ceux qui se réclament de lui; les savants vont bien vite en besogne quand ils s'imaginent qu'un argument de fait renverse une doctrine philosophique : l'importance philosophique de la Science consiste bien plutôt dans les changements, d'ailleurs très lents, qu'elle apporte dans la façon de penser de quelques-uns.

Pour la partie plus mathématique de son travail, c'est à P. du Bois-Reymond et à son *Allgemeine Functionentheorie* que M. Dassen se réfère le plus souvent : nous retrouvons chez lui cet idéaliste et cet empiriste qui exposent tour à tour, chez le penseur germanique, leurs différentes conceptions. Renan a écrit jadis des *Dialogues philosophiques* dont les personnages sont, dit-il, les lobes de son cerveau. Peut-être P. du Bois-Reymond avait-il un lobe idéaliste et un lobe empiriste; même dans l'*Allgemeine Functionentheorie,* ces deux personnages sont un peu fatigants, et je crois qu'il est permis de les y laisser. Toutefois, en s'adressant, pour en discuter et en développer les idées, à un penseur et à un mathématicien tel que P. du Bois-Reymond, M. Dassen s'adressait très bien. Outre les contributions importantes qu'il a apportées à l'ensemble des faits mathématiques, P. du Bois-Reymond a eu des idées originales et fécondes dont on a fait, à plusieurs reprises, ressortir la grande portée, et, quoiqu'il ait un peu abusé de son empirisme et de son idéalisme, personne ne s'avisera sans doute, d'ici longtemps, d'écrire sur la philosophie de l'Analyse mathématique sans avoir lu son *Allgemeine Functionentheorie*. Il semble, par contre, que M. Dassen se soit, d'une part, trop attaché à développer les idées d'auteurs dont les écrits sont singulièrement moins importants, et qu'il ne se soit pas arrêté suffisamment sur quelques hommes qui, comme M. Dedekind, M. G. Cantor, et les logiciens de l'école italienne, ont eu sur la pensée des mathématiciens modernes une influence considérable. Les quelques lignes consacrées à la notion d' « ensemble », en particulier, sont bien courtes. Dans un Livre où l'on cite l'exemple classique de Weierstrass d'une fonction continue

qui n'admet point de dérivée, il était sans doute intéressant de signaler, au point de vue historique, le raisonnement par lequel Duhamel prétend établir l'existence d'une dérivée pour une fonction continue et croissante dans un intervalle; mais il convenait d'accompagner ce raisonnement de quelques lignes critiques; puisque, aussi bien, ce raisonnement a trompé Duhamel, qui, de son temps, a été admiré pour sa clarté et sa rigueur, il pourrait peut-être tromper encore quelque lecteur inexpérimenté qui n'aurait pas bien compris le reste du Livre de M. Dassen. Puis, si l'on ne peut passer sous silence les arguments de Zénon d'Élée, qui montrent, sous une forme singulièrement ingénieuse, le trouble que l' « infini mathématique » a jeté dans l'esprit des penseurs grecs, à quoi bon s'arrêter si longtemps sur les absurdités que l'on obtient en raisonnant sur les séries ou les limites comme il ne faut pas raisonner?

Passe encore pour les raisonnements qui, comme celui de Duhamel auquel je faisais allusion tout à l'heure, ou certains exemples classiques, ont un intérêt historique; mais il ne faut pas, sous prétexte de philosophie, multiplier les exemples de cette nature et en forger à plaisir. Enfin, pour en finir avec les critiques, certaines citations sont par trop écourtées : à lire les dernières pages de M. Dassen, on pourrait s'imaginer que Cauchy, M. Pringsheim et M. Borel n'ont aucun souci de la rigueur.

M. Dassen serait sans doute désolé que cette opinion-là se répandît à Buenos-Aires.

MÉLANGES.

SUR LES CALCULATEURS CINÉMATIQUES DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

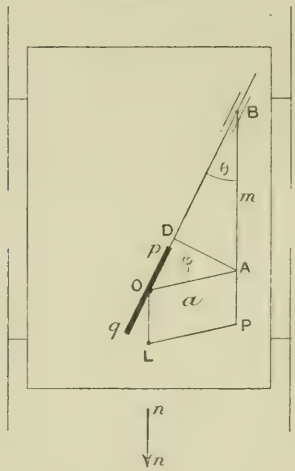
PAR M. N. DELAUNAY.

Dans la présente Note je donne une description d'un mécanisme dans lequel une roulette décrit un angle $\varphi = \operatorname{am} u$ chaque fois qu'on tourne une roue d'un angle u. On verra, de plus, qu'on

peut prendre facilement, à l'aide d'un compas, les longueurs $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $m \operatorname{dn} u$ sur ce mécanisme pour chaque argument u donné et qu'on peut construire un instrument pour le calcul de l'intégrale elliptique de seconde espèce.

1. Soit AB (*fig.* 1) une bielle dont le point A glisse sur un cercle décrit avec un rayon (manivelle) OA, tandis qu'un autre

Fig. 1.



point B de la bielle glisse sur la droite OB menée par le centre O. Posons

$$AB = m, \qquad OA = a, \qquad \frac{a}{m} = k, \qquad AOB = \varphi, \qquad ABO = \theta.$$

On aperçoit facilement qu'entre les angles φ et θ existe une relation

$$\sin\theta = k \sin\varphi.$$

Lorsqu'on conçoit φ comme l'amplitude d'un argument u, on a

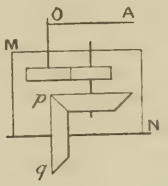
$$\cos\theta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \Delta\varphi = \operatorname{dn} u,$$

$$(1) \qquad u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos\theta},$$

$$(2) \qquad du = \frac{d\varphi}{\cos\theta},$$

Dans notre mécanisme, le système *bielle et manivelle* est posé sur une charrette (*fig.* 1) d'une telle manière que la charnière O est fixée sur la charrette et que la règle OB, ayant une rainure, peut pivoter autour du point O. La bielle AB porte au point B une glissière qui conduit le point B suivant la règle OB. Le point P du prolongement de la bielle porte une charnière par laquelle la bielle est liée avec la tige LP pivotant autour de la charnière L fixée sur la charrette. Cette disposition maintient le parallélisme entre la bielle AB et les roues de la charrette. La règle OB porte un châssis MN (*fig.* 2) perpendiculaire à OB. Le châssis porte

Fig. 2.



l'axe d'une roulette pq, de sorte que cette roulette reste toujours dans le plan vertical passant par le point O. Dans ces conditions, la roulette pq fait toujours l'angle variable θ avec la bielle et avec les roues de la charrette dont les rayons sont égaux à l'unité de longueur.

Si la charrette parcourt un chemin du dans la direction nn, ses roues tournent d'un angle du. La projection de ce mouvement sur la normale du plan de la roulette ne produit aucune rotation de la roulette. La projection du mouvement du sur le plan de la roulette tourne celle-ci d'un angle $du \cos\theta$ lorsque la roulette roule sur une table, comme dans l'instrument d'Amsler mesurant le moment d'inertie.

Dans le châssis MN se trouve un engrenage (*fig.* 2) tel que la manivelle OA tourne du même angle que la roulette pq. Dans ces conditions, la manivelle OA tourne d'un angle $du \cos\theta$ pour chaque translation du de la charrette, et la relation (2) se trouve remplie.

Cela posé, admettons que la charrette parcourt un chemin $u = \int du$; alors l'angle que la manivelle OA fait avec la règle OB devient égal à φ, qui est lié avec u par la relation (1), et l'on

aura

$$\varphi = \operatorname{am} u, \qquad AD = \operatorname{sn} u, \qquad OD = \operatorname{cn} u, \qquad BD = m \operatorname{dn} u,$$

si l'on prend $OA = a$ pour l'unité de longueur.

OA fait des tours complets, OB oscille autour du point O.

La position initiale de la règle OB doit être parallèle aux roues de la charrette; il faut donc qu'elle soit marquée par un index sur la charrette pour l'ajustage initial du mécanisme. Toutes les tiges se rangent, dans la position initiale, sur la droite parallèle aux roues et passant par le milieu de la charrette.

2. Je voulais transformer ce mécanisme pour le calcul de l'intégrale elliptique de seconde espèce $E = \int_0^\varphi \Delta\varphi \, d\varphi$, qui donne la relation $dE = d\varphi \cos\theta$, lorsqu'un de mes élèves, l'étudiant de l'Institut polytechnique de Varsovie M. Lipetz, a inventé un mécanisme calculant cette intégrale. M. Lipetz s'est servi de mon ellipsographe dont la description se trouve dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XIX. Dans cet ellipsographe il y a une tige pB pivotant autour d'un point fixe p, et, lorsqu'on tourne cette tige, un point D de l'ellipsographe décrit une ellipse qui est une projection orthogonale du cercle décrit par le point B. On voit bien que l'angle que fait la tige pB avec le petit axe de l'ellipse est égal au complément φ de l'anomalie excentrique. Après avoir fait cette remarque et sachant qu'entre le complément φ de l'anomalie excentrique et la longueur s de l'arc de l'ellipse il y a une relation $s = a \int_0^\varphi \Delta\varphi \, d\varphi$, M. Lipetz ajoute une roulette au point D de l'ellipsographe. Il faut que l'axe de cette roulette puisse tourner autour de l'axe vertical passant par le point D. On met le mécanisme dans une telle position que D est au bout du petit axe de l'ellipse. Dans cette position initiale, l'axe de la roulette doit être mis parallèlement à la tige pB pour que le plan de la roulette passe par la tangente à l'ellipse. La position initiale étant ainsi réglée, on tourne la tige pB d'un angle φ, ce qui fait parcourir à la roulette le chemin s égal à l'arc de l'ellipse, et la roulette tourne d'un angle proportionnel à $\int_0^\varphi \Delta\varphi \, d\varphi$.

N. Delaunay.

SUR UN THÉORÈME RELATIF A DES MOYENNES;

PAR M. ANDRÉ DURAND,
Professeur à Besançon.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n nombres *positifs* qui ne sont pas tous égaux. Soit S_n^p la somme des produits p à p de ces n quantités, et $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ le nombre de ces produits. Appelons *moyenne d'ordre p* et désignons par M_p la quantité $\sqrt[p]{\frac{S_n^p}{C_n^p}}$ (M_1 est alors la moyenne arithmétique $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, M_n est la moyenne géométrique $\sqrt[n]{a_1, a_2, \ldots, a_n}$).

Je dis que l'ordre des grandeurs de ces quantités est

$$M_1 > M_2 > M_3, \quad > M_p > M_{p+1} > \ldots > M_n.$$

Deux de ces moyennes ne pouvant être égales que si *tous* les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont égaux, dans ce cas ces moyennes sont *toutes* égales entre elles.

Démonstration. — Je dis que $M_p > M_{p+1}$. Je considère un système de valeurs des nombres a, tel que ces nombres ne soient pas tous égaux. Soit ω la valeur de M_p; parmi les nombres a, il y en a qui sont supérieurs à ω, et d'autres qui sont inférieurs à ω (s'ils étaient tous supérieurs à ω, on aurait $S_n^p > C_n^p \omega^p$, donc $M_p > \omega$).

Je considère alors deux nombres, pris parmi les nombres a, l'un supérieur à ω, l'autre inférieur,

$$a_1 = \omega + \alpha, \qquad a_2 = \omega - \beta, \qquad (\alpha > 0, \quad \beta > 0).$$

Je puis écrire :

$$S_n^p = H + K(a_1 + a_2) + L\, a_1 a_2,$$
$$S_n^{p+1} = J + H(a_1 + a_2) + K a_1 a_2.$$

L désigne la somme des produits $p-2$ à $p-2$ des lettres a, sauf a_1 et a_2.

K désigne la somme des produits $p-1$ à $p-1$ des lettres a, sauf a_1 et a_2.

H désigne la somme des produits p à p des lettres a, sauf a_1 et a_2.

J désigne la somme des produits $p+1$ à $p+1$ des lettres a, sauf a_1 et a_2.

Je remplace a_1 et a_2 respectivement par ω et $\omega+\varepsilon$, ε étant un nombre, positif ou négatif, tel que S_n^p ne change pas de valeur : il faut que ε satisfasse à l'équation

$$(1) \qquad \Delta(S_n^p) = (K + L\omega)(\beta - \alpha + \varepsilon) + L\alpha\beta = 0.$$

S_n^{p+1} varie ; sa variation est

$$\Delta(S_n^{p+1}) = (H + K\omega)(\beta - \alpha + \varepsilon) + K\alpha\beta,$$

en remplaçant $\beta - \alpha + \varepsilon$ par la valeur tirée de la première équation

$$\Delta(S_n^{p+1}) = K\alpha\beta - \frac{L\alpha\beta}{K + L\omega}[H + K\omega] = \frac{\alpha\beta}{K + L\omega}[K^2 - HL].$$

Je dis que cette quantité est positive, donc que S_n^{p+1} *a augmenté.* Quand les n nombres auront été rendus égaux à ω, S_n^{p+1} aura augmenté à chacune de ces opérations, et sera devenu égal à $C_n^{p+1}\,\omega^{p+1}$, M_{p+1} sera devenu égal à ω, et par suite à M_p; donc quand les nombres a n'étaient pas tous égaux à ω, *on* avait $M_p > M_{p+1}$.

Il n'est pas difficile de vérifier que $K^2 - HL > 0$, c'est-à-dire que le carré de la somme des produits k à k de m nombres *positifs* est supérieur au produit de la somme des produits $k-1$ à $k-1$ par la somme des produits $k+1$ à $k+1$.

1° K^2 contient d'abord la somme des carrés des produits k à k; ces termes ne figurent pas dans HL.

2° Ces termes mis à part, un terme quelconque du carré K^2 figure dans le produit LH, et réciproquement, mais le coefficient numérique est toujours plus grand dans le développement de K^2 que dans celui de HL.

Le coefficient de $a_1^2\, a_2^2 \ldots a_i^2\, a_{i+1} \ldots a_{2k-i}$ dans $K \times K$ est le

nombre des combinaisons de $2(k-i)$ lettres différentes, $k-i$ à $k-i$, soit

$$A = \frac{[2(k-i)]!}{(k-i)!(k-i)!}.$$

Le coefficient du même terme, dans HL, est le nombre de combinaisons de $2(k-i)$ lettres différentes, $k-i-1$ à $k-i-1$ (ou $k-i+1$ à $k-i+1$), soit

$$B = \frac{[2(k-i)]!}{(k-i-1)!(k-i+1)!}.$$

On a bien $A > B$, car cette inégalité revient à

$$\frac{1}{k-i+1} < \frac{1}{k-i}.$$

Application : une équation du degré n, qui admet n racines positives, peut être écrite ainsi :

$$x^n - \frac{n}{1} a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2^2 x^{n-2} + \ldots$$
$$+ (-1)^p C_n^p (a_p)^p x^{n-p} + \ldots + (-1)^n (a_n)^n = 0.$$

Elle ne peut avoir toutes ses racines réelles et positives que si

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > 0.$$

Mais ces conditions nécessaires ne sont pas suffisantes.

NOTE RELATIVE A L'ARTICLE PRÉCÉDENT.

L'élégante proposition établie par M. André Durand peut se démontrer aussi de la manière suivante :

Considérons l'équation algébrique

$$(1) \quad x^n - \frac{n}{1} M_1 x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} M_2^2 x^{n-2} y^2 - \ldots + (-1)^n M_n^n = 0$$

écrite sous forme homogène. Si cette équation a toutes ses racines réelles positives et distinctes, il est évident qu'il en est de même

de toutes les équations du second degré,

$$(2)\qquad \begin{cases} x^2 - 2\,M_1\,xy + M_2^2\quad y^2 = 0, \\ M_{k-1}^{k-1}\,x^2 - 2\,M_k^k\,xy + M_{k+1}^{k+1}\,y^2 = 0, \end{cases}$$

qui ne sont autres que les dérivées d'ordre $n-2$ prises, soit par rapport à x, soit par rapport à y, de l'équation (1). On aura donc

$$\begin{aligned} &M_1^2 - M_2^2 > 0, \\ &M_4^2 - M_1 M_3^3 > 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &M_k^{2k} - M_{k-1}^{k-1}\,M_{k+1}^{k+1} > 0. \end{aligned}$$

On déduit de ces inégalités

$$M_2 < M_1.$$

$$M_3^3 < \frac{M_2^4}{M_1} < M_2^3$$

et par conséquent

$$M_3 < M_2.$$

En continuant de la même manière on aura

$$M_{k-1} < M_k. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

On verra facilement que le raisonnement s'applique toutes les fois que les n racines de l'équation (1) ne sont pas confondues.

G. Darboux.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KLEIN (F.). — ANWENDUNG DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG AUF GEOMETRIE. EINE REVISION DER PRINCIPIEN. VORLESUNG GEHALTEN WÄHREND DES SOMMERSEMESTERS 1901, von F. *Klein*, *Ausgearbeitet* von *Conrad Müller*. 1 vol. in-8°; 468 pages lithogr., Liepzig, Teubner; 1901.

Plus d'un lecteur français, en lisant les leçons professées par M. Klein pendant le semestre d'été de l'année dernière, goûtera un double plaisir : assurément, il prendra un vif intérêt au sujet et à la façon dont il est traité; il se plaira ainsi à connaître une forme d'enseignement très différente de celle dont nous avons l'habitude : la parole du maître est là toute vivante; elle a été sténographiée avec intelligence. On n'a devant les yeux ni un livre, ni un mémoire, mais des *leçons;* des leçons qui, sans doute, ont été longuement élaborées, dont on connaît, par les autres publications de l'auteur, la plupart des idées, mais où l'on sent bien que l'on a affaire à un professeur, non à un écrivain, où la parole à une couleur, une spontanéité, même une certaine fantaisie que l'on ne se permet pas d'habitude en écrivant. Il semble même, tant l'impression de la lecture est nette, que l'on fasse connaissance avec les auditeurs, que l'on devine ce qui les attire et ce qui les retient auprès du maître, ce qu'ils vont chercher chez lui; on soupçonne, aux explications qu'il donne, à la façon dont il insiste, ce que savent ou ce qu'ignorent ses élèves.

Tout d'abord le lecteur sera frappé de la liberté d'allure de cet enseignement, coupé par des digressions, des réflexions philosophiques, des indications de lectures à faire, passant, quoique l'unité de la pensée soit visible, d'un sujet à l'autre, effleurant celui-ci, approfondissant celui-là dans les petits détails; nous ne connaissons guère cette liberté-là; sans doute, une loi encore récente la donne aux professeurs des Universités françaises; elle n'est pas encore entrée dans les mœurs; les uns, en raison peut-être d'une excessive modestie, n'ont pas osé la prendre; d'autres ont devant les yeux un but trop précis, ils voient trop la longueur du chemin

qu'il leur faut parcourir pour s'en écarter, et prendre le temps de faire admirer à leurs auditeurs les sites qu'ils rencontrent. C'est là une satisfaction dont M. Klein ne se prive pas, et, à la vérité, il excelle à exciter l'admiration. Au reste, s'il entend bien que ses élèves emportent de son cours un certain nombre de faits précis, choisis parmi ceux qui sont les plus importants, il entend surtout les faire réfléchir, exciter leur initiative, leur inspirer le goût de la recherche personnelle; je m'imagine que, au besoin, il ne lui déplairait pas de les scandaliser un peu, il s'efforce, au moins, de leur inspirer le mépris de la science purement livresque, de ce qu'il appelle le *savoir scolastique,* des choses que l'on a apprises et que l'on n'a point faites siennes, que l'on répète parce qu'on les a apprises, sans les avoir soumises à une critique personnelle.

L'idée maîtresse qui domine tout le cours est la distinction entre ce que M. Klein appelle les *Mathématiques de précision* et les *Mathématiques d'approximation.* (*Präcisions- und Approximationsmathematik.*) C'est une distinction sur laquelle il est revenu à plusieurs reprises, et qu'il a posée avec une entière clarté dans ses *Lectures de Chicago.* A cette distinction se rattache une vérité philosophique assez grosse de conséquences. Cette vérité philosophique, pour ceux qui y ont réfléchi, fait l'effet d'une naïveté : personne, sans doute, n'oserait la contester, mais bien peu de gens la regardent en face; plus rares encore sont ceux qui prennent le parti de s'y résigner franchement : elle consiste en ce que toutes nos mesures sont approchées; aucune mesure n'est exacte; l'observation ne nous apprend jamais autre chose que ceci : telle quantité est comprise entre telles ou telles limites. Cela, sans doute, n'est pas nouveau. On ne commence guère à exposer une science d'observation, sans le dire; puis, maître et élèves se hâtent de l'oublier. Je crois bien que les auditeurs de M. Klein ne l'oublieront pas, et qu'ils resteront, d'ici longtemps, troublés de cette vérité si simple; jamais elle n'a été mise en lumière avec plus de force et de franchise, ni répétée sous des formes plus diverses, ni mieux poursuivie dans ses conséquences. Parce que nous connaissons (et dans des cas très rares) six ou sept décimales d'un nombre, nous ne pouvons rien affirmer sur celles qui suivent. Nous ne pouvons pas affirmer que la masse d'un corps soit

constante, mais seulement que cette masse, si elle varie, varie entre des limites très rapprochées. La loi de la chute des corps, la loi de l'attraction universelle sont l'objet d'une critique serrée, qui met en évidence le degré d'approximation avec lequel on peut dire que ces lois sont vraies, et l'auteur prend quelque plaisir à raconter comment, d'après M. Hall, les irrégularités du mouvement de Mercure seraient mieux représentées en remplaçant la loi de Newton par la formule.

$$f = \frac{k\,mm'}{r^{2,0000001574}}.$$

Ailleurs, il insistera sur l'impossibilité de définir d'une façon précise (disons même de *penser*), au point de vue mathématique, les quantités qui entrent dans les formules, par exemple, en restant dans le domaine de l'attraction, le potentiel de la Terre. Si je l'ai bien compris, il ne recule pas devant l'idée que cette impossibilité est radicale, et s'étend à tout ce que nous prétendons mesurer. Et en effet, la quantité même à mesurer s'évanouit quand on veut la préciser. Qu'est-ce que le volume d'un corps, son poids? Où ce corps est-il terminé? Qu'est-ce qui est lui, et qu'est-ce qui n'est pas lui? Assurément, nous ne pouvons jamais répondre complètement à ces questions; mais y a-t-il une réponse? D'une part, il est certain que notre connaissance du monde extérieur est très limitée et sera toujours très limitée, que notre représentation mathématique de ce monde extérieur sera toujours une représentation approximative; d'autre part, il n'est pas sûr, lors même que l'on fait abstraction de l'imperfection de nos organes et de la faiblesse de notre intelligence, qu'une représentation mathématique de l'Univers soit possible en soi. Pour Leibniz [1], la *contingence* résultait de l'impossibilité de *connaître* l'infinité des chiffres qui constituent la représentation décimale des nombres qui correspondent aux choses; mais est-il vrai qu'il y ait des nombres exacts attachés aux choses? Nous n'en savons rien, et nous n'en saurons jamais rien.

On pourra toujours soutenir que la prétendue connaissance

---

[1] *Voir* Couturat, *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*, p. 212 et *passim*. Paris, 1901.

mathématique de l'Univers ne sera jamais qu'une sorte de statistique, comportant des lois numériques *approchées,* relatives à des *moyennes,* et dont la précision absolue est impossible. Libre à d'autres, au contraire, de regarder notre science comme une sorte de science asymptotique, susceptible d'être toujours poussée plus loin, de puiser dans notre connaissance de cinq ou six chiffres, pour quelques nombres, une pleine confiance dans la détermination de l'infinité des chiffres qui suivent, et de triompher chaque fois qu'on fixera une décimale de plus.

C'est affaire de goût ou de croyance, mais l'*agnosticisme* est ici fort raisonnable. Tout ce qu'une induction valable, tirée du succès de la Science, permet de croire, c'est qu'il est possible d'aller plus loin que le point où nous sommes parvenus.

Non seulement nous ne mesurons les choses qu'imparfaitement, mais même, d'après M. Klein, nous ne pouvons *imaginer* les objets mêmes de la Géométrie, tels qu'ils sont définis rationnellement. Chacun sait fort bien que la ligne qu'il dessine n'est pas une ligne, qu'elle a une certaine épaisseur, mais quelque épaisseur subsiterait même dans la ligne que nous imaginons. Nous touchions tout à l'heure à la Métaphysique, nous voici dans la Psychologie. Le logicien peut bien répondre que cette épaisseur, non déterminée, n'importe pas, puisqu'on n'y pense pas, et il est vrai que l'intuition et la pure raison se pénètrent assez pour qu'il soit parfois bien difficile de les distinguer : le fait signalé par M. Klein n'en a pas moins son importance; au surplus, personne, sans doute, ne lui prêtera cette opinion qu'il soit impossible, en restant dans la pure Géométrie, de raisonner avec une entière rigueur : c'est sur notre impuissance à imaginer les choses qu'il insiste.

Toute cette philosophie n'est pas sans conséquences au point de vue des Mathématiques. D'après M. Klein, celles-ci sont susceptibles de deux directions bien distinctes : dans l'une on poursuivra logiquement et, sans y rien faire intervenir autre chose que des transformations logiques, les conséquences des prémisses. On s'efforcera d'épuiser ces conséquences. Dans l'autre on s'arrêtera à un certain degré d'approximation. Il ne sera point question de la somme d'une série, mais de la somme d'un certain nombre de ses termes. Une courbe ne sera pas une ligne proprement dite,

mais une bande très étroite, une surface sera très mince. Une tangente ne sera pas la limite d'une sécante; elle sera, dans une petite mesure, indéterminée; elle joindra deux points, voisins sans doute, mais éloignés relativement à l'épaisseur de la bande. Et la petite indétermination qui subsiste dans sa direction entraînera à son tour, pour la courbe qui représenterait la variation de son coefficient angulaire, une petite épaisseur.

Une courbe de cette nature ne définira pas y comme une fonction de x au sens des Mathémathiques exactes, mais bien une bande de fonctions dont les valeurs restent comprises entre des limites très rapprochées, etc. Les Mathématiques appliquées n'ont affaire qu'à des éléments de cette nature.

Les deux branches des Mathématiques, tout en étant essentiellement distinctes, s'aident mutuellement. D'une part, les Mathématiques exactes, au moins jusqu'ici, sont le fondement des mathématiques approchées : c'est elles qui fournissent à celles-ci les formules et les raisonnements dont elles ont besoin. C'est à elles qu'appartient la solution de ce problème difficile : évaluer, d'après les limites de l'incertitude des données, les limites de l'inexactitude des conséquences. Sans doute, il y a des cas où cette recherche ne paraît pas bien utile : M. Klein observe, d'une façon assez amusante, que, si l'on se place au point de vue de l'art du dessin, il ne faut pas énoncer le théorème sur l'*hexagramme mystique* comme on le fait d'habitude; il faut dire : Lorsque six points sont à peu près situés sur une conique, les trois points qui résultent de la construction de Pascal, effectuée avec l'exactitude que comportent nos instruments de dessin, sont à peu près en ligne droite : on ne s'avisera probablement pas de rechercher la limite de cette incertitude, quoique la question soit sans doute incomparablement plus facile que les problèmes analogues (mais autrement intéressants) qui se posent en Physique ou en Astronomie. En supposant que l'incertitude sur la loi de l'attraction universelle soit de l'ordre de grandeur qui semble résulter de la critique des observations, pendant combien de siècles les conséquences qu'on en tire auront-elles quelque valeur? Voilà de beaux problèmes, qu'on n'est pas près de résoudre. En attendant, l'étude des formules approchées, que l'on déduit des formules exactes et qui peuvent être substituées à celles-ci dans les calculs pratiques,

avec un grand avantage pour la rapidité, ne doit pas être négligée : outre leur utilité, ces formules peuvent avoir leur beauté propre : entre autres exemples tirés de la Géodésie, M. Klein signale la formule donnée par Legendre pour la substitution d'un triangle plan à un petit triangle sphérique tracé sur une sphère de grand rayon.

Si le développement des Mathématiques exactes importe aux Mathématiques approchées et appliquées, celles-ci n'importent pas moins à celles-là. Les figures et les modèles donnent un appui solide à la recherche scientifique pure, et permettent de l'orienter; M. Klein insiste avec grande force sur le parti qu'on doit en tirer dans la recherche et dans l'enseignement : les dernières leçons de son cours sont consacrées à la description d'une suite de modèles, tirés de la collection de M. Brill.

Ce n'est pas seulement ces modèles savants qu'il faut étudier, il faut regarder autour de soi en géomètre et interpréter ses observations; c'est la meilleure façon de nous débarrasser du savoir scolastique; certaines voûtes architecturales, un vulgaire parapluie, fournissent à M. Klein l'occasion de montrer des surfaces qui mettent en évidence l'inexactitude de la proposition

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

en dehors des conditions précises que l'on sait. D'un autre côté, il est certain que la plupart des idées qui se sont affinées et précisées dans les Mathématiques exactes ont leur origine dans une intuition plus ou moins grossière : telle est, par exemple, la notion de continuité, que M. Klein rattache d'une façon ingénieuse à la propriété qu'ont les images visuelles de s'absorber et de se continuer mutuellement, si bien que nous voyons un trait continu là où il n'y a qu'une suite de petites taches noires, et que le cinématographe nous donne l'illusion d'un mouvement continu. L'exemple du cinématographe lui donne d'ailleurs une belle occasion de jeter le trouble dans l'âme de ses auditeurs : la continuité des phénomènes ne serait-elle, elle aussi, qu'une apparence? Après cela, ce n'est assurément pas la peine d'insister sur la façon dont il accommode la doctrine de ceux qui veulent que l'Univers puisse être représenté au moyen de fonctions analytiques, de ces fonctions

qui sont entièrement déterminées par l'un de leurs éléments, par leurs valeurs dans un intervalle si petit qu'on voudra, voire même par une suite dénombrable de nombres.

J'ai essayé, tant bien que mal, de caractériser l'esprit philosophique qui domine le cours de M. Klein : il me reste à en résumer rapidement le contenu mathématique et à dégager l'ordre des sujets traités.

Les leçons sont divisées en deux parties distinctes : les premières se rapportent surtout à la théorie des fonctions de variables réelles et à leur représentation dans un système de coordonnées rectangulaires ; les autres ont un caractère nettement géométrique.

Après avoir exposé, d'une part, les propositions élémentaires concernant les ensembles de points, la notion précise d'une fonction définie dans un ensemble, la notion précise de continuité, des quatre dérivées ; d'autre part, le caractère des courbes empiriques, ce que l'on peut dire de leur direction ou de leur courbure, il insiste avec grand détail sur le célèbre exemple, dû à Weierstrass, d'une fonction continue n'admettant nulle part de dérivée. Pour donner une première idée de la fonction

$$y = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos a^n \pi x \qquad (b > 0,\ a \text{ entier positif impair}),$$

il dessine avec grand soin les trois premières *courbes approchées*

$$y_0 = \cos \pi x,$$

$$y_1 = \cos \pi x + \frac{1}{2} \cos 5 \pi x,$$

$$y_2 = \cos \pi x + \frac{1}{2} \cos 5 \pi x + \frac{1}{4} \cos 25 \pi x,$$

et l'on voit ainsi comment, en passant de l'une à l'autre, le trait se complique et les oscillations se multiplient. La démonstration de l'uniformité de la convergence et, par suite, de la continuité de la fonction est en quelque sorte présentée d'une façon concrète, en montrant que la *courbe finale*

$$y = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos a^n \pi x$$

pourrait être enfermée dans une bande avoisinant la $m^{\text{ième}}$ *courbe approchée*

$$y_m = \sum_{n=0}^{n=m} b^n \cos a^n \pi x,$$

bande dont l'épaisseur serait si petite qu'on ne pourrait la discerner avec nos plus puissants microscopes. Il distingue ensuite les *nœuds* de la courbe finale, pour lesquels $x = \frac{2g+1}{2a^m}$ (g entier), et qui se trouvent tous situés sur la $(m-1)^{\text{ième}}$ courbe approchée, à cause de la supposition, faite par Weierstrass, que a est un entier impair; les abscisses des nœuds forment un ensemble dense partout. Sur l'axe des x il distingue de même les *ventres,* c'est-à-dire les points dont l'abscisse est de la forme $x = \frac{g}{a^m}$ (g entier) et pour lesquels on a

$$y = y_{m-1} + (-1)^g \frac{b^m}{1-b};$$

le point dont l'abscisse est de la forme $\frac{g}{a^m}$ sera désigné dans ce qui suit comme un $m^{\text{ième}}$ ventre.

Soit maintenant x_0 une abscisse quelconque; considérons le $m^{\text{ième}}$ ventre dont l'abscisse $\frac{\alpha_m}{a^m}$ se rapproche le plus possible de x_0, en sorte que l'on ait

$$\frac{1}{2} > x_0 a^m - \alpha_m > -\frac{1}{2};$$

soient x', x'' les abscisses des $m^{\text{ièmes}}$ ventres qui comprennent ce dernier ventre, en sorte que l'on ait, pour la courbe finale,

$$y' = y'_{m-1} - (-1)^{\alpha_m} b^m \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} b^\nu,$$

$$y'' = y''_{m-1} - (-1)^{\alpha_m} b^m \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} b^\nu,$$

en désignant par y'_{m-1}, y''_{m-1} les ordonnées des points de la $(m-1)^{\text{ième}}$ courbe approchée dont les abscisses sont x', x''. Si l'on appelle y_0 l'ordonnée du point de la courbe finale dont

l'abscisse est x_0, et si l'on pose, pour abréger, $x_{m+1} = a^m x_0 - \alpha_m$, on aura

$$\frac{y' - y_0}{x' - x_0} = \sum_{n=0}^{n=m-1} b^n \frac{\cos a^n \pi x' - \cos a^n \pi x_0}{x' - x_0}$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\alpha_{m+1}} b^{m+\nu} \frac{1 - \cos a^\nu \pi x_{m+1}}{x' - x_0};$$

le quotient des deux différences $y' - y_0$, $x' - x_0$ est ainsi séparé en deux parties, qui se rapportent, l'une à la $(m-1)^{\text{ième}}$ courbe approchée, l'autre à la courbe *résiduelle*, dont les ordonnées sont les différences entre les ordonnées de la courbe finale et de la $(m-1)^{\text{ième}}$ courbe approchée. En remplaçant, dans la première partie, la différence de cosinus par un produit de sinus, on reconnaît sans peine que cette première partie oscille entre les deux quantités

$$\pm \pi \sum_{n=0}^{n=m-1} a^n b^n;$$

quant à la seconde partie, elle est le produit de $(-1)^{\alpha_m} a^m b^m$ par la somme de la série à termes positifs

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1 - \cos a^\nu \pi x_{m+1}}{x_{m+1} - 1},$$

dont le premier terme est supérieur ou égal à $\frac{3}{2}$; on peut donc écrire

$$\frac{y' - y_0}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_m} a^m b^m \eta' \left(\frac{2}{3} + \frac{\varepsilon' \pi}{ab - 1}\right)$$
$$\left(\eta' > 1, \quad -\frac{1}{2} < \varepsilon' < \frac{1}{2}\right),$$

et de même

$$\frac{y'' - y_0}{x'' - x_0} = (-1)^{\alpha_{m-1}} a^m b^m \eta'' \left(\frac{2}{3} - \frac{\varepsilon'' \pi}{ab - 1}\right).$$

On n'a plus maintenant qu'à s'arranger pour que les parties qui proviennent de la $(m-1)^{\text{ième}}$ courbe approchée l'emportent sur les parties qui proviennent de la courbe résiduelle : en supposant

$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, on pourra écrire

$$\frac{y' - y_0}{x' - x'_0} = (-1)^{\alpha_m} a^m b^m p'_m,$$
$$\frac{y'' - y_0}{x'' - x_0} = (-1)^{\alpha_m + 1} a^m b_m p''_m,$$

p'_m et p''_m étant des nombres positifs, supérieurs au nombre positif

$$\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab - 1}.$$

En faisant croître m indéfiniment, l'impossibilité de l'existence d'une dérivée pour $x = x_0$ est évidente.

Tout cela, le lecteur ne l'ignore pas, n'est autre chose que la démonstration de Weierstrass, et l'on peut estimer qu'il était inutile de reproduire ici cette démonstration. J'ai tenu cependant à résumer la façon dont M. Klein l'a présentée, afin de montrer comment le même savant, qui expose volontiers une théorie d'une façon très large, sait entrer dans le détail lorsqu'il le veut, et faire pénétrer ses auditeurs dans le fond d'une démonstration, en en éclairant soigneusement toutes les parties : encore ai-je dû, dans ce résumé, supprimer bien des explications dont aucune n'était superflue : il y a là un modèle d'exposition orale dont je n'ai pu donner, dans ce qui précède, qu'une réduction bien imparfaite; il y a, en même temps, une *leçon* d'un autre ordre; il semble que le maître dise à ses auditeurs : Quand vous étudiez une démonstration, ne vous contentez pas de ce degré d'intelligence où vous êtes forcés de donner votre assentiment à chaque partie de la démonstration et, par suite, à la conclusion; il faut que vous vous rendiez compte du « pourquoi » de chaque partie, de la place qu'elle tient dans le tout; il ne suffit pas de vous assurer de la solidité de chaque anneau; il vous faut le connaître en lui-même, savoir comment il se rattache aux autres, comment la chaîne est faite de ces anneaux. Quatre ou cinq fois, dans la suite de son cours, M. Klein s'est ainsi arrêté sur des points particuliers en les étudiant à fond. Il est clair qu'il n'attache pas moins d'importance aux études de ce genre qu'aux idées et aux théories générales qu'il indique à grands traits; en même temps qu'il fournit à ses auditeurs des sujets de réflexion et de travail, il leur montre comment il faut travailler.

Sans parler du travail de recherche, il est clair que la science acquise ainsi, dans les livres ou les Mémoires, n'est point une science « livresque »; elle appartient vraiment à celui qui l'a acquise.

Je reviens, en m'excusant de cette longue digression, à la suite des idées développées par M. Klein.

Après avoir donné, avec le détail qu'on vient de dire, l'exemple d'une fonction continue qui n'admet point de dérivée, l'auteur introduit, d'après Jacobi, l'expression de *fonction raisonnable* (*vernünftige Function*) pour les fonctions continues, n'admettant, dans un intervalle fini, qu'un nombre fini de maxima et de minima, admettant enfin au moins des dérivées première et seconde. Le problème de la représentation approchée soit d'une courbe empirique par une fonction « raisonnable », soit d'une fonction « raisonnable » par une expression analytique simple, lui donne l'occasion de traiter de l'interpolation soit au moyen de polynomes, soit par des fonctions trigonométriques; il insiste sur la considération du reste.

La série de Taylor peut être regardée comme un cas particulier des formules d'interpolation, et c'est à son occasion que M. Klein parle des fonctions analytiques et qu'il en indique les caractères essentiels. L'interpolation trigonométrique lui donne une ouverture pour parler de la série de Fourier : il se contente d'indiquer le théorème de Lejeune Dirichlet, mais il insiste sur la propriété qu'a le développement limité de représenter le mieux possible une fonction donnée, au sens de la théorie des moindres carrés, et sur des exemples particuliers qui lui permettent d'introduire d'une façon claire et précise la notion de convergence non uniforme : il donne aussi la théorie de l'analyseur de Coradi. Les théories qu'il vient de développer lui fournissent une occasion naturelle de parler des recherches de Tchebycheff.

J'ai indiqué plus haut l'étude de la relation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x};$$

je n'y reviens pas, quoiqu'elle soit faite d'une façon détaillée.

La question de la représentation approchée d'une fonction de deux variables, au moyen de fonctions sphériques, est traitée comme

une généralisation de la représentation trigonométrique, et dans le même sens : c'est-à-dire que M. Klein ne développe pas les propositions bien connues de la théorie des séries de fonctions sphériques : il s'arrête, au contraire, avec complaisance sur les fonctions des quatre premiers degrés, de manière à bien en faire ressortir les caractères essentiels et à faire saisir ce que les géomètres anglais appellent fonctions sphériques *zonales, vectorielles* ou *tessérales*. Il signale avec quelques détails la célèbre application numérique que Gauss a faite des fonctions sphériques à la théorie du Magnétisme terrestre.

Dans la seconde Partie, l'étude des figures que l'on déduit de deux, trois ou quatre cercles en soumettant ces cercles à une suite d'inversions par rapport à l'un ou à l'autre d'entre eux et en poursuivant indéfiniment la composition des inversions, occupe une place assez considérable et donne lieu à une suite de remarques très instructives : on sait que les études de ce genre touchent à des domaines très divers; M. Klein ne manque pas de rappeler, en passant, le rôle qu'elles tiennent dans la théorie de l'électricité. Le cas de trois cercles qui ne se coupent pas lui fournit, par la considération des *points limites*, un bel exemple d'un ensemble de points qui est parfait et qui n'est dense nulle part. Le cas de trois cercles dont chacun est tangent au précédent et au suivant se rattache, comme on sait, à la théorie des fonctions modulaires. Le cas de quatre cercles dont chacun est tangent à celui qui le précède et qui le suit lui donne, dans l'ensemble des points de contact des cercles successifs et des points d'accumulation de cet ensemble, un exemple d'une courbe *non analytique* admettant une tangente en chaque point [1], et séparant le plan en deux parties, l'une intérieure, l'autre extérieure. On voit combien la matière, qui appartient d'ailleurs, si l'on veut, à la théorie des fonctions automorphes, est riche. M. Klein a traité avec détail les points particuliers dont il s'est occupé, et on lira avec un vif intérêt les pages consacrées à ce beau sujet, où il a fait ressortir, d'une part, le rôle que se trouvent jouer en Géométrie des spéculations qui semblaient, par la façon dont elles se sont présentées, réservées à

---

[1] J'ai dit, par erreur, le contraire, en faisant allusion à cette courbe, lorsque j'ai rendu compte, dans le *Bulletin*, des *Lectures de Chicago*, t. XX, p. 229.

l'Analyse, et, d'autre part, l'aide que la Géométrie peut apporter à ces spéculations.

Naturellement nous sommes ici en plein dans les *Mathématiques de précision;* les exemples mêmes qu'a signalés M. Klein montrent assez la nécessité de se défier des intuitions naïves et de soumettre les concepts de la Géométrie, celui de courbe, en particulier, à la critique d'une logique affinée. L'auteur développe la notion de *continuum*, au sens de Weierstrass : il traite de la courbe de M. Peano, qui remplit tout un carré. Cette *courbe*, qui est, en quelque sorte, un fouillis de points doubles, montre de la façon la plus claire la nécessité d'imposer aux fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ une autre condition que celle de la continuité pour pouvoir dire que l'ensemble des points dont les coordonnés sont $\varphi(t)$, $\psi(t)$ constitue quelque chose qui ressemble à l'idée vulgaire que l'on se fait d'une courbe. On doit à M. Jordan d'avoir apporté une réponse d'une nature positive à la question ainsi posée en montrant qu'une courbe fermée sans point double sépare le plan en deux régions, l'une intérieure, l'autre extérieure à la courbe : Une telle courbe est définie comme l'ensemble des points dont les coordonnées x, y s'expriment dans l'intervalle (a, b) par les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ continues dans cet intervalle, telles que l'on ait

$$\varphi(a) = \varphi(b), \qquad \psi(a) = \psi(b),$$

et telles enfin que les équations

$$\varphi(t') = \varphi(t), \qquad \psi(t) = \psi(t')$$

ne soient vérifiées par aucun autre système de valeurs distinctes t, t', appartenant à l'intervalle (a, b), que le système (a, b). M. Klein donne aux courbes ainsi définies le nom de *courbes de Jordan*. La courbe des points de contact, dont il a été question plus haut dans la figure qui a pour origine quatre cercles dont chacun touche le précédent et le suivant, est une *courbe de Jordan*. M. Klein expose ensuite comment la notion de courbe se particularise et distingue successivement les courbes *régulières,* qui correspondent à peu près aux fonctions *raisonnables* définies plus haut, les courbes analytiques, algébriques, rationnelles. Signalons la définition géométrique des courbes algébriques, comme

pouvant être engendrées par un mécanisme formé de barres articulées.

A ces considérations purement théoriques s'opposent en quelque sorte plusieurs leçons consacrées à la Géodésie et au dessin géométrique. Le problème de Pothenot et, plus particulièrement, le degré de précision que comporte sa solution, les lignes géodésiques, la forme du géoïde sont l'objet de remarques très intéressantes. L'auteur rattache à quelques considérations ingénieuses sur les conclusions que l'on peut tirer de la forme d'une courbe empirique sur la courbe idéale qu'on cherche à lui substituer le développement de ses belles recherches sur le nombre de points d'inflexion réels et de tangentes doubles réelles dans une courbe algébrique générale d'ordre n. Si léger que soit le lien qui rattache les deux sujets, cette exposition détaillée, où l'on voit tout ce qu'un géomètre habile peut tirer de l'intuition et de la notion de continuité sera certainement lue avec grand profit. Enfin M. Klein termine ses leçons en parlant de l'appui que l'on trouve dans le dessins et les modèles pour les recherches théoriques. La description de quelques modèles est l'occasion d'une brillante digression sur la surface du troisième degré, par laquelle il termine ses leçons. J. T.

CLAIRIN (JEAN). — SUR LES TRANSFORMATIONS DE BAECKLUND. (Thèse de doctorat présentée à la Faculté des Sciences de Paris.) In-4° de 67 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

L'étude de la célèbre transformation de Laplace, relative aux équations linéaires du second ordre aux dérivées partielles, a été le point de départ d'un grand nombre de recherches, dont les auteurs se sont proposé de rattacher l'une à l'autre, par des transformations plus ou moins simples, l'intégration de deux équations aux dérivées partielles du second ordre. Parmi les travaux récents de cette nature il faut citer ceux dus à M. Baecklund.

Le Travail de M. Clairin a pour objet de systématiser dans une théorie ces transformations. L'auteur commence par rappeler

les résultats obtenus par M. Baecklund, qui peuvent s'énoncer ainsi :

Étant donnés deux systèmes d'éléments (x, y, z, p, q), (x', y', z', p', q'), *entre lesquels on établit quatre relations distinctes* $\varphi_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$; *quelles surfaces faut-il faire décrire à l'élément* (x, y, z, p, q) *pour qu'il lui corresponde une autre surface décrite par l'élément* (x', y', z', p', q')?

En général, si les relations données $\varphi_i = 0$ sont quelconques, ces surfaces sont données par les intégrales communes à deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre; mais, pour certaines formes des fonctions φ_i, ce système de deux équations est remplacé par une équation unique du second ordre, de Monge-Ampère.

M. Clairin complète le résultat précédent en établissant qu'une équation de Monge-Ampère ne provient pas d'une transformation telle que la précédente.

Si les surfaces décrites par l'élément (x', y', z', p', q') sont aussi les intégrales d'une équation du second ordre, les relations $\varphi_i = 0$ établissent, entre deux équations du second ordre, une liaison telle que l'intégration de l'une d'elles entraîne l'intégration de l'autre. L'auteur est ainsi conduit à considérer trois classes de transformations (B_1), (B_2), (B_3) suivant que, à toute intégrale de l'une d'elles, correspondent une seule intégrale de l'autre équation ou une infinité d'intégrales. Après avoir donné des exemples des trois catégories, il approfondit la liaison entre les caractéristiques des deux équations.

Les transformations (B_1) sont celles qui se rapprochent le plus de la transformation de Laplace, et leur étude offrait un intérêt particulier. En ce qui les concerne, M. Clairin arrive à un résultat très net. Si, d'une équation (e), possédant un système de caractéristiques du premier ordre, on peut déduire, par une transformation (B_1) correspondant à ce système de caractéristiques, une équation (e'), toutes les équations que l'on peut déduire de (e) de la même façon se ramènent à (e') par des transformations de contact. Si l'on ne regarde pas comme distinctes deux équations qui se ramènent l'une à l'autre par une transformation de

contact, on voit que, à tout système de caractéristiques du premier ordre, correspond au plus une transformation (B_1), et les seules équations pouvant admettre deux transformations (B_1) distinctes sont nécessairement des équations de Monge-Ampère.

La recherche de ces transformations, pour une équation de Monge-Ampère donnée, est ramenée à la détermination de quatre intégrales d'une équation linéaire du premier ordre, liées par deux relations d'une forme assez compliquée. M. Clairin pousse les calculs jusqu'au bout dans le cas particulier où l'un des systèmes de caractéristiques admet une combinaison intégrable du premier ordre qui se retrouve dans l'équation transformée. Il déduit enfin comme application toutes les équations de Monge-Ampère, pour lesquelles les équations différentielles de l'un des systèmes de caractéristiques admettent une combinaison intégrable du premier ordre et une du second ordre.

Il termine cet intéressant travail par l'étude d'une transformation particulière (B_3) de M. Baecklund qui a figuré dans ce *Bulletin* (t. XXIV, 1900, p. 284). Un système de deux éléments du premier ordre (x, y, z, p, q), (x', y', z', p', q') admet quatre invariants relativement au groupe des mouvements dans l'espace; en égalant ces invariants à des constantes, on obtient les équations de la transformation qui s'applique à des surfaces parallèles et à des surfaces à courbure totale constante, étudiée par M. Darboux. M. Clairin montre qu'il existe une transformation analogue dans la Géométrie non euclidienne. Il emploie pour cela une méthode analogue à celle de M. Darboux et en profite pour rappeler, chemin faisant, la manière élégante dont ce géomètre a démontré les théorèmes trouvés par M. Baecklund. E. E.

MÉLANGES.

THÈSES DE SCIENCES MATHÉMATIQUES SOUTENUES DEVANT LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS ET DEVANT LES FACULTÉS DES SCIENCES DES DÉPARTEMENTS DANS LE COURANT DU XIXe SIÈCLE.

Dans le numéro de février de ce *Bulletin*, page 30, nous avons signalé à nos lecteurs une bibliographie intéressante, établie par M. Estanave, ayant pour titre : *Revue décennale des Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris du* 1er *janvier* 1891 *au* 31 *décembre* 1900. Ce recueil contient l'indication de 347 Mémoires dont 63 de Sciences mathématiques.

M. Estanave a bien voulu établir le relevé de thèses de Sciences mathématiques que nous publions ci-dessous et qui comprend toutes celles qui ont été soutenues devant les Facultés des Sciences de Paris et des départements pendant le XIXe siècle (1).

Faculté des Sciences de Paris.

1811 (9 mars).

Bourdon (P.-L.-M.). — Le mouvement d'un corps solide, sollicité par des forces accélératrices quelconques, et assujetti à tourner autour d'un point fixe.

— Théorie du mouvement elliptique des planètes, suivie du principe de la gravitation universelle, et de son application à la détermination des masses de quelques planètes.

1811 (23 novembre).

Lefébure de Fourcy (L.-E.). — Équations générales du mouvement des fluides et application de ces équations à la théorie du son.

— De l'attraction des sphéroïdes et de la figure des planètes.

(1) Pour les indications bibliographiques de ces Mémoires, nous renvoyons le lecteur au *Catalogue de Thèses* de M. Maire jusqu'en 1890 et à la Revue en question de M. Estanave pour ceux postérieurs à 1890.

1811 (30 novembre).

Petit (A.-T.). — Théorie mathématique de l'action capillaire.

— La théorie des réfractions atmosphériques.

1815 (28 juin).

Rodrigues (B.-O.). — De l'attraction des sphéroïdes servant de préliminaire à celle de la figure des planètes.

— Mouvement de rotation d'un corps de révolution pesant.

1817 (30 juin).

Gautier (J.-A.). — Sur quelques points de la théorie de la Lune et des planètes.

— Sur la variation des constantes arbitraires dans le problème du mouvement de translation d'un système de corps pesants, et des planètes en particulier.

1823 (26 juillet).

Zateplinsky (P.-A.). — Des inégalités périodiques des mouvements célestes.

— Du mouvement d'un système de corps soumis à leur attraction mutuelle.

1824 (26 juillet).

Verron-Vernier (J.-H.). — De la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs.

— Figures des planètes.

1825 (21 mai).

Bouniakowsky (V.-J.). — Sur le mouvement de rotation, dans un milieu résistant, d'un système de plans d'une épaisseur constante et d'un contour déterminé, autour d'un axe incliné, par rapport à l'horizon. — Détermination du rayon vecteur dans le mouvement elliptique des planètes.

— Propagation de la chaleur dans l'intérieur des corps solides.

1825 (28 juin).

Querret (J.-J.). — Traité analytique de l'attraction des sphéroïdes elliptiques homogènes.

— Astronomie nautique. La détermination de la position d'un observateur à la mer.

1829 (17 février).

Cournot (A.-A.). — Mémoire sur le mouvement d'un corps rigide soutenu par un plan fixe.

— De la figure des corps célestes.

1830 (25 août).

Guiot (A.-M.-A.). — Sur la propagation de la chaleur dans l'intérieur des corps solides.

— L'attraction des sphéroïdes elliptiques.

— Sur la figure qui convient à l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, dans le seul sens de l'homogénéité.

1831 (13 juillet).

Guibert (A.-P.-M.). — Propriétés générales de l'équilibre d'un système de corps. Propriétés générales du mouvement d'un système de corps.

— Solution, par les séries, du problème de Képler, et détermination des coordonnées d'une planète, en supposant très petites son excentricité et l'inclinaison de son orbite.

1831 (26 août).

Desrosiers (E.-L.-G.). — Formules sur le mouvement des fluides élastiques.

— Mouvement d'un système de corps soumis à leurs attractions mutuelles supposées proportionnelles aux masses et, réciproquement, aux carrés des distances.

1832 (13 août).

Bigourdan (E.). — Équation de la surface capillaire.

— Composition intérieure des fluides.

— Sur les éléments d'un sphéroïde.

1834 (19 février).

Duhamel (J.-M.-C.). — Théorie mathématique de la chaleur.

— De l'influence du double mouvement des planètes sur les températures de leurs différents points.

1834 (8 août).

Olivier (T.). — Recherches géométriques sur les centres de courbure des épicycloïdes planes et sphériques, et les développantes sphériques; sur les rayons de courbure des courbes et surfaces du second ordre, avec des applications aux engrenages.

— Des éclipses de Soleil. Constructions graphiques.

1836 (15 janvier).

Liouville (J.). — Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosinus, dont on fait usage dans un grand nombre de questions de Mécanique et de Physique.

Sur la figure d'une masse fluide homogène en équilibre et douée d'un mouvement de rotation.

1836 (26 mars).

Petit (J.-M.-A.-F.). — Calcul de l'effet des machines en mouvement. Application du principe des forces vives.

— Mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.

1837 (14 avril).

Chevet (A.-M.-F.). — Attraction d'un ellipsoïde homogène.

— Perturbations du mouvement elliptique des comètes.

1837 (30 août).

Molins (L.-F.-H.-X.). — Sur le mouvement des corps flottants.

— Sur la figure de la Terre.

1838 (24 décembre).

LAROQUE (F.-R.-N.). — Sur la distribution de la chaleur dans une couche sphérique homogène.

— Sur les réfractions astronomiques.

1839 (9 avril).

BERTRAND (J.-L.-F.). — Sur la théorie des phénomènes thermo-mécaniques.

— Sur la distribution de l'électricité à la surface des corps.

— Sur l'attraction des sphéroïdes.

1839 (24 juin).

BLAVETTE (G.-A.). — Sur les mouvements vibratoires d'une verge élastique.

— Mouvement elliptique des planètes et altération de ce mouvement causé par des forces perturbatrices.

1839 (2 juillet).

QUET (J.-A.). — Sur les mouvements oscillatoires des corps flottants.

— Sur le flux de la mer.

1839 (25 septembre).

VASNIER (C.-F.). — Attraction et figure des planètes.

— Théorie des perturbations des mouvements planétaires.

1840 (31 janvier).

FOURESTEY (J.-B.). — Sur la détermination des orbites des comètes.

— Mouvement de la chaleur dans une sphère et application aux températures terrestres.

1840 (août).

SONNET (M.-L.-J.-H.). — Sur les vibrations longitudinales des verges élastiques.

— Sur le mouvement relatif des étoiles doubles.

1840 (2 septembre).

Vieille (J.-M.-L.). — Du mouvement de la Lune autour de son centre de gravité.

— De la variation des constantes arbitraires dans les questions de Mécanique.

1840 (16 septembre).

Bourdonnay-Duclésio (P.-M.). — Sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs.

— Règle pour reconnaître, *a priori*, si une fonction d'une variable réelle ou imaginaire peut se développer en série convergente, ordonnée suivant les puissances ascendantes de cette variable. Moyen d'en déduire la condition pour que le rayon vecteur de l'orbite d'une planète soit développable en série convergente suivant les puissances ascendantes de son excentricité.

1840 (20 novembre).

Borgnet (A.-L.-J.). — De l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point matériel, d'après la loi de l'action des molécules entre elles, en raison inverse du carré de la distance.

1840 (4 décembre).

Blanchet (P.-H.). — Sur la propagation et la polarisation du mouvement dans un milieu élastique indéfini cristallisé d'une manière quelconque.

— Sur l'application de la variation des constantes à la recherche des équations différentielles des perturbations planétaires.

1841 (15 avril).

Catalan (E.-C.). — Attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur ou sur un point intérieur.

— Sur le mouvement des étoiles doubles.

1841 (19 avril).

Delaunay (C.-E.). — Distinction des maxima et des minima dans les questions qui dépendent de la méthode des variations.

— Mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.

1841 (21 août).

Puiseux (V.-A.). — Sur l'invariabilité des grands axes des orbites des planètes.

— Sur l'intégration des équations du mouvement d'un système de points matériels.

1842 (31 mars).

Briot (C.-A.). — Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

— Mouvement des planètes, en tenant compte des actions réciproques des planètes les unes sur les autres.

1842 (13 juillet).

Choquet (C.-A.). — Sur les variations séculaires des éléments des planètes.

— Sur les équations de l'équilibre et des mouvements moléculaires des corps solides élastiques.

1843 (14 février).

Gascheau (G.). — Mouvements relatifs d'un système de corps.

— Sur deux cas particuliers du problème des trois corps.

1843 (31 juillet).

Lecaplain (J.-C.). — Sur la résistance de l'éther au mouvement des planètes.

— Sur l'attraction des sphéroïdes.

1843 (8 août).

Rollier (C.). — Sur la figure permanente d'une masse fluide homogène, animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe passant par son centre de gravité, et abandonnée à l'attraction newtonienne de ses parties. En particulier, sur les figures elliptiques à 3 axes inégaux ou de révolution qui peuvent convenir à l'équilibre de cette masse.

— Sur les réfractions astronomiques.

1843 (24 août).

Bouquet (J.-C.). — Sur les variations des intégrales doubles.

1843 (16 novembre).

Girault (C.-F.). — Sur les variations des éléments des orbites des planètes.

— Sur le mouvement de trois corps.

1844 (19 août).

Peslin (H.-L.-J.). — Attraction des corps quelconques et en cas particulier des ellipsoïdes homogènes et hétérogènes, et des sphéroïdes qui diffèrent peu de la sphère. Figure des planètes et pesanteur à leur surface.

— Sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique.

1844 (15 octobre).

Banet (L.-A.). — Mouvement de la chaleur dans une sphère homogène.

— Perturbations dans les mouvements des comètes dues à la résistance de l'éther.

1845 (10 décembre).

Viguier (H.-P.). — Extension des principales formules de la Dynamique à des équations différentielles d'ordre supérieur au second.

— Théorie de la variation des constantes arbitraires, et indication de ses usages pour le calcul des formules générales qui donnent les variations des éléments de rotation des planètes.

1845 (24 décembre).

Tarnier (E.-A.). — Solution, par les séries, du problème de Képler, et détermination des coordonnées d'une planète, en supposant très petites son excentricité et l'inclinaison du plan de son orbite. Expression de l'anomalie excentrique, du rayon vecteur et de l'équation du centre, au moyen de séries ordonnées suivant les sinus et les cosinus linéaires des multiples croissants de l'anomalie moyenne. Terme général des coefficients de ces séries exprimé en fonction d'une indéterminée m et de l'excentricité e. Le Soleil est supposé fixe, et la trajectoire une ellipse rigoureuse.

— Sur la trajectoire des planètes et des comètes dans un milieu résistant.

1847 (3 novembre).

Serret (J.-A.). — Sur le mouvement d'un point matériel attiré par deux centres fixes, en raison inverse du carré des distances.

— Sur la détermination de la figure des corps célestes.

1848 (13 mars).

Roger (E.-L.). — Sur les brachystochrones.

— Sur un cas particulier du problème des trois corps.

1848 (3 avril).

Desboves (A.). — Sur le mouvement d'un point matériel attiré en raison inverse du carré des distances par deux centres mobiles suivant une certaine loi.

— Sur les perturbations planétaires.

1849 (22 mars).

Phillips (E.). — Sur les changements instantanés de vitesse qui ont eu lieu dans un système de points matériels.

— Application de la méthode de la variation des constantes arbitraires à la détermination des perturbations des planètes.

1849 (20 octobre).

Dieu (T.-D.). — Sur la propagation du son dans un milieu indéfini homogène dans l'état d'équilibre.

— Sur les réfractions astronomiques.

1849 (24 décembre).

Soufflet (J.-M.). — Sur les surfaces.

1851 (1er mai).

Frontera (G.-J.-A.). — Sur une surface de Cauchy.

— Sur l'attraction des corps en général.

1852 (30 mars).

Alquier (F.-G.-A.). — Sur l'attraction.

— Sur la distribution de l'électricité sur deux sphères conductrices mises en présence.

1852 (5 avril).

Tissot (N.-A.). — Mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère.

— Sur la détermination des orbites des planètes et des comètes.

1852 (17 mai).

Bourget (E.-M.-J.). — Attraction des paraboloïdes elliptiques.

— Variations des constantes arbitraires dans les problèmes de la Mécanique céleste.

1852 (2 août).

Bonnet (P.-O.). — Sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les fonctions X_n et Y_n.

— Sur la théorie mathématique des cartes géographiques.

1853 (13 juin).

Lefébure (A.). — Sur le mouvement des sphères sur un plan.

— Sur le mouvement elliptique des astres.

1853 (4 juillet).

Garlin-Soulandre (J.). — Sur les surfaces isothermes et orthogonales.

— Sur les mouvements apparents.

1853 (8 juillet).

Rodrigues de Passos (J.-A.). — Sur le détail relatif à la découverte de Newton (attraction).

— Sur les séries par lesquelles ont résout le problème de Képler, qui consiste à trouver l'anomalie vraie ainsi que le rayon vecteur de l'orbite, en fonction de l'anomalie moyenne.

1854 (26 juin).

Lafon (A.-A.). — Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique.

— Sur la théorie du dernier multiplicateur et le problème des trois corps.

1854 (26 juin).

Painvin (L.-F.). — Études sur les états vibratoires d'une couche solide, homogène et d'élasticité constante, comprise entre deux ellipsoïdes homofocaux.

— Différentes formes des équations différentielles dans le problème des trois corps.

1854 (10 juillet).

Sornin (J.). — Mouvement, dans un milieu résistant, d'un point matériel attiré par un centre fixe.

— De la figure de l'anneau de Saturne.

1854 (7 août).

Valson (C.-A.). — Application de la théorie des coordonnées elliptiques à la géométrie de l'ellipsoïde.

1855 (4 juin).

Résal (H.-A.). — Sur les équations polaires de l'élasticité et leur application à l'équilibre d'une croûte planétaire.

— Sur les oscillations des fluides qui recouvrent la surface des planètes.

1855 (2 juillet).

Sentis (J.-E.). — De l'emploi du principe général du travail des forces dans la Mécanique appliquée.

— Démonstration géométrique de plusieurs théorèmes sur la théorie des surfaces.

1855 (6 août).

Simon (C.-M.-E.-T.). — Sur la théorie géométrique de la rotation de la Terre.

1855 (18 août).

Hoüel (G.-J.). — Sur l'intégration des équations différentielles dans les problèmes de Mécanique.

— Application de la méthode de M. Hamilton au calcul des perturbations de Jupiter.

1855 (3 décembre).

Bour (J.-E.-E.). — Mémoire sur le problème des trois corps.

— Sur l'attraction qu'exercerait une planète, si l'on supposait sa masse répartie sur chaque élément de son orbite proportionnellement au temps employé à la parcourir.

1856 (17 mars).

Guiraudet (A.-P.-E.). — Recherches sur le mouvement d'un point libre rapporté à des coordonnées curvilignes.

— Aperçu historique au sujet des problèmes auxquels s'applique le calcul des variations, jusqu'aux travaux de Lagrange.

1856 (18 août).

Renard (N.). — Courbure des surfaces.

— Sur un mouvement des planètes dans le cas des perturbations.

1856 (20 octobre).

Faa de Bruno (F.). Théorie de l'élimination.

— Développement de la fonction perturbatrice et des cordonnées d'une planète dans son mouvement elliptique.

1857 (30 mars).

Haton de la Goupillière (J.-N.). — Sur une théorie nouvelle de la géométrie des masses.

— Sur le mouvement d'un corps sollicité par un centre fixe.

1857 (6 juillet).

Lespiault (F.-G.). — Théorie géométrique de la libration réelle de la Lune.

1857 (17 août).

Saint-Loup (J.-F.-L.). — Sur une nouvelle méthode pour le calcul des perturbations du mouvement des planètes.

— Sur les propriétés des lignes géodésiques.

1858 (12 avril).

Peslin (H.-F.-L.). — Sur la figure de la Terre.

— Sur les axes principaux d'inertie.

1858 (7 juin).

Combescure (J.-J.-A.-E). — Sur la théorie analytique des formes homogènes.

— Sur divers problèmes particuliers relatifs au mouvement.

1858 (12 juillet).

Galopin-Schaub (C.). — Sur l'équation de la surface des ondes lumineuses dans les milieux biréfringents.

1858 (30 juillet).

Méray (H.-C.-R.). — Sur les propriétés générales des racines d'équations synectiques.

1858 (8 novembre).

Rouché (E.). — Sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les dénominateurs des réduites d'une fraction continue.

— Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de Mécanique relatifs au mouvement d'un point sur une surface.

1859 (14 février).

Fortoul (J.-C.). — Sur les oscillations d'un mobile sollicité par plusieurs centres d'attraction fixes.

— Sur les figures d'équilibre des liquides planétaires.

1859 (28 mars).

Mathieu (E.-L.). — Sur le nombre de valeurs que peut acquérir une fonction quand on y permute ses lettres de toutes les manières possibles.

1859 (19 décembre).

Serret (P.). — Théorie géométrique des lignes à double courbure.

— Théorie mécanique des lignes à double courbure.

1860 (14 janvier).

Jordan (M.-E.-C.). — Sur le nombre des valeurs des fonctions.

— Sur les périodes des fonctions inverses des intégrales des différentielles algébriques.

1861 (16 août).

Massieu (F.-J.-D.). — Sur les intégrales algébriques des problèmes de Mécanique.

— Sur le mode de propagation des ondes planes et la surface de l'onde élémentaire dans les cristaux biréfringents à deux axes.

1861 (4 novembre).

Mathet (J.-G.). — Sur les fonctions elliptiques.

1862 (4 août).

Allégret (A.-F.-M.) — Sur le calcul des quaternions de M. Hamilton.

— Sur les principales inégalités du mouvement des satellites de Jupiter.

1862 (22 décembre).

Saint-Germain (A.-L. de). — Sur les équations générales de l'élasticité et les surfaces isodynamiques.

— Sur la durée des éclipses des satellites de Jupiter.

1863 (12 novembre).

Picart (A.). — Essai d'une théorie géométrique des surfaces.

1864 (20 juillet).

Durande (A.). — Propriétés géométriques des surfaces analogues à la surface des ondes.

— Déterminations des coefficients des termes périodiques de la fonction perturbatrice.

1864 (29 juillet).

Caqué (J.-H.-J.). — Nouvelle méthode pour l'intégration des équations différentielles linéaires, ne contenant qu'une variable indépendante.

1864 (24 décembre).

Nicolaïdés (N.) — Mémoire sur la théorie générale des surfaces.

— Théorie de la déformation des surfaces réglées déduite du mouvement d'un système invariable.

1865 (15 juin).

Villié (E.-A.). — Sur la détermination de corps ayant un potentiel donné pour les points qui leur sont extérieurs.

— Sur l'équilibre d'une masse fluide homogène animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe.

1865 (6 août).

Souillart (C.-J.). — Essai sur la théorie analytique des satellites de Jupiter.

1865 (23 décembre).

Stéphan (J.-M.-E.). — Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre.

1866 (14 juillet).

Darboux (J.-G.). — Sur les surfaces orthogonales.

1866 (4 août).

Levistal (A.) — Recherches d'optique géométrique.

1866 (3 novembre).

TURQUAN (L.-V.). — Résolution numérique, *sans* élimination, des équations à plusieurs inconnues.

— Recherches sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants.

1867 (21 février).

LÉVY (M.). — Essai théorique et appliqué sur le mouvement des liquides.

— Sur une transformation des coordonnées curvilignes orthogonales et sur les coordonnées curvilignes comprenant une famille quelconque de surfaces du second ordre.

1867 (16 mai).

BOUSSINESQ (V.-J.). — Étude sur la propagation de la chaleur dans les milieux homogènes.

1867 (1er août).

MORIN (P.-J.-P.). — Sur les paramètres différentiels des fonctions.

1867 (28 novembre).

GAUTHIER (P.-J.-B.). — Mouvement d'un projectile dans l'air.

1868 (15 juin).

TISSERAND (F.-F.). — Exposition, d'après les principes de Jacobi, de la méthode suivie par M. Delaunay dans sa théorie du mouvement de la lune autour de la Terre; extension de la méthode.

1868 (26 juin).

LEMONIER (H.-G.). — Des surfaces dont les lignes de courbures sont planes ou sphériques.

— Points d'inflexion et points Steiner dans les lignes de troisième ordre.

(*A suivre.*)

1re Partie -

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GOURSAT (E.), Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — COURS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE, Tome I. Grand in-8°, 620 pages; Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Ce Livre, qui est à peu de chose près la reproduction d'un Cours fait à la Sorbonne, paraît avoir les qualités d'un Traité classique : précision extrême dans les définitions et les énoncés, analyse pénétrante et habile dans les démonstrations, indications substantielles sur l'importance des notions ou des propositions fondamentales. Il sera très utile en particulier aux étudiants qui ont l'intention de continuer leurs études mathématiques et aussi, je l'ai éprouvé, à quelques-uns de ceux qui sont chargés d'enseigner les commencements de l'Analyse.

CHAPITRE I : *Dérivées et différentielles* (pages 1-40). — Ce Chapitre contient les définitions relatives à la continuité pour les fonctions de une ou de plusieurs variables, les généralités relatives aux dérivées et aux différentielles, la démonstration du théorème de Rolle et de la formule des accroissements finis, avec une extension de cette formule faite d'après un Mémoire de Stieltjes. Un paragraphe est consacré au passage des différences aux dérivées.

CHAPITRE II : *Fonctions implicites. Déterminants fonctionnels. Changements de variables* (pages 40-100). — Le Chapitre II débute par l'étude des fonctions implicites : les conditions sous lesquelles une équation entre trois variables x, y, z permet de définir z comme fonction continue de x et de y sont analysées avec soin.

Après avoir défini un élément de fonction implicite pour des valeurs de x et de y correspondant à l'intérieur d'un carré, pour étendre en dehors de ce domaine la définition de la fonction, l'auteur emploie un procédé *par cheminement* analogue à celui

dont on se sert à propos des fonctions des variables complexes. L'existence de la dérivée d'une fonction implicite est établie sans peine en s'appuyant sur les développements qui précèdent, et des procédés sont indiqués pour le calcul des dérivées successives. On étudie ensuite un système d'équations permettant de définir n fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes.

Cette étude montre déjà l'importance des déterminants fonctionnels. Le cas où le déterminant fonctionnel de n fonctions d'un nombre égal de variables est identiquement nul est traité en détail et l'utilité du théorème correspondant est mise en évidence par des exemples significatifs. Les propriétés du jacobien et du hessien, relatives à un changement de variables, résultent presque immédiatement de la multiplication des déterminants; on en fait l'application à la réduction d'une forme cubique à la forme canonique.

On passe ensuite en revue les problèmes qui se présentent le plus fréquemment à propos des changements de variables :

Problème I. — *Soit y une fonction de la variable indépendante x; on prend une nouvelle variable indépendante t, liée à x par $x = \varphi(t)$. On propose d'exprimer les dérivées successives de y par rapport à x au moyen de t et des dérivées successives de y par rapport à t.*

Problème II. — *A toute relation entre x et y, les formules de transformation*

$$x = f(t, u), \qquad y = \varphi(t, u)$$

font correspondre une relation entre t et u. On propose d'exprimer les dérivées de y par rapport à x au moyen de t, u et des dérivées de u par rapport à t.

L'application de ces méthodes est faite à la transformation des courbes planes et la notion de transformation de contact est introduite.

Les problèmes I et II se rapportaient aux dérivées des fonctions d'une variable; deux problèmes correspondants pour les fonctions de deux variables sont énoncés et traités avec la même précision.

Comme application, on trouve la transformation d'Ampère et celle de Legendre pour les équations aux dérivées partielles, puis l'équation du potentiel en coordonnées curvilignes.

Chapitre III : *Formule de Taylor. Maxima et minima* (pages 101-149). — Démonstration classique de la formule de Taylor pour une fonction d'une variable, et expression du reste sous la forme de Lagrange et sous la forme de Cauchy.

Comme application immédiate aux courbes planes, détermination de la tangente, du sens de la concavité, de la parabole osculatrice ayant son axe parallèle à Oy.

Une méthode pour trouver les premiers termes du développement d'une fonction suivant les puissances positives et croissantes d'une variable x, supposée positive et infiniment petite, est indiquée et appliquée à propos d'une fonction implicite définie par une équation entière en x et y. L'application de la formule de Taylor à la recherche des valeurs limites des expressions qui se présentent sous une forme indéterminée est indiquée rapidement en supposant la formule applicable à chacun des termes de la fraction $\frac{f(a+h)}{\varphi(a-h)}$.

Puis viennent la série de Taylor, les développements en série de $\log(1+x)$, $(1+x)^n$, arc $\sin x$ et, pour finir, cette remarque est faite que, pour bien apprécier l'importance des séries entières, il faut ne pas se limiter aux développements que l'on peut obtenir pour les combinaisons simples des fonctions élémentaires, mais savoir que l'on étudiera en elles-mêmes des séries entières ayant une tout autre origine.

La série de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables est obtenue par le procédé de Cauchy. On en donne l'interprétation géométrique et on l'applique en particulier à l'étude des points singuliers d'une courbe $f(x, y) = 0$, et à la recherche des maxima et des minima. Dans cette recherche, l'étude du cas ambigu, poussée déjà assez loin, est faite de manière à en montrer les difficultés dans le cas général pour lequel on renvoie à un Mémoire de L. Scheffer dans les *Math. Annalen*.

A propos de la détermination des maxima des fonctions implicites, la méthode des multiplicateurs de Lagrange est expliquée.

Chapitre IV : *Intégrales définies* (pages 150-233). — Après avoir rappelé la méthode d'Archimède pour la quadrature de la parabole, l'auteur, admettant provisoirement la notion de l'aire, montre comment on est conduit à considérer une somme

$$(x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1}) f(x_{n-1}),$$

et à chercher sa limite lorsque le nombre des termes de la suite $a, x_1, \ldots, x_{n-1}, b$ augmente indéfiniment, question dont la solution est immédiate si l'on connaît une primitive de $f(x)$.

Mais il faut reprendre les mêmes questions sans faire appel à l'intuition géométrique.

A cet effet, les notions de limite supérieure et de limite inférieure d'un ensemble, de fonction continue dans un intervalle sont introduites avec la rigueur et les explications nécessaires.

On peut alors définir les sommes

$$S = \sum M_i (x_{i+1} - x_i), \qquad s = \sum m_i (x_{i+1} - x_i),$$

M_i étant la limite supérieure, m_i la limite inférieure de $f(x)$ dans l'intervalle partiel (x_i, x_{i+1}), puis la limite inférieure, I, des sommes S et la limite supérieure, I', des sommes s. M. Darboux a montré que, sous la seule condition que $f(x)$ reste finie dans l'intervalle (a, b), les sommes S et s tendent respectivement vers I et I' lorsque le nombre des intervalles partiels augmente indéfiniment de façon que chacun d'eux tende vers zéro.

Une fonction $f(x)$ est dite *intégrable* dans un intervalle (a, b) si les deux sommes S et s tendent vers une limite commune. Une fonction continue dans un intervalle est intégrable dans cet intervalle. Dans ce qui suit, à moins de mention expresse, on supposera que les fonctions sous le signe d'intégration sont continues.

Après ces généralités, viennent la première formule de la moyenne, équivalente à la formule des accroissements finis, la seconde formule de la moyenne due à O. Bonnet, une première indication sur la théorie des indices à propos de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f'(x)\,dx}{1 + f^2(x)},$$

où $f(x)$ désigne une fraction rationnelle.

Maintenant que l'on possède la notion analytique d'intégrale définie, on peut revenir à la détermination de l'aire d'une courbe plane et donner de cette aire une définition précise, qui ne dérange d'ailleurs en rien les idées communes sur cette question, idées résultant d'expériences nombreuses, mais peu précises.

Je signalerai ici, comme exemple de la précision rigoureuse dont il faut parler à chaque instant à propos de ce Traité, tout ce qui se rapporte à la longueur d'un arc de courbe.

Puis viennent le changement de variable, l'intégration par parties et, à cette occasion, une démonstration de la transcendance du nombre e, empruntée à M. D. Hilbert, qui s'est inspiré de la méthode de Hermite.

On indique ensuite les extensions données à la notion d'intégrale définie, en commençant par le cas où la fonction à intégrer ou bien l'une des limites devient infinie [l'un des exemples donnés se rapporte à la fonction $\Gamma(a)$].

Les intégrales curvilignes sont introduites à ce moment : cela permettra au lecteur de bien comprendre les formules qui donnent l'aire d'une courbe fermée en coordonnées rectilignes ou en coordonnées polaires. On explique en détail la différentiation sous le signe $\int$, le calcul approché des intégrales définies (méthodes des trapèzes, de Cotes, de Gauss, planimètre d'Amsler).

Chapitre V : *Intégrales indéfinies* (pages 234-281). — On passe en revue, dans ce Chapitre, les catégories générales de fonctions élémentaires dont les intégrales s'expriment elles-mêmes à l'aide des fonctions élémentaires : fonctions rationnelles (avec la méthode d'Hermite pour déterminer la partie algébrique de l'intégrale), fonctions rationnelles des coordonnées d'un point variable d'une courbe unicursale, différentielles binomes, qu'il est très commode de supposer ramenées à la forme $t^q(at+b)^p\,dt$.

On étudie ensuite la réduction des intégrales elliptiques et ultra-elliptiques, les cas d'intégration algébrique, une classe assez étendue d'intégrales pseudo-elliptiques, enfin les intégrales

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx, \quad \int R(x)\,e^{\omega x}\,dx, \quad \int e^{ax} f(\sin x, \cos x)\,dx,$$

où R désigne une fonction rationnelle et f une fonction entière.

Chapitre VI : *Intégrales doubles* (pages 282-334). — Une région A du plan étant divisée en parties de plus en plus petites $a_1, a_2, \ldots, a_n$, on considère les deux sommes

$$S = \sum \omega_i M_i, \qquad s = \sum \omega_i m_i,$$

ω_i étant l'aire de la partie a_i, M_i et m_i la limite supérieure et la limite inférieure de la fonction $f(x, y)$ dans cette partie; si la fonction $f(x, y)$ est continue dans la région A, les deux sommes S et s tendent vers une limite commune I, et si l'on désigne par ξ_i, η_i les coordonnées d'un point quelconque de a_i, on a

$$\lim \sum f(\xi_i, \eta_i)\,\omega_i = I,$$

I est une intégrale double. Dans cette définition, il reste de l'arbitraire non seulement dans le mode de décomposition de A, mais encore dans le choix du point $\xi_i \eta_i$ que l'on fait correspondre à l'aire partielle a_i; l'auteur en tirera souvent parti pour simplifier et pour préciser en même temps des démonstrations, en particulier pour montrer qu'une intégrale double peut se calculer à l'aide de deux intégrations successives et qu'on peut intervertir l'ordre de ces intégrations.

Le changement de variables dans les intégrales doubles demande une étude approfondie et des explications préliminaires.

Les formules

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v)$$

définissent une correspondance entre les points de deux plans P et P_1. On fait les hypothèses suivantes : 1° les fonctions $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$ sont continues et admettent des dérivées continues quand le point (u, v) décrit une portion A_1 du plan P_1, limitée par un contour C_1; 2° les formules précédentes font correspondre à la région A_1 du plan P_1 une portion A du plan P limitée par un contour C, et la correspondance est univoque; 3° le déterminant fonctionnel $\Delta = \frac{D(f, \varphi)}{D(u, v)}$ ne change pas de signe à l'intérieur de C_1.

Quand le point (u, v) décrit le contour C_1 dans le sens direct, le point (x, y) décrit le contour C en se déplaçant toujours dans

le même sens : suivant que ce sens est le sens direct ou le sens inverse, on dit que la correspondance est directe ou inverse.

On obtient aisément la formule

$$\Omega = \pm \Omega_1 \frac{D(f, \varphi)}{D(\xi, \eta)},$$

Ω désignant l'aire de A, Ω_1 celle de A_1, ξ, η les coordonnées d'un point de A_1 et le signe étant $+$ ou $-$, suivant que la correspondance est directe ou inverse.

Cette formule conduit à une première méthode pour obtenir la règle relative au changement de variables dans les intégrales doubles, méthode suffisamment indiquée par l'égalité

$$\sum F(x_i, y_i)\,\omega^{(i)} = \sum F[f(u_i, v_i), \varphi(u_i, v_i)] \left| \frac{D(f, \varphi)}{D(u_i, v_i)} \right| \omega_1^{(i)},$$

où $\omega^{(i)}$ et $\omega_1^{(i)}$ désignent des éléments correspondants des régions A et A_1.

Une seconde méthode résulte de ce que la transformation générale

$$x = f(x_1, y_1), \qquad y = \varphi(x_1, y_1)$$

s'obtient en composant deux transformations dans chacune desquelles une seule variable est changée.

L'aire d'une portion S de surface courbe est définie sans faire intervenir la direction des axes de coordonnées. S étant décomposée en portions plus petites, on projette l'une de ces petites portions sur le plan tangent en l'un quelconque de ses points; la somme des aires planes ainsi obtenue par projection a une limite quand le nombre des petites portions augmente indéfiniment de façon que chacune d'elles devienne infiniment petite dans toutes ses dimensions, pourvu que l'on fasse des hypothèses convenables sur les fonctions que définissent les coordonnées d'un point variable de la surface. C'est cette limite que l'on nomme l'*aire* de la portion S de la surface considérée. On retrouve, en partant de cette définition, la formule connue

$$S = \int\int \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

On étudie ensuite les intégrales où le champ d'intégration est

infini ou bien la fonction discontinue et, comme application, on montre que l'intégrale eulérienne de première espèce $B(p, q)$ se ramène aux fonctions Γ, puis on définit les intégrales de surface et l'on démontre la formule de Stokes, en la déduisant presque immédiatement de la formule de Green, relative à une courbe plane.

Le Chapitre se termine par des applications géométriques ou analytiques : calcul de volumes, déterminations d'intégrales définies, valeur asymptotique de $\log\Gamma(n+1)$.

Chapitre VII : *Intégrales multiples. Intégration des différentielles totales* (pages 335-368). — Les définitions et les procédés de calcul indiqués pour les intégrales doubles s'étendent presque immédiatement aux intégrales triples, et, après quelques explications nécessaires, aux intégrales multiples.

L'intégration d'une différentielle totale $\int P\,dx + Q\,dy$ est obtenue d'abord en considérant successivement les deux équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q.$$

La question est reprise à un autre point de vue en cherchant la condition pour que l'intégrale, prise le long d'une courbe allant d'un point M_0 à un point M du plan xOy, dépende seulement de l'origine M_0 et de l'extrémité M du contour, mais non du chemin d'intégration. Si cette condition est remplie, et si l'on suppose le point M_0 fixe, l'intégrale est une fonction des coordonnées x et y du point M : on vérifie que ses dérivées partielles sont $P(x, y)$ et $Q(x, y)$. Ce résultat obtenu, on approfondit l'étude de l'intégrale considérée en déterminant ses périodes par un procédé analogue à celui qui donne les périodes d'une intégrale de fonction complexe.

Une application intéressante est faite à l'intégrale $\int \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2 + Y^2}$ où X et Y désignent des fonctions continues des variables x et y dans une région A limitée par un contour fermé C. On obtient une formule donnant le nombre exact des points communs aux deux courbes, pourvu que le déterminant fonctionnel $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$

garde un signe constant à l'intérieur de C. Pour compléter cette étude, l'auteur renvoie à des travaux de M. E. Picard, et en particulier au tome II de son *Traité d'Analyse*.

On étend ensuite les résultats précédents à une intégrale

$$\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

et l'on traite, pour les intégrales de surface, des questions analogues à celles qui ont été résolues pour les intégrales curvilignes : formule d'Ostrogradsky, condition pour qu'une intégrale de surface étendue à une surface passant par un contour C ne dépende que du contour C.

Chapitre VIII : *Développements en série* (pages 369-418). — Ce Chapitre débute par un résumé des propriétés élémentaires des séries. L'auteur donne d'abord, d'après Cauchy, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite soit convergente, et il introduit en même temps une notion due également à Cauchy, celle de *la plus grande des limites* des termes d'une suite infinie. Mais il établit directement les règles élémentaires de convergence, en s'appuyant sur un principe énoncé tout au commencement de l'Ouvrage :

Toute quantité variable qui n'est jamais décroissante et qui reste inférieure à une quantité constante L *tend vers une limite l inférieure ou égale à* L.

Puis viennent les critères logarithmiques de Bertrand, la multiplication des séries, les séries à termes imaginaires, les séries multiples, la règle de Cauchy qui ramène l'étude de la convergence d'une série à celle d'une intégrale dont les limites deviennent infinies.

Pour la convergence uniforme, la définition adoptée est la suivante : On dit qu'une série

$$u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

est uniformément convergente dans un intervalle (a, b) si, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre entier n tel que la valeur absolue du reste R_n de la série

$$R_n = u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots$$

soit moindre que ε pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle (a, b).

Si une série est, en ce sens, uniformément convergente dans un intervalle (a, b), et si ses termes sont des fonctions continues dans cet intervalle, elle définit une fonction continue; de plus, si x_0 et x_1 sont deux valeurs de l'intervalle (a, b), l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} R_n\,dx$ peut être rendue aussi petite que l'on veut, à condition de prendre n suffisamment grand.

On peut, en s'appuyant sur la théorie des séries, trouver des conditions suffisantes pour qu'on ait le droit d'appliquer la règle de différentiation sous le signe $\int$, même lorsqu'une des limites est infinie. Ceci conduit l'auteur à donner cette définition : On dit qu'une intégrale

$$\int_{a_0}^{\infty} f(x, \alpha)\,dx$$

est uniformément convergente dans l'intervalle (α_0, α_1) si, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre N tel que, pour toute valeur de $l > N$, on ait

$$\left|\int_{l}^{\infty} f(x, \alpha)\,dx\right| < \varepsilon,$$

quel que soit α dans l'intervalle (α_0, α_1).

Chapitre IX : *Séries entières. Séries trigonométriques.* — On examine successivement la région de convergence, la continuité, les dérivées successives d'une série entière. La série de Taylor est étendue au cas d'une fonction définie par une série entière.

Les fonctions majorantes sont définies de la façon suivante :

Soient $f(x)$ une série entière

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

et $\varphi(x)$ une autre série entière, convergente dans un intervalle convenable

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots,$$

dont tous les termes sont positifs; on dit que la fonction $\varphi(x)$ est

majorante pour la fonction $f(x)$ si l'un quelconque des coefficients α_n est supérieur à la valeur absolue du coefficient correspondant de $f(x)$. On montre comment on peut prendre pour fonction majorante d'une série entière une progression géométrique décroissante.

Ces préliminaires établis, on peut traiter avec rigueur la substitution d'une série entière dans une autre série, et le calcul des séries entières; enfin, une partie des propriétés des séries entières d'une variable est étendue aux séries entières de plusieurs variables.

On revient à l'étude des fonctions implicites, en supposant maintenant que les premiers membres des équations qui les définissent sont développables en série entière, ce qui permet d'obtenir cet énoncé précis :

Soit un système de p relations entre $p+q$ variables

$$F_r(x_1, x_2, \ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots, y_p) \qquad (r = 1, 2, \ldots, p),$$

où les fonctions F_r sont nulles pour $x_i = y_k = 0$ et sont développables en série entière dans le voisinage; on suppose de plus que le déterminant fonctionnel $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_p)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}$ n'est pas nul pour ces valeurs. Dans ces conditions, les équations précédentes admettent un système de solutions, et un seul, de la forme

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_q), \qquad \ldots, \qquad y_p = \varphi_p(x_1, x_2, \ldots, x_q),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ étant des séries entières en $x_1, x_2, \ldots, x_q$ qui s'annulent pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_q = 0$.

La formule de Lagrange est établie ici; puis on définit une fonction analytique, un arc de courbe analytique, une surface analytique, un point ordinaire d'une courbe ou d'une surface analytique.

La question de savoir si une fonction $f(x)$, définie dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$, est développable en série trigonométrique, revient, comme on sait, à trouver la limite d'une intégrale de la forme

$$\int_a^b \frac{\sin nx}{\sin x} f(x)\, dx,$$

où a et b sont des constantes, et où l'on suppose que n augmente indéfiniment. Cette étude est faite d'après une méthode analogue

à celle d'Ossian Bonnet, et en supposant que la fonction $f(x)$ satisfait à des conditions énoncées avec précision et qu'on appelle *conditions de Dirichlet*.

Le Chapitre se termine par une démonstration très simple, due à M. Lebesgue, d'un théorème de Weierstrass se rapportant à une fonction $f(x)$ continue dans un intervalle (a, b) : *ε étant un nombre positif donné à l'avance, on peut déterminer un polynome* $P(x)$, *tel que la différence* $f(x) - P(x)$ *soit inférieure à ε en valeur absolue pour toute valeur de x dans l'intervalle* (a, b); et enfin par l'exemple d'une fonction continue qui n'admet de dérivée pour aucune valeur de la variable.

Applications géométriques du calcul différentiel et du calcul intégral. — Les 140 dernières pages du Volume leur sont consacrées et sont rédigées avec le même soin que les parties purement analytiques qui précèdent. Les sujets traités sont les suivants :

Courbes planes. — Courbes enveloppes, courbure, contact des courbes planes.

Courbes gauches. — Plan osculateur, surfaces enveloppes. Courbure et torsion des courbes gauches. Contact des courbes gauches, des courbes et des surfaces.

Surfaces. — Courbure des courbes tracées sur une surface. Lignes asymptotiques. Lignes de courbure.

Notions sur les systèmes de droites. — Surfaces réglées, congruences, surface focale, congruence de normales. Théorème de Malus. Complexes.

Un assez grand nombre d'exercices est proposé à la fin de chaque Chapitre. Les uns sont des applications directes des méthodes exposées dans le Chapitre; les autres, dit l'auteur dans la Préface, sont un peu plus difficiles et sont le plus souvent empruntés à des Mémoires auxquels le lecteur est renvoyé. E. Lacour.

ANNALES INTERNATIONALES D'HISTOIRE. CONGRÈS DE PARIS, 1900. 5e Section : HISTOIRE DES SCIENCES. 1 vol. grand in-8°, 348 pages. Paris, Armand Colin; 1901.

Ce Volume, publié sous la direction de M. Paul Tannery, président de la Section, comprend les Mémoires suivants :

ANDRÉ LALANDE. — L'interprétation de la nature dans le *Valerius Terminus* de Bacon.

GASTON MILHAUD. — Sur un point de la philosophie scientifique d'Auguste Comte.

HEIBERG. — Anatolius sur les dix premiers nombres (texte grec inédit, traduction française de P. Tannery).

EDUARDO SAAVEDRA. — Note sur l'histoire de la résolution des équations cubiques. Observations de M. P. Tannery.

MORITZ CANTOR. — Beiträge zur Lebensgeschichte von Carl-Friedrich Gauss.

ANTONIO FAVARO. — Il metro proposto come unità di misura nel 1675.

MAURICE GALLIAN. — Sur les *Problèmes mécaniques* attribués à Aristote. Observations de M. Paul Tannery.

Baron CARRA DE VAUX. — Note sur les *Mécaniques* de Bédî ez-Zamân el Djazari et sur un appareil hydraulique attribué à Apollonius de Perse.

SIEGMUND GÜNTHER. — Die Kompromiss-Welt-Systeme des XVI, XVII und XVIII Jahrhunderts.

Prince NICOLAS GALITZYNE. — Les premières expériences de Montgolfier d'après des documents russes (avec quatre fac-similés d'aquarelles).

STANISLAS MEUNIER. — Sur l'évolution des idées dans le domaine de la Géologie générale.

E. GLEY. — Influence du positivisme sur le développement des sciences biologiques en France.

Dr MILLOT-CARPENTIER. — La Médecine au XIIIe siècle.

Dr ARMAND DELPEUCH. — Le rachitisme et la Médecine ancienne.

Dr Modestino del Gaizo. — Alcune linee del movimento della chirurgia italiana nel secolo decimoterzo.

Dr Victor Nicaise. — Notes sur l'état des sciences anatomique et physiologique à la venue de Vesale et de Harvey, et en particulier de ces sciences au moyen âge.

Paul Meuriot. — De l'expression *diaphragma* dans l'histoire de la Géographie ancienne.

Gustaf Eneström. — Sur la constitution d'un répertoire bibliographique de l'histoire des Sciences.

Paul Tannery. — Notes sur les manuscrits français de Munich 247 à 252 et de Vienne 7049-7050.

Paul Tannery. — Lettres inédites adressées au P. Mersenne (par ses correspondants bordelais, Pierre Trichet, J. Lacombe, Aubert, François du Verdus, Thomas Martel; en tout 9 lettres).

Nous donnons la liste complète de ces Mémoires, parce que le Congrès dont il s'agit a été la première tentative pour réunir les savants qui s'occupent de l'histoire des différentes Sciences et pour revendiquer la place légitime que l'ensemble de leurs travaux doit tenir dans l'histoire générale de la civilisation. Eu égard à la spécialisation indispensable aujourd'hui pour les travaux originaux, on pouvait se demander si l'idée était viable, s'il n'était pas préférable, par exemple, de laisser les historiens des Mathématiques aux Congrès des mathématiciens, etc. En somme, la tentative a réussi, et le Volume publié en est la preuve; pour ne pas parler de nos compatriotes, les noms, bien connus de nos lecteurs, des savants étrangers qui ont collaboré à ce Volume, la valeur des Mémoires insérés et le choix des sujets assureront certainement à cette publication un rang sensiblement au-dessus du niveau moyen des nombreux recueils fournis ou à fournir par les Congrès de 1900. Et l'on doit remarquer en même temps que, quoique en général de toute première main, les divers travaux de la Section d'histoire des Sciences offrent ce caractère de rester accessibles à tout homme instruit et de ne pas s'adresser exclusivement à des spécialistes.

Il y a bien dans ce Volume une lacune sensible; autant l'histoire de la Mathématique d'une part, celle de la Médecine de l'autre,

chacune avec ses annexes naturelles, se montrent vivantes, autant l'histoire de la Physique proprement dite et celle de la Chimie semblent abandonnées. En réalité, les travailleurs dans ces domaines ne font pas défaut, et ce sont des circonstances accidentelles qui ont privé les organisateurs de la 5e Section des Mémoires auxquels ils avaient réservé leur place. Mais il est vrai de dire que l'histoire de la Physique se présente aujourd'hui comme un écheveau tellement emmêlé qu'il s'agit tout d'abord de bien déterminer quels fils il faut suivre et quels nœuds il faut trancher ou débrouiller. Quant à la Chimie et à ses annexes, tandis que les publications si importantes qui se poursuivent sous la direction de M. Berthelot (collections des alchimistes, lapidaires) réunissent des matériaux surtout pour les recherches des générations futures, la Chimie moderne, qui, il y a 50 ans, n'était pas encore distincte de son histoire, commence à peine à sentir la nécessité de ne pas perdre son passé de vue; on ne peut donc nier qu'en fait l'histoire de la Physique et de la Chimie est relativement dans un état moins prospère que celle de la Mathématique pure, par exemple. C'est une raison de plus pour y appeler les bonnes volontés.

***

RICHARD (Jules). — Sur la surface des ondes de Fresnel. (Thèse de Doctorat présentée à la Faculté des Sciences de Paris.) In-4°, 128 pages. Châteauroux, P. Langlois, 1901.

C'est en étudiant la propagation de la lumière dans un milieu non isotrope que Fresnel a été conduit à considérer la surface des ondes.

Bien que l'origine de cette surface soit dans un phénomène physique, l'étude de ses propriétés et de ses singularités en a fait une question dont l'intérêt a depuis longtemps le caractère mathématique; la transformation apsidale, la théorie générale des complexes quadratiques, les questions de Géométrie infinitésimale relatives aux lignes asymptotiques ont trouvé tour à tour un champ d'application dans cette surface.

M. Cayley a étudié, sous le nom de *tétraédroïde,* une surface qui est la transformée homographique de la surface des ondes.

Divers auteurs ont trouvé les lignes asymptotiques de cette surface.

M. Darboux en a donné une propriété qui sert à les caractériser géométriquement; il a montré qu'on pouvait construire la surface par points et a appliqué la Géométrie cinématique à la recherche des rayons de courbure de la surface des ondes.

Cette surface possède un grand nombre de propriétés pouvant lui servir de définition, soit qu'on la considère comme une surface de Kummer, surface focale d'une congruence du deuxième ordre et de deuxième classe, ou encore surface singulière d'un complexe bien connu sous le nom de *complexe de Painvin*. Mais, le plus ordinairement, on la définit comme surface apsidale d'un ellipsoïde. C'est cette définition qu'adopte M. Richard. Il montre, dans son travail, que la surface se reproduit elle-même par un groupe de transformations qui sont les unes ponctuelles, les autres polaires avec une quadrique comme base; d'autres, au contraire, polaires, mais avec un complexe linéaire pour base de réciprocité.

La surface des ondes se trouve ainsi rattachée, de la façon la plus profitable, à cette théorie des groupes de transformations qui a reçu, par les belles découvertes de Lie, un essor si puissant.

E. E.

MÉLANGES.

THÈSES DE SCIENCES MATHÉMATIQUES SOUTENUES DEVANT LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS ET DEVANT LES FACULTÉS DES SCIENCES DES DÉPARTEMENTS DANS LE COURANT DU XIXe SIÈCLE.

(*Suite.*)

1868 (10 juillet).

Gruey (L.-J.). — Sur le calcul numérique des perturbations des petites planètes au moyen de quadratures.

1868 (10 juillet).

PUJET (A.-C.). — Des quadratures.

— Sur les mouvements simultanés d'un système de points matériels assujettis à rester constamment dans un plan passant par l'origine des coordonnées.

1868 (6 août).

DIDON (F.). — Étude de certaines fonctions analogues aux fonctions X_n de Legendre.

1870 (24 mars).

COLLET (J.). — Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction.

— Du facteur intégrant pour les expressions différentielles du premier ordre renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes.

1870 (2 juillet).

LE CORDIER (P.). — Sur les aires sphériques de Gauss, sur la périodicité qui caractérise les potentiels des lignes fermées, et sur les surfaces de niveau correspondantes.

— Usages des potentiels dans l'électro-dynamique et dans l'électromagnétisme.

1871 (16 décembre).

MAILLARD (S.-N.). — Recherches des caractéristiques des systèmes élémentaires de courbes planes du troisième ordre.

1874 (28 mars).

SALVERT (M.-A.-F. DE). — Étude sur le mouvement permanent des fluides.

1874 (28 novembre).

TANNERY (J.). — Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables.

1876 (15 février).

Léauté (H.-C.-V.-J.). — Étude géométrique du problème de l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre et à trois variables.

— Du frottement de pivotement.

1876 (21 juin).

Appell (P.-E.). — Sur la propriété des cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide.

1876 (24 juillet).

Baillaud (E.-B.). — Exposition de la méthode de M. Gyldén pour le développement des perturbations des comètes.

1876 (29 juillet).

Elliot (V.-Z.). — Détermination du nombre des intégrales abéliennes de première espèce.

1876 (3 août).

Joubert (C.-J.-E.). — Sur les équations qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques.

1877 (25 mars).

André (A.-D.). — Développement en séries des fonctions elliptiques et de leurs puissances.

— Terme général d'une série déterminée à la façon des séries récurrentes.

1877 (27 mars).

Périgaud (E.-L.-A.). — Exposé de la méthode de Hansen pour le calcul des perturbations spéciales des petites planètes.

1877 (16 juin).

Picard (C.-E.). — Application de la théorie des complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches.

1877 (29 novembre).

LAISANT (C.-A.). — Applications mécaniques du calcul des quaternions.

— Sur un nouveau mode de transformation des courbes et des surfaces.

1878 (30 janvier).

HARETU (S.-C.) — Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires.

1878 (14 mars).

PELLET (A.-C.-E.). — Sur la théorie des équations algébriques.

— Sur la théorie des surfaces.

1878 (13 juin).

LEGOUX (E.-A.). — Étude analytique et géométrique d'une famille de courbes représentées par une équation différentielle du premier ordre.

1878 (20 juillet).

HALPHEN (G.-H.) — Sur les invariants différentiels.

1879 (6 février).

PERROTIN (J.-A.). — Théorie de Vesta.

1879 (3 avril).

FLOQUET (A.-M.-G.) — Sur la théorie des équations différentielles linéaires.

1879 (8 avril).

BIEHLER (C.). — Sur les développements en série des fonctions doublement périodiques de troisième espèce.

— Sur la théorie des équations.

1879 (5 juillet).

EMMANUEL (D.). — Étude des intégrales abéliennes de troisième espèce.

1879 (18 juillet).

Puiseux (P.-H.). — Sur l'accélération séculaire du mouvement de la lune.

1879 (23 juillet).

Maximovitch (W.). — Nouvelle méthode pour intégrer les équations simultanées aux différentielles totales.

1879 (1er août).

Poincaré (J.-H.). — Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles.

1880 (22 avril).

Astor (A.-M.). — Étude sur quelques surfaces.

1880 (21 mai).

Esclaibes (R.-E. d'). — Sur les applications des fonctions elliptiques à l'étude des courbes de premier genre.

1880 (27 mai).

Niewenglowski (B.-A.). — Exposition de la méthode de Riemann pour la détermination des surfaces minima de contour donné.

1880 (10 juin).

Duport (L.-H.-J.). — Sur un mode particulier de représentation des imaginaires.

1880 (23 juillet).

Brillouin (L.-M.). — Intégration des équations différentielles auxquelles conduit l'étude des phénomènes d'induction dans les circuits dérivés.

1880 (3 novembre).

Charve (L.). — De la réduction des formes quadratiques ternaires positives et de leur application aux irrationnelles du troisième degré.

1880 (10 novembre).

Lecornu (L.-F.-A.). — Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles.

1880 (12 novembre).

Callandreau (P.-J.-O.). — Détermination des perturbations d'une petite planète par les méthodes de M. Gyldén. Application à Héra.

1880 (29 décembre).

Bourguet (J.-P.-L.). — Développement en séries des intégrales eulériennes.

1881 (8 juillet).

Goursat (E.-J.-B.). — Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique.

1882 (17 janvier).

Sauvage (L.-C.). — Sur les propriétés des fonctions définies par un système d'équations différentielles linéaires et homogènes à une ou plusieurs variables indépendantes.

1882 (7 février).

Gogou (C.). — Sur une inégalité lunaire à longue période due à l'action perturbatrice de Mars.

1882 (21 mars).

Sparre (M.-L.-M. de). — Sur le mouvement du pendule conique à la surface de la terre.

1882 (23 mars).

Simard (G.-F.-M.-P.). — Commentaire sur deux Mémoires de Riemann relatifs à la théorie générale des fonctions et au principe de Dirichlet.

1882 (28 mars).

Nicolas (J.). — Étude des fonctions de Fourier (première et deuxième espèce).

1882 (24 juin).

Koenigs (G.-X.-P.). — Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé.

1882 (28 juillet).

Autonne (L.-C.). — Recherches sur les intégrales algébriques des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels.

1883 (20 avril).

Raffy (L.). — Recherches algébriques sur les intégrales abéliennes.

1883 (4 juillet).

Brunel (G.-E.-A.). — Étude sur les relations algébriques entre les fonctions hyperelliptiques de genre 3.

1883 (13 novembre).

Guichard (C.). — Théorie des points singuliers essentiels.

1884 (17 juillet).

Obrecht (J.-A.) — Étude sur les éclipses des satellites de Jupiter.

1884 (24 juillet).

Molk (C.-F.-G.). — Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination.

1884 (25 juillet).

Stéphanos (C.). — Sur la théorie des formes binaires et sur l'élimination.

1885 (15 juin).

Boquet (F.-J.-C.-J.). — Développement de la fonction perturbatrice.

1885 (19 juin).

Demartres (G.-L.). — Sur les surfaces à génératrice circulaire.

1885 (7 juillet).

Dautheville (B.-F.-S.). — Étude sur les séries entières par rapport à plusieurs variables imaginaires indépendantes.

1885 (18 juillet).

Humbert (M.-G.). — Sur les courbes du genre *un*.

1885 (28 juillet).

Fabry (C.-E.). — Sur les intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels.

1886 (26 mars).

Berloty (C.-A.-M.-B.). — Théorie des quantités complexes à n unités principales.

1886 (2 avril).

Riquier (C.-E.-A.). — Extension à l'hyperespace de la méthode de M. Carl Neumann pour la résolution de problèmes relatifs aux fonctions de variables réelles qui vérifient l'équation différentielle $\Delta F = 0$.

1886 (16 juin).

Bigourdan (G.). — Sur l'équation personnelle dans les mesures d'étoiles doubles.

1886 (30 juin).

Stieltjes (T.-J.). — Recherches sur quelques séries semi-convergentes.

1886 (21 juillet).

Thévenet (A.-F.). — Étude analytique du déplacement infiniment petit d'un corps solide.

1886 (28 juillet).

Andoyer (M.-H.). — Contribution à la théorie des orbites intermédiaires.

1887 (10 juin).

Painlevé (P.). — Sur les lignes singulières des fonctions analytiques.

1887 (27 juin).

Hamy (M.-T.-A.). — Étude sur la figure des corps célestes.

1887 (28 juin).

Adam (P.-E.). — Sur les systèmes triples orthogonaux.

1887 (26 octobre).

Jamet (E.-V.). — Sur les courbes et les surfaces tétraédrales.

1887 (11 novembre).

Flamme (D.-J.-B.). — Recherche des expressions approchées des termes très éloignés dans les développements du mouvement elliptique des planètes.

1888 (19 juin).

Petot (C.-A.). — Sur une extension du théorème de Pascal à la Géométrie de l'espace.

1888 (12 juillet).

Vautier. — Recherches expérimentales sur la vitesse d'écoulement des liquides par un orifice en mince paroi.

1888 (16 juillet).

Stouff (M.-A.-X.). — Sur la transformation des fonctions fuchsiennes.

1888 (13 novembre).

Riemann (J.). — Sur les problèmes de Dirichlet.

1888 (27 novembre).

Ribière (C.-H.). — Sur divers cas de la flexion des prismes rectangles.

1889 (14 mars).

Cosserat (E.-M.-P.). — Sur le cercle considéré comme élément générateur de l'espace.

1889 (22 juillet).

Vogt (H.-G.). — Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre.

1889 (30 novembre).

Zaremba (S.). — Sur un problème concernant l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini.

1890 (26 février).

Carvallo (M.-E.). — Influence du terme de dispersion de Briot sur les lois de la double réfraction.

— Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes.

1890 (23 juin).

Blutel (E.-M.). — Recherches sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré.

1890 (4 juillet).

Andrade (J.-F.-C.). — Sur le mouvement d'un corps soumis à l'attraction newtonienne de deux corps fixes, et sur l'extension d'une propriété des mouvements képlériens.

1890 (10 juillet).

Lyon (J.). — Sur les courbes à torsion constante.

1890 (11 juillet).

Rivereau (P.-P.). — Sur les invariants de certaines classes d'équations différentielles homogènes par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées.

1891 (22 janvier).

Mangeot (F.-C.-S.). — De la symétrie courbe.

1891 (14 avril).

Bourlet (C.-E.). — Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues.

1891 (23 juillet).

Tannenberg (W. de). — Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes, qui admettent un groupe continu de transformations.

1891 (29 octobre).

Cels (J.-J.). — Sur les équations différentielles ordinaires.

1892 (16 mars).

Picart (T.-L.). — Sur la désagrégation des essaims météoriques.

1892 (30 mars).

Gonnessiat (F.). — Recherches sur l'équation personnelle dans les observations astronomiques de passages.

1892 (18 avril).

Padé (H.-E.). — Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles.

1892 (18 mai).

Hadamard (J.-S.). — Essai sur l'étude des fonctions données par le développement de Taylor.

1892 (13 juin).

Vessiot (E.-P.-J.). — Sur l'intégration des équations différentielles linéaires.

1892 (28 juin).

Paraf (A.). — Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale du second ordre.

1892 (25 novembre).

PERCHOT (L.-J.). — Sur les mouvements des nœuds et du périgée de la lune et sur les variations séculaires des excentricités et des inclinaisons.

1892 (6 décembre).

GÉRARD (M.-L.-J.). — Sur la Géométrie non euclidienne.

1892 (7 décembre).

MAILLET (E.-T.). — Recherches sur les substitutions, et en particulier sur les groupes transitifs.

1892 (13 décembre).

BOUASSE (M.-P.-H.). — Réflexion et réfraction dans les milieux isotropes, transparents et absorbants.

1893 (11 novembre).

LE VAVASSEUR (P.-R.). — Sur le système d'équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles satisfait la série hypergéométrique à deux variables.

1893 (15 novembre).

SAUTREAUX (C.-B.). — Sur une équation d'Hydrodynamique.

1893 (30 novembre).

TRESSE (A.-M.-L.). — Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations.

1893 (14 décembre).

Mlle KLUMPKE (D.). — Contribution à l'étude des anneaux de Saturne.

1893 (19 décembre).

PERIER (G.-E.). — Sur une équation différentielle du troisième ordre.

1893 (29 décembre).

Fabry (L.). — Étude sur la probabilité des comètes hyperboliques et l'origine des comètes.

1894 (18 janvier).

Antomari (F.-X.). — Application de la méthode cinématique à l'étude des surfaces réglées; mouvement d'un corps solide assujetti à cinq conditions.

1894 (8 mars).

Caronnet (T.-D.). — Recherches sur les surfaces isothermiques et les surfaces dont les rayons de courbures sont fonctions l'un de l'autre.

1894 (16 mars).

Cahen (E.). — Sur la fonction de Riemann et sur des fonctions analogues.

1894 (10 avril).

Grévy (A.-C.). — Étude sur les équations fonctionnelles.

1894 (7 juin).

Maltézos (C.-C.). — Les enveloppes solides minces.

— Les cloches.

1894 (8 juin).

Cousin (P.-A.). — Sur les fonctions de n variables complexes.

1894 (14 juin).

Borel (E.-F.-J.). — Sur quelques points de la théorie des fonctions.

1894 (27 juin).

Séguier (A.-M.-J. de). — Sur deux formules fondamentales dans la théorie des formes quadratiques et de la multiplication complexe d'après Kronecker.

1894 (27 juin).

Lelieuvre (M.-C.). — Sur les surfaces à génératrices rationnelles.

1894 (28 juin).

Cartan (E.-J.). — Sur la structure des groupes de transformations finis et continus.

1894 (29 juin).

Petrowitch (M.). — Sur les zéros et les infinis des intégrales des équations différentielles algébriques.

1895 (22 janvier).

Lacour (V.-L.-E.). — Des fonctions d'un point analytique à multiplicateurs exponentiels ou à périodes rationnelles.

— Sur l'équation de la chaleur.

1895 (24 janvier).

Le Roux (J.-M.). — Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées du second ordre à deux variables indépendantes.

1895 (28 mars).

Delassus (E.-M.). — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques réelles.

1895 (29 mai).

Delemer (J.-J.-B.). — Sur le mouvement varié de l'eau dans les tubes capillaires cylindriques, évasés à leur entrée, et sur l'établissement du régime uniforme dans ces tubes.

1895 (21 juin).

Edler von Leber (M.-J.). — Interpolation parabolique et hyperbolique.

— Convergence des séries algébriques.

1895 (5 novembre).

Coculescu (N.). — Sur les expressions approchées des termes de l'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice.

1896 (28 février).

Rougier (C.-J.-M.) — Sur quelques sous-groupes de la 11e classe du groupe modulaire.

1896 (27 mai).

Beudon (J.-A.-E.). — Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de paramètres.

1896 (8 juin).

Haure (J.-M.-T.). — Recherches sur les points de Weierstrass d'une courbe plane algébrique.

1897 (5 mars).

Thybaut (A.-L.). — Sur la déformation d'un paraboloïde et sur quelques problèmes qui s'y rattachent.

1897 (23 mars).

Féraud (A.-A.). — Sur la valeur approchée des coefficients d'ordre élevé dans les développements en séries.

1897 (24 mars).

Simonin (L.-M.-E.). — Sur l'orbite de (108) Hécube.

1897 (2 avril).

Leau (L.). — Étude sur les équations fonctionnelles à une ou plusieurs variables.

1897 (10 juin).

Mascart (J.-M.). — Contribution à l'étude des planètes télescopiques.

1897 (11 juin).

Suchar (J.). — Sur le problème général de l'inversion et sur une classe de fonctions qui se ramènent à des fonctions à multiplicateurs.

1897 (21 juin).

Boulanger (A.-H.-L.). — Contribution à l'étude des équations différentielles linéaires et homogènes intégrables algébriquement.

1897 (22 juin).

Lebeuf (A.-V.). — Sur une nouvelle démonstration des polynomes Hansen-Tisserand. Applications.

— Table pour le calcul des perturbations de Jupiter sur les petites planètes.

1897 (13 novembre).

Desaint (L.-A.-J.). — Sur quelques points de la théorie des fonctions.

1897 (24 novembre).

Nau (F.-N.). — Formation et extinction du clapotis.

1898 (21 janvier).

Bourget (C.-E.-H.). — Sur une classe particulière des groupes hyperabéliens.

1898 (22 avril).

Le Roy (E.-L.-E.-J.). — Sur l'intégration des équations de la chaleur.

1898 (24 juin).

Drach (J.-J.). — Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur une classification des transcendantes.

1898 (24 juin).

Marotte (F.-A.). — Les équations différentielles linéaires et la théorie des groupes.

1899 (24 mars).

Baire (R.-L.). — Sur les fonctions de variables réelles.

1899 (28 juin).

Cahen (A.). — Sur la formation explicite des équations différentielles du premier ordre dont l'intégrale générale est une fonction à nombre fini de branches.

1899 (28 juin).

Servant (G.-M.). — Essai sur les séries divergentes.

1899 (30 juin).

Tzitzéica (G.). — Sur les congruences cycliques et sur les systèmes triplement conjugués.

1899 (29 novembre).

Cotton (E.-C.). — Sur les variétés à trois dimensions.

1899 (20 décembre).

Sacerdote (E.-P.). — Recherches théoriques sur les déformations électriques des diélectriques solides isotropes.

1900 (29 mars).

Bachelier (L.-J.-B.-A.). — Théorie de la spéculation.

1900 (8 novembre).

Estanave (E.-P.). — Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire mince dont deux bords opposés au moins sont appuyés sur un cadre.

1900 (19 novembre).

Davidoglu (A.). — Sur l'équation des vibrations transversales des verges élastiques.

(*A suivre.*)

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HILBERT, Professeur à l'Université de Göttingen. — LES FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE (GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE). Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals.

Quels sont les principes fondamentaux de la Géométrie; quelle en est l'origine, la nature et la portée? Ce sont là des questions qui ont de tout temps préoccupé les mathématiciens et les penseurs, mais qui, il y a un siècle environ, ont pris pour ainsi dire une figure toute nouvelle, grâce aux idées de Lobatchevski et de Bolyai.

On s'est longtemps efforcé de démontrer la proposition connue sous le nom de *postulatum d'Euclide*, on a constamment échoué; nous connaissons maintenant la raison de ces échecs. Lobatchevski est parvenu à construire un édifice logique, aussi cohérent que la Géométrie d'Euclide, mais où le célèbre postulatum est supposé faux, et où la somme des angles d'un triangle est toujours plus petite que deux droits. Riemann a imaginé un autre système logique, également exempt de contradiction, et où cette somme est au contraire toujours plus grande que deux droits. Ces deux géométries, celle de Lobatchevski et celle de Riemann, sont ce qu'on appelle les *géométries non-euclidiennes*.

Le postulatum d'Euclide ne peut donc être démontré, et cette impossibilité est aussi absolument certaine que n'importe quelle vérité mathématique. Ce qui n'empêche pas l'Académie des Sciences de recevoir chaque année plusieurs démonstrations nouvelles auxquelles elle refuse naturellement l'hospitalité des *Comptes rendus*.

On a déjà beaucoup écrit sur les géométries non-euclidiennes; après avoir crié au scandale, on s'est habitué à ce qu'elles ont de paradoxal; plusieurs personnes sont allées jusqu'à douter du postulatum, à se demander si l'espace réel est plan, comme le supposait Euclide, ou s'il ne présente pas une légère *courbure*. Elles croyaient même que l'expérience pouvait leur donner une réponse

à cette question. Inutile d'ajouter que c'était là méconnaître complètement la nature de la Géométrie, qui n'est pas une science expérimentale.

Mais pourquoi, parmi tous les axiomes de la Géométrie, le postulatum serait-il le seul qu'on pût nier sans dommage pour la Logique? D'où tiendrait-il ce privilège? On ne le voit pas très bien et, à ce compte, bien d'autres conceptions sont possibles.

Cependant beaucoup de géomètres contemporains ne semblent pas penser ainsi. En accordant le droit de cité aux deux géométries nouvelles, ils croient sans doute avoir été jusqu'au bout des concessions possibles. C'est pourquoi ils ont imaginé ce qu'ils appellent la *Géométrie générale*, qui comprend comme cas particuliers les trois systèmes d'Euclide, de Lobatchevski et de Riemann, et qui n'en comprend pas d'autres. Et cette épithète de *générale* signifie évidemment, dans leur esprit, qu'aucune autre géométrie n'est concevable.

Ils perdront cette illusion s'ils lisent l'Ouvrage de M. Hilbert. Ils y verront éclater de toutes parts les cadres dans lesquels ils avaient voulu nous enfermer.

Pour bien comprendre cette tentative nouvelle, il faut se rappeler quelle a été depuis cent ans l'évolution de la pensée mathématique, non seulement en Géométrie, mais en Arithmétique et en Analyse. La notion de nombre s'est éclaircie et précisée; en même temps elle a reçu des généralisations diverses. La plus précieuse pour les analystes est celle qui résulte de l'introduction des *imaginaires* dont les mathématiciens modernes ne pourraient plus se passer; mais on ne s'est pas arrêté là et l'on a fait entrer dans la Science d'autres généralisations du nombre, ou, comme on dit, d'autres catégories de nombres complexes.

Les opérations de l'Arithmétique ont été de leur côté soumises à la critique, et les quaternions de Hamilton nous ont montré un exemple d'une opération qui présente une analogie presque parfaite avec la multiplication, que l'on peut appeler du même nom, et qui pourtant n'est pas commutative, c'est-à-dire dont le produit change quand on intervertit l'ordre des facteurs. C'était là, en Arithmétique une révolution toute pareille à celle qu'avait faite Lobatchevski en Géométrie.

Notre façon de concevoir l'infini s'est également modifiée.

M. G. Cantor nous a appris à distinguer des degrés dans l'infini lui-même (qui n'ont d'ailleurs rien de commun avec les infiniment petits des différents ordres créés par Leibniz en vue du calcul infinitésimal ordinaire). La notion du continu, longtemps regardée comme primitive, a été analysée et réduite à ses éléments.

Mentionnerai-je également les travaux des Italiens qui se sont efforcés de créer un symbolisme logique universel et de réduire le raisonnement mathématique à des règles purement mécaniques?

Il faut se rappeler tout cela si l'on veut comprendre comment des conceptions, qui auraient fait bondir Lobatchevski lui-même, tout révolutionnaire qu'il fût, nous semblent aujourd'hui presque naturelles et ont pu être proposées par M. Hilbert avec une parfaite tranquillité.

La liste des axiomes. — La première chose à faire était d'énumérer tous les axiomes de la Géométrie. Ce n'était pas si facile qu'on pourrait le croire; il y a les axiomes que l'on voit et ceux qu'on ne voit pas, ceux qu'on introduit inconsciemment et sans s'en apercevoir. Euclide lui-même, que l'on croit un logicien impeccable, en applique souvent qu'il n'énonce pas.

La liste de M. Hilbert est-elle définitive? Il est permis de le croire, car elle semble avoir été dressée avec soin. Le savant Professeur répartit les axiomes en cinq groupes :

I. Axiome der Verknüpfung (je traduirai par *axiomes projectifs* au lieu de chercher une traduction littérale, comme par exemple *axiomes de la connection,* qui ne saurait être satisfaisante).

II. Axiome der Anordnung (axiomes de l'ordre).

III. Axiome d'Euclide.

IV. Axiomes de la congruence ou axiomes métriques.

V. Axiome d'Archimède.

Parmi les axiomes projectifs, nous distinguerons ceux du plan et ceux de l'espace ; les premiers sont ceux qui dérivent de la proposition bien connue : *par deux points passe une droite et une seule;* mais je préfère traduire littéralement afin de bien faire comprendre la pensée de M. Hilbert.

« Imaginons trois systèmes d'objets que nous appellerons *points,*

droites et *plans*. Imaginons que ces points, droites et plans soient liés par certaines relations que nous exprimerons par les mots *être situé sur*, *entre*, etc.

» I. — 1. Deux points différents A et B déterminent toujours une droite a; ce que nous écrirons

$$AB = a \quad \text{ou} \quad BA = a.$$

» Au lieu du mot *déterminent* nous emploierons également d'autres tournures de phrase qui seront synonymes; nous dirons : A est situé sur a, A est un point de a, a passe par A, a joint A à B, etc.

» I. — 2. Deux points quelconques d'une droite déterminent cette droite, c'est-à-dire que si $AB = a$ et que $AC = a$, et si B est différent de C, on a aussi $BC = a$. »

Voici les réflexions que doivent nous inspirer ces énoncés : les expressions, *être situé sur, passer par*, etc., ne sont pas destinées à évoquer des images; elles sont simplement des synonymes du mot *déterminer*. Les mots *point*, *droite* et *plan* eux-mêmes ne doivent provoquer dans l'esprit aucune représentation sensible. Ils pourraient indifféremment désigner des objets d'une nature quelconque, pourvu qu'on pût établir entre ces objets une correspondance telle qu'à tout système de deux des objets appelés *points* correspondît un des objets appelés *droites*, et un seul. Et c'est pourquoi il devient nécessaire d'ajouter (I, 2) que, si la droite qui correspond au système des deux points A et B est la même que celle qui correspond au système des deux points B et C, c'est aussi la même qui correspond au système des deux points A et C.

Ainsi M. Hilbert a, pour ainsi dire, cherché à mettre les axiomes sous une forme telle qu'ils puissent être appliqués par quelqu'un qui n'en comprendrait pas le sens parce qu'il n'aurait jamais vu ni point, ni droite, ni plan. Les raisonnements doivent pouvoir, d'après lui, se ramener à des règles purement mécaniques, et il suffit, pour faire la Géométrie, d'appliquer servilement ces règles aux axiomes, sans savoir ce qu'ils veulent dire. On pourra ainsi construire toute la Géométrie, je ne dirai pas précisément sans y rien comprendre, puisqu'on saisira l'enchaînement logique des

propositions, mais tout au moins sans y rien voir. On pourrait confier les axiomes à une machine à raisonner, par exemple au *piano raisonneur* de Stanley Jevons, et l'on en verrait sortir toute la Géométrie.

C'est la même préoccupation qui a inspiré certains savants italiens, tels que MM. Peano et Padoa, qui se sont efforcés de créer une *pasigraphie,* c'est-à-dire une sorte d'Algèbre universelle où tous les raisonnements sont remplacés par des symboles ou des formules.

Cette préoccupation peut sembler artificielle et puérile; et il est inutile de faire observer combien elle serait funeste dans l'enseignement et nuisible au développement des esprits; combien elle serait desséchante pour les chercheurs, dont elle tarirait promptement l'originalité. Mais, chez M. Hilbert, elle s'explique et se justifie, si l'on se rappelle le but poursuivi. La liste des axiomes est-elle complète, ou en avons-nous laissé échapper quelques-uns que nous appliquons inconsciemment? Voilà ce qu'il faut savoir. Pour cela nous avons un critère, et nous n'en avons qu'un. Il faut chercher si la Géométrie est une conséquence logique des axiomes explicitement énoncés, c'est-à-dire si ces axiomes confiés à la machine à raisonner peuvent en faire sortir toute la suite des propositions.

Si oui, on sera certain de n'avoir rien oublié. Car notre machine ne peut fonctionner que conformément aux règles de la Logique pour lesquelles elle a été construite; elle ignore ce vague instinct que nous appelons *intuition.*

Je ne m'étendrai pas sur les axiomes projectifs de l'espace que l'auteur numérote I, 3, 4, 5, 6. Rien n'est changé aux énoncés habituels.

Un mot seulement sur l'axiome I, 7, qui se formule ainsi :

« Sur toute droite il y a au moins deux points; sur tout plan, il y a au moins trois points non en ligne droite; dans l'espace il y a au moins quatre points qui ne sont pas dans un même plan. »

Cet énoncé est caractéristique. Quiconque aurait laissé à l'intuition une place, si petite qu'elle fût, n'aurait pas songé à dire que sur toute droite il y a au moins deux points, ou bien il aurait ajouté tout de suite qu'il y en a une infinité; car l'intuition de la

droite lui aurait révélé immédiatement et simultanément ces deux vérités.

Passons au second groupe, celui des axiomes de l'ordre. Voici l'énoncé des deux premiers :

« Si trois points sont sur une même droite, il y a entre eux une certaine relation que nous exprimons en disant que l'un des points, et un seulement, est entre les deux autres. Si C est entre A et B, et si D est entre A et C, D sera aussi entre A et B, etc. »

Ici encore nous ne faisons pas intervenir l'intuition; nous ne cherchons pas à approfondir ce que signifie le mot *entre,* toute relation satisfaisant aux axiomes pourrait être désignée par le même mot. Voilà qui est bien propre à nous éclairer sur la nature purement formelle des définitions mathématiques; mais je n'insiste pas, car je n'aurais qu'à répéter ce que j'ai dit à propos du premier groupe.

Mais une autre réflexion s'impose. Les axiomes de l'ordre sont présentés comme dépendant des axiomes projectifs, et ils n'auraient plus aucun sens si l'on n'admettait pas ces derniers, puisqu'on ne saurait ce que c'est que trois points en ligne droite. Et cependant il existe une géométrie particulière, purement qualitative, et qui est absolument indépendante de la Géométrie projective, qui ne suppose connues ni la notion de droite, ni celle de plan, mais seulement celles de ligne et de surface; c'est ce qu'on appelle l'*Analysis situs*. Ne serait-il pas préférable de donner aux axiomes du deuxième groupe une forme qui les affranchît de cette dépendance et les séparât complètement du premier groupe? Il reste à savoir si cela serait possible, en conservant à ces axiomes leur caractère purement logique, c'est-à-dire en fermant complètement la porte à toute intuition.

Le troisième groupe ne contient qu'un seul axiome, qui est le célèbre postulatum d'Euclide; je remarquerai seulement que, contrairement à l'usage ordinaire, il est présenté avant les axiomes métriques.

Ces derniers forment le quatrième groupe. Nous y distinguerons trois sous-groupes. Les propositions IV, 1, 2, 3 sont les axiomes métriques des segments : ces axiomes servent à définir les longueurs. On conviendra de dire qu'un segment pris sur une

droite peut être congruent (égal) à un segment pris sur une autre droite; c'est l'axiome IV, 1; mais cette convention n'est pas tout à fait arbitraire; elle doit être faite de façon que deux segments congruents à un même troisième soient congruents entre eux (IV, 2); on définit ensuite par une convention nouvelle l'addition des segments, et cette convention, à son tour, doit être faite de façon qu'en additionnant des segments égaux on trouve des sommes égales; et c'est là l'axiome IV, 3.

Les propositions IV, 4, 5 sont les axiomes correspondants pour les angles. Mais cela ne suffit pas encore : aux deux sous-groupes des axiomes métriques des segments et des angles il faut adjoindre l'axiome métrique des triangles (que M. Hilbert numérote IV, 6); si deux triangles ont un angle égal compris entre côtés égaux, les autres angles de ces deux triangles sont égaux chacun à chacun.

On retrouve là l'un des cas connus de l'égalité des triangles, que l'on démontre d'ordinaire par surperposition, et qu'on doit poser en postulat si l'on veut éviter de faire appel à l'intuition. Quand d'ailleurs on se servait de l'intuition, c'est-à-dire de la superposition, on voyait du même coup que les troisièmes côtés étaient égaux dans les deux triangles, et les deux propositions étaient unies pour ainsi dire dans une même aperception; ici, au contraire, nous les séparons; de l'une d'elles nous faisons un postulat, mais nous n'érigeons pas l'autre en postulat, parce qu'elle peut se déduire logiquement de la première.

Autre remarque : M. Hilbert dit bien que le segment AB est congruent à lui-même, mais (et de même pour les angles) il devrait, semble-t-il, ajouter qu'il est congruent au segment inverse BA. Cet axiome (qui implique la symétrie de l'espace) n'est pas identique à ceux qui sont explicitement énoncés. Je ne sais s'il pourrait s'en déduire logiquement; je crois que oui, mais, étant donnée la marche des raisonnements de M. Hilbert, il me semble que ce postulat est appliqué sans être énoncé (page 17, ligne 18).

Je regretterai aussi que, dans cet exposé des axiomes métriques, il ne reste plus aucune trace d'une notion dont Helmholtz avait, le premier, compris l'importance : je veux parler du déplacement d'une figure invariable. On aurait pu conserver à cette notion son rôle naturel, sans sacrifier le caractère logique des axiomes. On aurait pu dire, par exemple : Je définis entre les figures une

certaine relation que j'appelle *congruence*, etc.; deux figures congruentes à une même troisième sont congruentes entre elles; deux figures congruentes sont identiques quand trois points de l'une, non en ligne droite, sont identiques aux trois points correspondants de l'autre, etc. On aurait évité ainsi l'introduction artificielle de cet axiome IV, 6, et les postulats auraient été rattachés à leur véritable origine psychologique.

Le cinquième groupe ne comprend qu'un seul axiome, celui d'Archimède.

Soient deux points quelconques A et B sur une droite D; soit a un segment quelconque; construisons sur D, à partir du point A, et dans la direction AB, une série de segments tous égaux entre eux et égaux à a : AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$; on pourra toujours prendre n assez grand pour que le point B se trouve sur l'un de ces segments.

C'est-à-dire que, si l'on se donne deux longueurs quelconques l et L, on peut toujours trouver un nombre entier n assez grand pour que, en ajoutant n fois à elle-même la longueur l, on obtienne une longueur totale plus grande que L.

Indépendance des axiomes. — La liste des axiomes une fois dressée, il faut voir si elle est exempte de contradictions. Nous savons bien que oui, puisque la Géométrie existe; et M. Hilbert répond oui également, en construisant une géométrie. Mais, chose étrange, cette géométrie n'est pas tout à fait la nôtre, son espace n'est pas le nôtre, ou du moins ce n'en est qu'une partie. Dans l'espace de M. Hilbert, il n'y a pas tous les points qui sont dans le nôtre, mais ceux seulement qu'on peut, en partant de deux points donnés, construire par le moyen de la règle et du compas. Dans cet espace, par exemple, il n'existerait pas, en général, un angle qui serait le tiers d'un angle donné.

Je crois bien que cette conception aurait été regardée par Euclide comme plus raisonnable que la nôtre. Toujours est-il que ce n'est pas le nôtre. Pour retrouver notre géométrie, il faudrait ajouter un axiome.

« Si, sur une droite, il y a une double infinité de points A_1, A_2, ..., A_n, ..., B_1, B_2, ..., B_n, ..., tels que B_q soit compris entre A_p et

B_{q-1}, et A_p entre B_q et A_{p-1}, quels que soient p et q, il y aura sur cette droite au moins un point C qui sera entre A_p et B_q, quels que soient p et q. »

On doit se demander ensuite si les axiomes sont indépendants, c'est-à-dire si l'on peut sacrifier l'un des cinq groupes en conservant les quatre autres et obtenir néanmoins une géométrie cohérente. C'est ainsi qu'en supprimant le groupe III (postulatum d'Euclide) on obtient la géométrie non-euclidienne de Lobatschevski.

On peut également supprimer le groupe IV. M. Hilbert a réussi à conserver les groupes I, II, III et V, ainsi que les deux sous-groupes des axiomes métriques des segments et des angles, tout en rejetant l'axiome métrique des triangles, c'est-à-dire la proposition IV, 6.

Voici comment il y parvient : considérons, pour simplifier, une Géométrie plane et soit P le plan dans lequel nous opérons; nous conserverons aux mots *points* et *droites* leur sens habituel; de même nous conserverons aux angles leurs mesures habituelles; mais il n'en sera pas de même pour les longueurs. Une longueur sera mesurée *par définition* par sa projection sur un plan Q différent de P, cette projection conservant elle-même sa mesure habituelle. Il est clair que tous les axiomes subsisteront, sauf les axiomes métriques. Les axiomes métriques des angles subsisteront également, puisque nous ne changeons rien à la mesure des angles; ceux des segments sont vrais également, puisque, chaque segment du plan P est mesuré par un autre segment qui est sa projection sur le plan Q, et que ce dernier segment est mesuré à la manière habituelle. Au contraire, les théorèmes sur l'égalité des triangles, tels que l'axiome IV, 6, ne sont plus vrais. Cette solution ne me satisfait qu'à moitié; les angles ont été définis indépendamment des longueurs, sans qu'on se soit préoccupé de mettre les deux définitions d'accord (ou plutôt en les mettant en désaccord à dessein). Il suffirait de changer l'*une* des deux définitions pour retomber sur la Géométrie classique. Je préférerais qu'on donnât des longueurs une définition telle qu'il devînt impossible de trouver une définition des angles satisfaisant aux axiomes métriques des angles et des triangles. Cela ne serait d'ailleurs pas difficile.

Il aurait été facile à M. Hilbert de créer une géométrie où les axiomes de l'ordre seraient abandonnés, tandis que tous les autres seraient conservés. Ou plutôt cette Géométrie existe déjà, ou plutôt encore il en existe déjà deux. Il y a celle de Riemann, pour laquelle, il est vrai, le postulatum d'Euclide (groupe III) est abandonné également, puisque la somme des angles d'un triangle est plus grande que deux droits. Pour bien faire comprendre ma pensée, je me bornerai à considérer une géométrie à deux dimensions. La Géométrie de Riemann à deux dimensions n'est autre chose que la Géométrie sphérique, à une condition toutefois : c'est que l'on ne regarde pas comme distincts deux points diamétralement opposés sur la sphère. Les éléments de cette Géométrie seront donc les différents diamètres de cette sphère. Or, si l'on envisage trois diamètres d'une même sphère situés dans un même plan diamétral, on n'a aucune raison de dire que l'un d'eux est *entre* les deux autres. Le mot *entre* n'a plus de sens, et les axiomes de l'ordre tombent d'eux-mêmes.

Si nous voulons maintenant une Géométrie où les axiomes de de l'ordre ne subsisteront pas, et où l'on conservera le postulatum d'Euclide avec les autres, nous n'avons qu'à prendre pour éléments les points et les droites *imaginaires* de l'espace ordinaire. Il est clair que les points imaginaires de l'espace ne nous sont pas donnés comme *rangés* dans un ordre déterminé. Mais il y a plus : on peut se demander s'ils sont susceptibles d'être ainsi rangés; cela serait sans doute possible, comme l'a montré G. Cantor (à la condition, bien entendu, de ne pas toujours ranger dans le voisinage l'un de l'autre des points que nous regardons comme infiniment voisins, de rompre par conséquent la continuité de l'espace). On pourrait bien, dis-je, les ranger, mais cela ne pourrait pas se faire de telle façon que cet ordre ne soit pas altéré par les diverses opérations de la Géométrie (perspective, translation, rotation, etc.). Les axiomes de l'ordre ne sont donc pas applicables à cette Géométrie.

La Géométrie non archimédienne. — Mais la conception la plus originale de M. Hilbert, c'est celle de la Géométrie non archimédienne, où tous les axiomes restent vrais, sauf celui d'Archimède. Pour cela il fallait d'abord construire un *système de*

nombres non archimédiens, c'est-à-dire un système d'éléments entre lesquels on pût concevoir des relations d'égalité et d'inégalité et auxquels on pût appliquer des opérations correspondant à l'addition et à la multiplication arithmétiques, et cela de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

1° Les règles arithmétiques de l'addition et de la multiplication (commutativité, associativité, distributivité, etc.; *Aritmetische Axiome der Verknupfung*) subsistent sans changement.

2° Les règles du calcul et de la transformation des inégalités (*Aritmetische Axiome der Anordnung*) subsistent également.

3° L'axiome d'Archimède n'est pas vrai.

On peut arriver à ce résultat en choisissant pour élément des séries de la forme suivante :

$$A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + A_2 t^{m-2} + \ldots,$$

où m est un entier positif ou négatif et où les coefficients A sont réels, et en convenant d'appliquer à ces séries les règles ordinaires de l'addition et de la multiplication. Il faut ensuite définir les conditions d'inégalité de ces séries, de façon à *ranger* nos éléments dans un ordre déterminé. Nous y arriverons par la convention suivante : nous attribuerons à notre série le signe de A_0 et nous dirons qu'une série est plus petite qu'une autre quand, retranchée de celle-ci, elle donne une différence positive.

Il est clair qu'avec cette convention, les règles du calcul des inégalités subsistent; mais l'axiome d'Archimède n'est plus vrai; et, en effet, si nous prenons les deux éléments 1 et t; le premier, additionné à lui-même autant de fois qu'on le voudra, restera toujours plus petit que le second. On aura toujours $t > n$, quel que soit l'entier n, puisque la différence $t - n$ sera toujours positive, le coefficient du premier terme t, qui, par définition, donne son signe, restant toujours égal à 1.

Nos nombres vulgaires rentrent comme cas particuliers parmi ces *nombres non archimédiens.* Les nouveaux nombres viennent s'intercaler pour ainsi dire dans la série de nos nombres vulgaires, de telle façon qu'il y ait, par exemple, une infinité de nombres nouveaux plus petits qu'un nombre vulgaire donné A et plus grands que tous les nombres vulgaires inférieurs à A.

Cela posé, imaginons un espace à trois dimensions où les coordonnées d'un point seraient mesurées, non pas par des nombres vulgaires, mais par des nombres non archimédiens, mais où les équations habituelles de la droite et du plan subsisteraient, de même que les expressions analytiques des angles et des longueurs. Il est clair que dans cet espace tous les axiomes resteraient vrais, sauf celui d'Archimède.

Sur une droite quelconque, entre nos points vulgaires, viendraient s'intercaler des points nouveaux. Si, par exemple, D_0 est une droite vulgaire, D_1 la droite non archimédienne correspondante; si P est un point vulgaire quelconque de D_0, et si ce point partage D_0 en deux demi-droites S et S′ (j'ajoute, pour préciser, que je considère P comme ne faisant partie ni de S ni de S′), il y aura sur D_1 une infinité de points nouveaux tant entre P et S qu'entre P et S′. Il y aura également sur D_1 une infinité de points nouveaux qui seront à droite de tous les points vulgaires de D_0. En résumé, notre espace vulgaire n'est qu'une partie de l'espace non archimédien.

Au premier abord, l'esprit se révolte contre de pareilles conceptions. C'est que, par une vieille habitude, il cherche une représentation sensible. Il faut qu'il se débarrasse de cette préoccupation s'il veut arriver à comprendre, et cela est encore plus nécessaire que pour la Géométrie non euclidienne. M. Hilbert ne s'est proposé qu'une chose : construire un système d'éléments susceptibles de certaines relations logiques, et il lui suffit de montrer que ces relations n'impliquent pas de contradiction interne.

Qu'on remarque cependant ceci : la Géométrie non euclidienne respectait pour ainsi dire notre conception qualitative du continu géométrique tout en bouleversant nos idées sur la mesure de ce continu. La Géométrie non archimédienne détruit cette conception, elle dissèque le continu pour y introduire des éléments nouveaux.

Quoi qu'il en soit, M. Hilbert poursuit les conséquences de ses prémisses et il cherche comment on pourrait refaire la Géométrie sans se servir de l'axiome d'Archimède. Pas de difficulté en ce qui concerne les Chapitres que les écoliers appellent le *premier* et le *deuxième* Livre. Cet axiome n'y intervient nulle part.

Le troisième Livre traite des proportions et de la similitude. Voici, en substance, la marche que suit M. Hilbert pour le recon-

stituer sans avoir recours à l'axiome d'Archimède. Il prend la construction habituelle de la quatrième proportionnelle comme définition de la proportion, mais une pareille définition a besoin d'être justifiée; il faut montrer d'abord que le résultat est le même, quelles que soient les lignes auxiliaires employées dans la construction, et ensuite que les règles ordinaires du calcul s'appliquent aux proportions ainsi définies. C'est cette justification que M. Hilbert nous donne d'une façon satisfaisante.

Le quatrième Livre traite de la mesure des aires planes; si cette mesure peut s'établir facilement sans le secours du principe d'Archimède, c'est parce que deux polygones équivalents ou bien peuvent être décomposés en triangles de telle façon que les triangles élémentaires de l'un et ceux de l'autre soient égaux chacun à chacun (ou, en d'autres termes, peuvent être ramenés l'un à l'autre par le procédé du casse-tête chinois), ou bien peuvent être regardés comme des différences de polygones susceptibles de ce mode de décomposition (c'est toujours le même procédé, en admettant non seulement des triangles additifs, mais encore des triangles soustractifs). Mais nous devons observer qu'une circonstance analogue ne paraît pas se retrouver pour deux polyèdres équivalents, de sorte qu'on peut se demander si l'on peut déterminer, par exemple le volume de la pyramide sans un appel plus ou moins déguisé au calcul infinitésimal. Il n'est donc pas certain qu'on pourrait se passer aussi facilement de l'axiome d'Archimède dans la mesure des volumes que dans celle des aires planes. M. Hilbert ne l'a d'ailleurs pas tenté.

Une question restait à traiter toutefois ; étant donné un polygone, est-il possible de le décomposer en triangles et d'enlever l'un des morceaux de façon que le polygone restant soit équivalent au polygone donné, c'est-à-dire de façon qu'en transformant ce polygone restant par le procédé du casse-tête chinois, on puisse retomber sur le polygone primitif. D'ordinaire, on se borne à dire que cela est impossible parce que le tout est plus grand que la partie. C'est là invoquer un axiome nouveau, et, quelque évident qu'il nous paraisse, le logicien serait plus satisfait si l'on pouvait l'éviter. M. Schur a trouvé la démonstration, il est vrai, mais en s'appuyant sur l'axiome d'Archimède; M. Hilbert voulait y arriver sans se servir de cet axiome. Voici par quel artifice il y par-

vient; il admet que la *surface* du triangle est *par définition* le demi-produit de sa base par sa hauteur, et il justifie cette définition en montrant que deux triangles équivalents (au point de vue du casse-tête chinois) ont même *surface* (au sens de la nouvelle définition) et que la *surface* d'un triangle décomposable en plusieurs autres est la somme des *surfaces* des triangles composants. Une fois cette justification terminée, tout le reste suit sans difficulté. C'est donc toujours la même marche. Pour éviter d'incessants appels à l'intuition, qui nous fournirait sans cesse de nouveaux axiomes, on transforme ces axiomes en définitions, et l'on justifie après coup ces définitions en montrant qu'elles sont exemptes de contradictions.

La Géométrie non arguésienne. — Le théorème fondamental de la Géométrie projective est le théorème de Desargues. Deux triangles sont dits *homologues* lorsque les droites qui joignent chacun à chacun les sommets correspondants se coupent en un même point. Desargues a démontré que les points d'intersection des côtés correspondants de deux triangles homologues sont sur une même ligne droite; la réciproque est également vraie.

Le théorème de Desargues peut s'établir de deux manières :

1° En se servant des axiomes projectifs du plan et des axiomes métriques du plan;

2° En se servant des axiomes projectifs du plan et de ceux de l'espace.

Le théorème pourrait donc être découvert par un animal à deux dimensions, à qui une troisième dimension paraîtrait aussi inconcevable qu'à nous une quatrième, qui par conséquent ignorerait les axiomes projectifs de l'espace, mais qui aurait vu se déplacer, dans le plan qu'il habite, des figures invariables analogues à nos corps solides, et qui, par conséquent, connaîtrait les axiomes métriques. Le théorème pourrait être découvert également par un animal à trois dimensions qui connaîtrait les axiomes projectifs de l'espace, mais qui, n'ayant jamais vu se déplacer de corps solides, ignorerait les axiomes métriques.

Mais pourrait-on établir le théorème de Desargues sans se servir ni des axiomes projectifs de l'espace, ni des axiomes métriques,

mais seulement des axiomes projectifs du plan? On pensait que non, mais on n'en était pas sûr. M. Hilbert a tranché la question en construisant une *géométrie non arguésienne,* qui est, bien entendu, une géométrie plane. Considérons une ellipse E. A l'extérieur de cette ellipse, le mot *droite* conserve son sens habituel; à l'intérieur le mot *droite* prend un sens différent et il s'applique à un arc de cercle qui, prolongé, irait passer par un point fixe P extérieur à l'ellipse. Une droite qui traverse l'ellipse E se composera donc de deux parties rectilignes, au sens ordinaire du mot, raccordées à l'intérieur de l'ellipse par un arc de cercle; tel un rayon lumineux qui serait dévié de sa trajectoire rectiligne en traversant un corps réfringent.

Les axiomes projectifs du plan seront encore vrais si l'on suppose le point P assez éloigné de l'ellipse E.

Plaçons maintenant deux triangles homologues en dehors de l'ellipse E, et de telle façon que leurs côtés ne rencontrent pas E; les trois droites qui joignent deux à deux les sommets correspondants, *si on les entend au sens ordinaire du mot,* iront se couper en un même point Q d'après le théorème de Desargues; supposons que ce point Q soit à l'intérieur de E. *Si maintenant nous entendons le mot* droite *au sens nouveau,* les trois droites qui joignent les sommets correspondants seront déviées en pénétrant à l'intérieur de l'ellipse. Elles n'iront donc plus passer en Q, elles ne seront plus concourantes. Le théorème de Desargues n'est plus vrai dans notre nouvelle géométrie, c'est une géométrie non arguésienne.

La Géométrie non pascalienne. — M. Hilbert ne s'arrête pas là et il introduit encore une nouvelle conception. Pour bien la comprendre, il nous faut d'abord retourner un instant dans le domaine de l'Arithmétique. Nous avons vu plus haut s'élargir la notion de nombre, par l'introduction des *nombres non archimédiens.* Il nous faut une classification de ces nombres nouveaux, et pour l'obtenir nous allons classer d'abord les axiomes de l'Arithmétique en quatre groupes qui seront :

1° Les lois d'associativité et de commutativité de l'addition, la loi d'associativité de la multiplication, les deux lois de distributi-

vité de la multiplication; ou en résumé toutes les règles de l'addition et de la multiplication, sauf la loi de commutativité de la multiplication;

2° Les axiomes de l'ordre, c'est-à-dire les règles du calcul des inégalités;

3° La loi de commutativité de la multiplication, d'après laquelle on peut intervertir l'ordre des facteurs sans changer le produit;

4° L'axiome d'Archimède.

Les nombres qui admettront les axiomes des deux premiers groupes seront dits *arguésiens;* ils pourront être *pascaliens* ou *non pascaliens* selon qu'ils satisferont ou ne satisferont pas à l'axiome du troisième groupe, ils seront *archimédiens* ou *non archimédiens,* suivant qu'ils satisferont ou non à l'axiome du quatrième groupe. Nous ne tarderons pas à voir la raison de ces dénominations.

Les nombres ordinaires sont à la fois arguésiens, pascaliens et archimédiens. On peut démontrer la loi de commutativité en partant des axiomes des deux premiers groupes et de l'axiome d'Archimède; il n'y a donc pas de nombres arguésiens, archimédiens et non pascaliens.

En revanche, nous avons cité plus haut un exemple de nombres arguésiens, pascaliens et non archimédiens; c'est ce que j'appellerai les *nombres du système* T, et je rappelle qu'à chacun de ces nombres correspond une série de la forme

$$A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \ldots,$$

où les A sont des nombres réels ordinaires.

Il est aisé de former, par un procédé analogue, un système de nombres arguésiens, non pascaliens et non archimédiens. Les éléments de ce système seront des séries de la forme

$$S = T_0 s^n + T_1 s^{n-1} + \ldots,$$

où s est un symbole analogue à t, n un entier positif ou négatif, et T_0, T_1, ... des nombres du système T; si donc on remplaçait les coefficients T_0, T_1, ... par les séries en t correspondantes, on aurait une série dépendant à la fois de t et de s. On addition-

nera les séries S d'après les règles ordinaires, et de même pour la multiplication de ces séries on admettra les règles de distributivité et d'associativité, mais on admettra que la loi de commutativité n'est pas vraie et qu'au contraire $st = -ts$.

Il reste à *ranger* les séries dans un ordre déterminé, pour satisfaire aux axiomes de l'ordre. Pour cela, on attribuera à la série S le signe du premier coefficient T_0; on dira qu'une série est plus petite qu'une autre, quand, retranchée de celle-ci, elle donnera une différence positive. C'est donc toujours la même règle : t est regardé comme très grand par rapport à un nombre réel ordinaire quelconque, et s est regardé comme très grand par rapport à un nombre quelconque du système T.

La loi de commutativité n'étant pas vraie, ce sont bien des nombres non pascaliens.

Avant d'aller plus loin, je rappelle que Hamilton a depuis longtemps introduit un système de nombres complexes où la multiplication n'est pas commutative ; ce sont les *quaternions*, dont les Anglais font un si fréquent usage en Physique mathématique. Mais, pour les quaternions, les axiomes de l'ordre ne sont pas vrais; ce qu'il y a donc d'original dans la conception de M. Hilbert, c'est que ses nouveaux nombres satisfont aux axiomes de l'ordre sans satisfaire à la règle de commutativité.

Revenons à la Géométrie. Admettons les axiomes des trois premiers groupes, c'est-à-dire les axiomes projectifs du plan et de l'espace, les axiomes de l'ordre et le postulat d'Euclide; le théorème de Desargues s'en déduira, puisqu'il est une conséquence des axiomes projectifs de l'espace.

Nous voulons constituer notre géométrie *sans nous servir des axiomes métriques;* le mot de *longueur* n'a donc encore pour nous aucun sens; nous n'avons pas le droit de nous servir du compas; en revanche, nous pouvons nous servir de la règle, puisque nous admettons que par deux points on peut faire passer une droite, en vertu de l'un des axiomes projectifs; nous savons également mener par un point une parallèle à une droite donnée, puisque nous admettons le postulatum d'Euclide. Voyons ce que nous pouvons faire avec ces ressoures.

Nous pouvons définir l'homothétie de deux figures; deux triangles seront dits *homothétiques* quand leurs côtés seront

parallèles deux à deux, et nous en conclurons (par le théorème de Desargues que nous admettons) que les droites qui joignent les sommets correspondants sont concourantes. Nous nous servirons ensuite de l'homothétie pour définir les proportions. Nous pouvons aussi définir l'égalité dans une certaine mesure.

Les deux côtés opposés d'un parallélogramme seront égaux *par définition;* nous savons ainsi reconnaître si deux segments sont égaux entre eux, pourvu qu'ils soient parallèles.

Grâce à ces conventions, nous sommes maintenant en mesure de comparer les longueurs de deux segments; mais *pourvu que ces segments soient* PARALLÈLES. La comparaison de deux longueurs dont la direction est différente n'a aucun sens, et il faudrait pour ainsi dire une unité de longueur différente pour chaque direction. Inutile d'ajouter que le mot *angle* n'a aucun sens.

Les longueurs seront ainsi exprimées par des nombres; mais ce ne seront pas forcément des nombres ordinaires. Tout ce que nous pouvons dire, c'est que, si le théorème de Desargues est vrai comme nous l'admettons, ces nombres appartiendront à un système satisfaisant aux axiomes arithmétiques des deux premiers groupes, c'est-à-dire à un *système arguésien*. Inversement, étant donné un système quelconque S de nombres arguésiens, on peut construire une géométrie telle que les longueurs des segments d'une droite soient justement exprimées par ces nombres.

Voici comment peut se faire cette construction : un point de ce nouvel espace sera *défini* par trois nombres x, y, z du système S qui s'appelleront les *coordonnées* de ce point. Si aux trois coordonnées des divers points d'une figure on ajoute trois constantes (qui sont, bien entendu, des nombres arguésiens du système S), on obtient une autre figure transformée de la première, et de telle façon qu'à un segment quelconque de l'une des figures corresponde dans l'autre un segment égal et parallèle (au sens donné plus haut à ce mot). Cette transformation est donc une translation, de sorte que ces trois constantes définissent une translation. Si maintenant nous multiplions les trois coordonnées de tous les points d'une même figure par une même constante, nous obtiendrons une seconde figure qui sera homothétique de la première.

L'équation du plan sera une équation linéaire connue dans la Géométrie analytique ordinaire ; mais, comme dans le système S la multiplication ne sera pas commutative en général, il importe de faire une distinction et de dire que dans chacun des termes de cette équation linéaire ce sera la coordonnée qui jouera le rôle de multiplicande, et le coefficient constant qui jouera le rôle de multiplicateur.

Ainsi, à chaque système de nombres arguésiens correspondra une géométrie nouvelle satisfaisant aux axiomes projectifs, à ceux de l'ordre, au théorème de Desargues et au postulatum d'Euclide. Quelle est maintenant la signification géométrique de l'axiome arithmétique du troisième groupe, c'est-à-dire de la règle de commutativité de la multiplication? *La traduction géométrique de cette règle, c'est le théorème de Pascal;* je veux parler du théorème sur l'hexagone inscrit dans une conique, en supposant que cette conique se réduit à deux droites.

Ainsi, le théorème de Pascal sera vrai ou faux, selon que le système S sera pascalien ou non pascalien ; et, comme il y a des systèmes non pascaliens, *il y aura également des géométries non pascaliennes.*

Le théorème de Pascal peut se démontrer en partant des axiomes métriques ; il sera donc vrai, si l'on admet que les figures peuvent se transformer non seulement par homothétie et translation, comme nous venons de le faire, mais encore par rotation.

Le théorème de Pascal peut également se déduire de l'axiome d'Archimède, puisque nous venons de voir que tout système de nombres arguésiens et archimédiens est en même temps pascalien ; *toute géométrie non pascalienne est donc en même temps non archimédienne.*

Le Streckenüberträger. — Citons encore une autre conception de Hilbert. Il étudie les constructions que l'on pourrait faire, non pas à l'aide de la règle et du compas, mais par le moyen de la règle et d'un instrument particulier qu'il appelle *Streckenüberträger,* et qui permettrait de porter sur une droite un segment égal à un autre segment pris sur une autre droite. Le *Streckenüberträger* n'est pas l'équivalent du compas ; ce dernier instrument permettrait de construire l'intersection de deux cercles ou d'un

cercle et d'une droite quelconque; le *Streckenüberträger* nous donnerait seulement l'intersection d'un cercle et d'une droite *passant par le centre de ce cercle*. M. Hilbert cherche donc quelles sont les constructions qui seront possibles avec ces deux instruments, et il arrive à une conclusion bien remarquable.

Les constructions qui peuvent se faire par la règle et le compas peuvent se faire également par la règle et le *Streckenüberträger, si ces constructions sont telles que le résultat en soit toujours réel*. Il est clair, en effet, que cette condition est nécessaire; car un cercle est toujours coupé *en deux points réels* par une droite menée par son centre. Mais il était difficile de prévoir que cette condition serait également suffisante.

Géométries diverses. — Je voudrais, avant de terminer, voir quelle place occupent dans la classification de M. Hilbert les diverses géométries proposées jusqu'ici. Et d'abord *les* géométries de Riemann; je ne veux pas parler de *la* géométrie de Riemann que j'ai signalée plus haut et qui est l'opposé de celle de Lobatchevski; je veux parler des géométries relatives aux espaces à courbure variable envisagés par Riemann dans sa célèbre *Habilitationsschrift*.

Dans cette conception, on attribue par définition une longueur à une courbe quelconque, et c'est sur cette définition que tout repose. Le rôle des droites est joué par les géodésiques, c'est-à-dire par les lignes de longueur minima menées d'un point à un autre. Les axiomes projectifs ne sont plus vrais, et il n'y a aucune raison, par exemple, pour que deux points ne puissent être joints que par une seule géodésique. Le postulat d'Euclide ne peut plus évidemment avoir aucun sens. L'axiome d'Archimède reste vrai, ainsi que les axiomes de l'ordre *mutatis mutandis;* Riemann n'envisage, en effet, que les systèmes de nombres ordinaires. En ce qui concerne les axiomes métriques, on voit aisément que ceux des segments et ceux des angles restent vrais, tandis que l'axiome métrique des triangles (IV, 6) est évidemment faux.

Et ici nous retrouvons l'objection qu'on a le plus souvent faite à Riemann.

Vous parlez de longueur, lui a-t-on dit; or longueur suppose mesure, et, pour mesurer, il faut pouvoir transporter un instrument

de mesure qui doit demeurer invariable; d'ailleurs, vous le reconnaissez vous-même. Il faut donc que l'espace soit partout égal à lui-même, qu'il soit homogène pour que la congruence y soit possible. Or, votre espace ne l'est pas, puisque sa courbure est variable; il ne peut donc y être question ni de mesure, ni de longueur.

Riemann n'aurait pas eu de peine à répondre. Supposons une géométrie à deux dimensions pour simplifier; nous pourrons alors nous représenter l'espace de Riemann comme une surface dans l'espace ordinaire. Nous pourrions mesurer des longueurs sur cette surface à l'aide d'une ficelle, et cependant une figure ne pourrait pas se déplacer en restant appliquée sur cette surface et de façon que les longueurs de tous ses éléments demeurent invariables. Car la surface n'est pas, en général, applicable sur elle-même.

C'est ce que M. Hilbert traduirait en disant que les axiomes métriques des segments sont vrais, et que celui des triangles ne l'est pas. Les premiers sont concrétisés pour ainsi dire dans notre ficelle; celui des triangles supposerait le déplacement d'une figure dont tous les éléments auraient une longueur constante.

Quelle sera la place d'une autre géométrie que j'ai proposée autrefois et qui rentre pour ainsi dire dans la même famille que celle de Lobatchevski et celle de Riemann? J'ai montré qu'on peut imaginer trois géométries à deux dimensions, qui correspondent respectivement aux trois sortes de surfaces du second degré, l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à deux nappes et l'hyperboloïde à une nappe; la première est celle de Riemann, la seconde est celle de Lobatchevski, et la troisième est la géométrie nouvelle. On trouverait de même quatre géométries à trois dimensions.

Où viendrait se ranger cette géométrie nouvelle dans la classification de M. Hilbert? Il est aisé de s'en rendre compte. Comme pour celle de Riemann, tous les axiomes subsistent, sauf ceux de l'ordre et celui d'Euclide; mais, tandis que dans la géométrie de Riemann, les axiomes sont faux sur toutes les droites, au contraire, dans la géométrie nouvelle, les droites se répartissent en deux classes, les unes sur lesquelles les axiomes de l'ordre sont vrais, les autres sur lesquelles ils sont faux.

Conclusions. — Mais ce qui est le plus important, c'est de nous rendre compte de la place qu'occupent les conceptions nouvelles de M. Hilbert dans l'histoire de nos idées sur la philosophie des Mathématiques.

Après une première période de naïve confiance où l'on nourrissait l'espoir de tout démontrer, est venu Lobatchevski, l'inventeur des géométries non euclidiennes.

Mais le véritable sens de cette invention n'a pas été pénétré tout de suite; Helmholtz a montré d'abord que les propositions de la géométrie euclidienne n'étaient autre chose que les lois des mouvements des corps solides, tandis que celles des autres géométries étaient les lois que pourraient suivre d'autres corps analogues aux corps solides, qui sans doute n'existent pas, mais dont l'existence pourrait être conçue sans qu'il en résultât la moindre contradiction, des corps que l'on pourrait fabriquer si on le voulait. Ces lois ne pouvaient, toutefois, être regardées comme expérimentales, puisque les solides naturels ne les suivent que grossièrement et, d'ailleurs, puisque les corps fictifs de la géométrie non euclidienne, n'existant pas, ne peuvent être accessibles à l'expérience. Helmholtz, toutefois, ne s'est jamais expliqué sur ce point avec une parfaite netteté.

Lie a poussé l'analyse beaucoup plus loin. Il a cherché de quelle manière peuvent se combiner les divers mouvements possibles d'un système quelconque, ou plus généralement les diverses transformations possibles d'une figure. Si l'on envisage un certain nombre de transformations et qu'on les combine ensuite de toutes les manières possibles, l'ensemble de toutes ces combinaisons formera ce qu'il appelle *un groupe*. A chaque groupe correspond une géométrie, et la nôtre, qui correspond au groupe des déplacements d'un corps solide, n'est qu'un cas très particulier. Mais tous les groupes que l'on peut imaginer posséderont certaines propriétés communes, et ce sont précisément ces propriétés communes qui limitent le caprice des inventeurs de géométries; ce sont elles, d'ailleurs, que Lie a étudiées toute sa vie.

Il n'était pourtant pas entièrement satisfait de son œuvre. Il avait, disait-il, toujours envisagé l'espace comme une *Zahlenmannigfaltigkeit*. Il s'était borné à l'étude des groupes continus

proprement dits auxquels s'appliquent les règles de l'Analyse infinitésimale ordinaire. Ne s'était-il pas ainsi artificiellement restreint? N'avait-il pas ainsi négligé un des axiomes indispensables de la Géométrie (c'est en somme de l'axiome d'Archimède qu'il s'agit)? Je ne sais si l'on trouverait trace de cette préoccupation dans ses Œuvres imprimées, mais dans sa correspondance, ou dans sa conversation, il exprimait sans cesse ce même regret.

C'est précisément la lacune qu'a comblée M. Hilbert; les géométries de Lie restaient toutes assujetties aux formes de l'Analyse et de l'Arithmétique qui semblaient intangibles. M. Hilbert a brisé ces formes ou, si l'on aime mieux, il les a élargies. Ses espaces ne sont plus des *Zahlenmannigfaltigkeiten*.

Les objets qu'il appelle *point*, *droite* ou *plan* deviennent ainsi des êtres purement logiques qu'il est impossible de se représenter. On ne saurait s'imaginer, sous une forme sensible, ces points qui ne sont que des systèmes de trois séries. Peu lui importe, il lui suffit que ce soient des *individus* et qu'il ait des règles sûres pour distinguer ces individus les uns des autres, pour établir conventionnellement entre eux des relations d'égalité ou d'inégalité et pour les transformer.

Une autre remarque : les groupes de transformations au sens de Lie ne semblent plus jouer qu'un rôle secondaire. C'est du moins ce qu'il semble quand on lit le texte même de M. Hilbert. Mais, si l'on y regardait de plus près, on verrait que chacune de ses géométries est encore l'étude d'un groupe. Sa géométrie non archimédienne est celle d'un groupe qui contient toutes les transformations du groupe euclidien, correspondant aux divers déplacements d'un solide, mais qui en contient encore d'autres susceptibles de se combiner aux premières d'après des lois simples.

Lobatchevski et Riemann rejetaient le postulatum d'Euclide, mais ils conservaient les axiomes métriques; dans la plupart de ses géométries, M. Hilbert fait l'inverse. Cela revient à mettre au premier rang un groupe formé des transformations de l'espace par homothétie et par translation; et à la base de sa géométrie non pascalienne, c'est un groupe analogue que nous retrouvons, comprenant non seulement les homothéties et les translations de l'espace ordinaire, mais d'autres transformations analogues se combinant aux premières d'après des lois simples.

M. Hilbert semble plutôt dissimuler ces rapprochements, je ne sais pourquoi. Le point de vue logique paraît seul l'intéresser. Étant donnée une suite de propositions, il constate que toutes se déduisent logiquement de la première. Quel est le fondement de cette première proposition, quelle en est l'origine psychologique, il ne s'en occupe pas. Et même si nous avons, par exemple, trois propositions A, B, C, et si la logique permet, en partant de l'une quelconque d'entre elles, d'en déduire les deux autres, il lui sera indifférent de regarder A comme un axiome et d'en tirer B et C, ou bien, au contraire, de regarder C comme un axiome, et d'en tirer A et B. Les axiomes sont posés, on ne sait pas d'où ils sortent, il est donc aussi facile de poser A que C.

Son œuvre est donc incomplète; mais ce n'est pas une critique que je lui adresse. Incomplet, il faut bien se résigner à l'être. Il suffit qu'il ait fait faire à la philosophie des Mathématiques un progrès considérable, comparable à ceux que l'on devait à Lobatchevski, à Riemann, à Helmholtz et à Lie.

H. Poincaré.

MÉLANGES.

THÈSES DE SCIENCES MATHÉMATIQUES SOUTENUES DEVANT LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS ET DEVANT LES FACULTES DES SCIENCES DES DÉPARTEMENTS DANS LE COURANT DU XIXe SIÈCLE.

(*Suite et fin.*)

Faculté des Sciences de Besançon.

1870 (22 janvier).

Chevilliet (J.-I.). — Sur l'équilibre d'élasticité du cylindre droit à base quelconque et de la sphère, soumis à l'action de la pesanteur et comprimés entre deux plans horizontaux.

— Sur le problème inverse des perturbations.

Faculté des Sciences de Bordeaux.

1840 (21 août).

Chenou (J.-L.). — Mouvement des corps célestes dans le vide. Leur mouvement dans un milieu résistant.

— Intégration des équations différentielles pour le cas d'une excentricité quelconque.

— Inégalités périodiques et séculaires du mouvement des planètes.

— Mouvement des étoiles multiples et en particulier des étoiles doubles.

Faculté des Sciences de Caen.

1829 (11 juillet).

Bonnaire. — Mouvement de deux masses liées par une ligne inflexible et inextensible, lorsque l'une d'elles est assujettie à se mouvoir sur une ligne droite.

— Mouvement des planètes et formules servant à les déterminer.

1829 (6 novembre).

Cach. — Théorie des pompes et considérations sur les lois de l'équilibre des fluides pesants.

— Théorie du flux et reflux, précédée de quelques considérations sur le problème des trois corps.

1852 (21 avril).

Toussaint (Ch.). — Sur le mouvement du pendule en tenant compte de la rotation de la Terre.

— Mouvement des planètes dans le cas des perturbations.

Faculté des Sciences de Dijon.

1834 (3 juillet).

Artur. — Mémoire sur la loi relative à la densité des couches intérieures de la Terre et sur son aplatissement.

— Mémoire sur la détermination de deux points d'où partent les droites par rapport auxquelles tous les moments d'inertie de la Terre sont égaux entre eux.

1835 (27 février).

Cirodde (P.-L.). — Du mouvement de la chaleur dans un cylindre droit, solide, homogène.

— De la détermination de l'orbite des comètes.

1838 (6 mars).

Perrey (A.). — Théorie du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

— Sur la détermination de l'orbite des étoiles doubles.

Faculté des Sciences de Grenoble.

1829 (29 avril).

Gouré (E.-G.). — Questions de Mathématiques.

— Questions d'Astronomie.

1836 (13 janvier).

Dumoulin (H.-J.). — Des équations générales du mouvement d'un fluide sollicité par des forces quelconques.

— De l'Hydrodynamique.

1837 (28 août).

Lebesgue (V.-A.). — Sur deux transformations des fonctions homogènes

du second degré à trois variables. Applications à la Mécanique et à l'Astronomie.

1893 (8 juillet).

Auric (A.). — Les équations linéaires et leurs applications.

Faculté des Sciences de Lyon.

1837 (5 octobre).

Bravais (A.). — Des méthodes employées dans les levées sous voiles.

— Sur l'équilibre des corps flottants.

Faculté des Sciences de Metz.

1813 (2 août).

Lesage. — Questions de Mécanique et d'Astronomie.

Faculté des Sciences de Montpellier.

1821 (1er février).

Sarrus (F.). — Essai sur la théorie du son.

— Essai sur le mouvement des planètes autour du Soleil.

1850 (20 août).

Estocquois (T. d'). — Sur la convergence des séries.

— Sur les perturbations du mouvement des planètes.

1844 (11 juin).

Roche (E.-A.). — Sur la distribution de la chaleur dans une sphère.

— Sur la figure des planètes.

1844 (11 juin).

Aoust (B.). — Sur les intégrales d'un système d'équations aux différences partielles d'une certaine classe.

— Sur les oscillations des cordes pesantes, flexibles et élastiques.

1844 (6 août).

Bergeron (J.-P.-A.). — Sur la rotation de la Terre.

— Sur la résistance des solides élastiques.

1844 (6 août).

Sabatier (A.). — Des courbes enveloppes.

— De la transmission du travail dans les machines en mouvement.

1847 (7 septembre).

Gisclard. — Sur l'attraction des ellipsoïdes.

— Sur la méthode de la variation des constantes arbitraires.

1882 (novembre).

Rouquet (V.). — Étude géométrique des surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes.

Faculté des Sciences de Nancy.

1864 (30 juillet).

Reuss (C.-E.). — Sur le calcul des éclipses de Soleil et de Lune.

1865 (27 janvier).

Laurent (P.-M.-H.). — Continuité des fonctions imaginaires et des séries en particulier.

Faculté des Sciences de Rennes.

1848 (10 janvier).

Paignon. — De la courbe décrite par un point matériel, attiré par un centre fixe.

— Détermination de l'aplatissement de la Terre par les inégalités du mouvement de la Lune.

1874 (mai).

Vincent. — Sur les analogies entre les équations différentielles linéaires et les équations algébriques.

— Sur un problème relatif au mouvement d'un point matériel.

Faculté des Sciences de Strasbourg.

1827 (13 et 14 août).

Delcambre (C.-F.-J.). — De la force d'attraction considérée particulièrement comme force motrice des planètes.

— Du mouvement elliptique des planètes.

1828 (25-28 octobre).

Regneault (E.-E.). — Scolies sur la nature des vitesses virtuelles, suivies de quelques réflexions sur la métaphysique du calcul différentiel et intégral.

— Discussion sur les mouvements propres des étoiles.

1829 (18 juin-25 juillet).

Finck (P.-J.-E.). — Considérations sur les machines en mouvement.

— Essai sur les formules du mouvement de l'équateur terrestre.

1829 (23 juillet).

Kramp (Ch.-Th.). — Application de la théorie générale des petites oscillations.

1829 (19 novembre), 1830 (30 décembre).

Quatrefages (J.-F.-L.-A. de). — Théorie d'un coup de canon.

— Du mouvement des aérolithes considérés comme des masses disséminées dans l'espace par l'action des valeurs lunaires.

1830 (31 octobre et 4 novembre).

Renaudin (L.-F.-E.). — Des oscillations du pendule simple dans le vide.

— Lois de Képler.

1833 (12 et 19 décembre).

Rameaux (J.-F.). — Théorie du mouvement des corps dans un milieu résistant.

— Des occultations et des éclipses.

1840 (22 mai).

Crebessac-Vernet (P.-A.-B.). — Recherches sur le mouvement d'un système de points libres liés entre eux et sollicités par des forces accélératrices quelconques.

— Calcul des variations des constantes arbitraires qui entrent dans les formules du mouvement elliptique des planètes autour du Soleil.

1843 (4 et 13 mai).

Reuss (G.-C.). — Du mouvement des planètes.

— Sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible.

1844 (18 juillet et 28 novembre).

Dostor (J.-G.). — Du mouvement des comètes.

— Du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.

1845 (12 juin).

Reuss (C.-E.). — Du mouvement d'un corps attiré par un autre qui se meut uniformément sur une droite.

1850 (18 juillet).

Plarr (G.). — Essai d'une théorie de la figure de la Terre basée sur le calcul de l'attraction des sphéroïdes hétérogènes.

1851 (15 janvier).

Mahistre (A.). — Calcul de l'attraction d'un cône droit homogène sur un point de son axe. Calcul de l'attraction d'une couche sphérique homogène interceptée sur deux sphères concentriques par un cône qui aurait son sommet au centre commun, le point attiré étant supposé placé sur l'axe du cône.

— Théorie des perturbations planétaires.

1857 (26 décembre).

Bach (X.-D.). — Recherches sur quelques formules d'Analyse et en particulier sur les formules d'Euler et de Stirling.

1863 (28 mai).

Hoppé (J.-F.). — Détermination de l'orbite d'une comète par trois observations.

— Attraction des ellipsoïdes homogènes.

1864 (12 août).

Stoffel (E.). — De l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre.

— Étude sur les étoiles doubles.

Faculté des Sciences de Toulouse.

1838 (21 février et 27 mars).

Sawicki (S.). — Sur les pressions des liquides homogènes.

— Détermination du mouvement des planètes.

1838 (6 et 10 août).

Bergis (A.-V.). — Sur l'équilibre d'un fil dont tous les points sont sollicités par des forces quelconques.

— Du problème de Képler.

1841 (27 et 31 août).

Despeyrous (Th.). — Méthode de détermination des orbites des comètes.

— Théorie de la variation des constantes arbitraires.

1847 (31 juillet).

Frenet (J.-F.). — Sur les fonctions qui servent à déterminer l'attraction des sphéroïdes quelconques.

— Sur quelques propriétés générales des courbes à double courbure.

1863 (17 août).

Berger (C.-H.). — Étude sur le développement de la fonction perturbatrice d'après Cauchy dans la théorie des mouvements planétaires.

— Étude sur les fonctions des variables imaginaires d'après Cauchy.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Vogler (Ch.-A.). — *Geodätische Uebungen f. Landmesser u. Ingenieure.* 2e édition. 2e Partie. Winterübungen. Gr. in-8° avec 25 fig. Berlin, Parey. Relié, 5 m. 50 pf.

Weill (A.). — *Die geometrische Interpretation der Gleichung 5. Grades auf Invarianten-theoretischer Grundlage.* (Dissert.) Gr. in-8°, 60 p. Strasbourg, Singer. 3 m.

Hœfer (F.). — *Histoire de la Physique et de la Chimie depuis les temps les plus reculés jusqu'à nos jours.* 3e édit. In-16, 565 p. Paris, Hachette et Cie. 4 fr.

1re Partie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BOUVART et RATINET. — NOUVELLES TABLES DE LOGARITHMES A CINQ DÉCIMALES. DIVISION CENTÉSIMALE. 1 vol. in-8°, oblong, 127 pages. Paris, Hachette, 1902.

L'usage de la division centésimale, grâce à l'initiative du Ministre de la Guerre, va se répandre dans l'enseignement élémentaire. Il faut saisir les rares occasions où les programmes servent la cause du progrès. Celui-là est dû, à coup sûr, au Service géographique de l'Armée, où l'on ne se sert plus que de la division centésimale du quadrant, et qui a publié d'admirables Tables, à huit décimales (1), un peu encombrantes sans doute, mais dont la belle impression est une joie pour ceux qui ont les yeux fatigués, et dont l'étendue permet d'atteindre une grande précision dans les calculs (2). Imposé par le Ministre de la Guerre, l'usage de la division centésimale se répandra assurément ailleurs. Les gens qui n'ont à faire que des calculs théoriques sont tout naturellement acquis à cette réforme. On peut craindre, sans doute, quelque résistance du côté de la Marine; cette résistance se trouvera peut-être moins obstinée qu'on ne s'y attend. L'*Annuaire du Bureau des Longitudes pour* 1902 contient en effet une intéressante Notice de M. le commandant Guyou : *Sur l'application de la division décimale du quart de cercle à la pratique de la navigation,* qui relate des expériences faites récemment sur cette application, et dont les résultats paraissent concluants :

« Les navires désignés pour ces expériences ont été choisis

(1) Un signe indique en outre si la valeur du logarithme est prise par excès ou par défaut.

(2) Le Service géographique a fait publier en outre deux éditions réduites (Gauthier-Villars), comportant les deux divisions du quadrant. L'une de ces éditions contient diverses autres Tables et formules; l'autre est spéciale aux candidats à l'École Polytechnique et à l'École de Saint-Cyr.

parmi ceux qui devaient être appelés à une navigation particulièrement active pendant la période qui avait été fixée.

» Chacun d'eux reçut les instruments et documents ci-après :

» Un chronomètre décimal;

» Un Recueil d'éphémérides et de Tables nautiques;

» Un exemplaire des Tables à cinq décimales du Service géographique de l'Armée;

» Une collection de Cartes portant une graduation décimale supplémentaire, à l'encre rouge;

» Une rose de compas graduée en grades;

» Un sextant décimal.

» Pendant toute la durée de ces expériences, plusieurs officiers, sur chaque navire, ont effectué, en rade et à la mer, avec les instruments décimaux, les éphémérides et les Tables décimales, toutes les observations et tous les calculs nécessaires à la conduite du navire. Les cahiers sur lesquels ont été faits ces calculs, ainsi que les rapports dans lesquels les officiers expérimentateurs ont résumé leurs opinions, ont été recueillis dans les Archives du Bureau des Longitudes.

» Pour donner la mesure de l'expérience qu'ont pu acquérir ces officiers, et par suite du degré de confiance que méritent leurs rapports, il suffira de dire qu'ils ont calculé 225 fois le point par deux, trois, quatre et même cinq lieux géométriques isolés, et effectué 33 réglages du tropomètre [1] par les observations astronomiques....

» ... Les officiers expérimentateurs sont à peu près unanimes à reconnaître que les unités nouvelles pourront être mises en pratique, sans période de transition et sans risque sérieux de confusion, dès que l'on pourra mettre à la disposition des marins les instruments et les documents nécessaires à leur application. »

Ces résultats sont assurément très encourageants et permettent de penser que l'objection tirée de la solidarité des unités de temps

---

[1] C'est le nom donné aux chronomètres décimaux, nom destiné à rappeler que « l'élément qu'ils mesurent est l'angle dont le cercle horaire du Soleil moyen tourne relativement à un méridien terrestre ».

et d'angle n'a qu'une force apparente : M. le commandant Guyou dévoile d'ailleurs la faiblesse de cette objection en montrant comment les problèmes de Navigation, et en particulier le plus important de tous, le problème du *point,* sont des problèmes de Géométrie pure, dans lesquels n'interviennent en réalité que des grandeurs angulaires. « Lorsque les problèmes nautiques sont envisagés sous cet aspect, les notions de temps disparaissent complètement, et la réforme devient possible par le seul changement de la mesure des arcs. »

On peut donc croire que nous approchons d'un moment où la réforme sera pratiquement réalisée et entrera dans les mœurs. Il se peut que, pour ce qui les regarde, les astronomes s'y refusent, et ils donneront peut-être de leur refus d'excellentes raisons, dont ils sont les meilleurs juges. Que cherchent les uns et les autres? Simplement une économie de temps : ceux auxquels la réforme de la division du quadrant ne procurera pas cette économie, en raison des documents dont ils sont obligés de se servir, ne l'adopteront sans doute pas. Mais l'existence de quelques savants constituant une classe fermée n'est pas un obstacle à une réforme générale. Au reste, il est bien évident, à cause des instruments existants, que les deux modes de division continueront d'être employés concurremment pendant longtemps, et, pour cette raison, les Tables à cinq décimales du Service géographique de l'Armée, qui donnent les lignes trigonométriques dans les deux systèmes de division, sont éminemment pratiques.

Les Tables de MM. Bouvart et Ratinet, que nous annonçons, sont un Livre purement scolaire et ne comportent que la division décimale. L'impression en est nette et agréable à l'œil : on sait assez que cela n'est pas sans importance, et qu'il faut ménager les yeux des écoliers. Chaque page contient 50 lignes. Les Tables de logarithmes, qui vont de 1 à 10000, sont à double entrée. Les Tables trigonométriques vont de grade en grade. Les logarithmes de $\frac{\sin x}{x}$ et de $\frac{\operatorname{tang} x}{x}$ sont donnés pour les trois premiers grades. Outre une petite Table à sept décimales pour les calculs relatifs aux intérêts composés, les auteurs ont donné des Tables pour la conversion des divisions sexagésimales en divisions décimales, et réciproquement.

Leur Livre ne contient ni instruction préliminaire, ni Tables auxiliaires autres que celles dont je viens de parler, ni Recueil de formules ou de nombres importants.

L'absence d'instruction préliminaire est sans doute justifiée. Il va de soi que ce n'est pas dans une Table de logarithmes qu'on va chercher la théorie des logarithmes. Seules quelques règles pratiques peuvent trouver leur place dans une Table : les règles usuelles sont trop connues pour qu'il y ait lieu de les rappeler; les règles un peu plus compliquées, relatives à la meilleure utilisation possible des Tables, dans lesquelles on indique si la dernière décimale est prise par excès ou par défaut n'avaient pas leur place ici.

Il me semble qu'on devrait familiariser, même de bonne heure, les écoliers avec l'usage des Tables de logarithmes et d'antilogarithmes avec quatre décimales, pour les mille premiers nombres. C'est l'affaire de quatre pages : des Tables trigonométriques, de décigrade en décigrade, à quatre décimales encore, tiendraient dans dix pages, dans vingt si l'on donnait en outre les valeurs naturelles. Ces Tables-là suffiraient, et au delà, pour la plupart des besoins pratiques. Il est inutile d'insister sur leur commodité.

Quant aux formules et au Recueil de nombres usuels, qu'il est bien naturel de faire figurer dans une Table de logarithmes à l'usage des écoliers, leur suppression résulte de nécessités commerciales, qui sont elles-mêmes la conséquence des programmes d'examen. Dans ces examens, en effet, les candidats doivent se servir de Tables qui ne contiennent aucune formule.

C'est là, semble-t-il, une exigence fâcheuse. Il y a, dans les examens, assez d'épreuves où il est facile de constater que les candidats savent ou ne savent pas telle ou telle formule. D'ordinaire, ils savent beaucoup plus de formules qu'il ne faudrait. Les épreuves pratiques, ainsi que je l'ai entendu exposer, avec les meilleures raisons, par M. le commandant Guyou, sont faites pour reconnaître si les candidats sont, ou non, capables, dans un temps donné, de réduire une formule en nombre, s'ils sont assez rompus au métier pour ne pas se laisser arrêter par ces petites difficultés pratiques auxquelles ceux qui n'ont pas l'habitude du calcul perdent leur temps : il est facile de poser des questions variées qui, à cet égard, servent de pierre de touche. Il n'y a aucun

inconvénient à donner les formules mêmes que les candidats auraient à réduire en nombres; peu importeraient alors les autres formules qui se trouveraient ou ne se trouveraient pas dans leurs Tables : ce procédé vaudrait mieux que de leur imposer, à peu près tous les ans, la même résolution de triangle. Quand il n'aurait pas d'autre avantage que de ne pas forcer les éditeurs à supprimer de leurs Livres des pages éminemment utiles, cela suffirait amplement à le recommander. Une Table à cinq décimales est déjà un instrument théorique : il n'y aura jamais à en avoir besoin (sauf pour les examens) que les gens qui ont une culture mathématique assez élevée. Comprend-on, par exemple, qu'une telle Table ne contienne même pas le nombre qui permet de passer des logarithmes vulgaires aux logarithmes népériens, et faut-il savoir ce nombre-là par cœur?

APPELL. — Cours de Mécanique a l'usage des candidats a l'École centrale des Arts et Manufactures. 1 vol. in-8; 271 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

Le programme des examens d'entrée à l'École centrale a été, l'an dernier, profondément modifié ou plutôt renouvelé. Il ne s'agit pas, cette fois, de l'introduction ou de la suppression de quelque alinéa, sur laquelle les membres d'une commission ont discuté longuement autour d'un tapis vert et qui a été décidée, au hasard du vote, d'après une majorité qui, le lendemain, ne se serait pas retrouvée la même, et qui penche tantôt dans un sens, tantôt dans un autre, tantôt à cause du goût de certains membres pour quelque petite théorie qui réveille en eux d'agréables souvenirs de jeunesse, tantôt à cause de l'autorité ou de l'âge de celui qui vient de parler et que l'on n'ose pas contredire. Cette fois, c'est l'esprit qui a soufflé, et le vent a emporté beaucoup de fétus de paille, apporté quelques germes nouveaux. Souhaitons que ces germes poussent. Les gens qui ont rédigé ce programme ont eu l'idée vraiment neuve et originale de se préoccuper des besoins de l'École dont il est le seuil, de l'enseignement que l'on doit

donner dans cette École, du métier que doivent faire un jour ceux qui en sortiront. Peut-être ces gens-là avaient-ils conscience de ces besoins et cette hypothèse explique-t-elle leur originalité. Sans doute, quelques paragraphes, qu'il serait d'ailleurs aisé de retoucher en restant dans le même esprit, prêtent à la critique, mais il me semble bien que la tendance générale doit être louée sans réserve.

Il ne suffit pas de faire un bon et beau programme, non plus qu'un bon sermon : il faut prêcher d'exemple. M. Appell s'y est dévoué et a écrit un petit Livre qui fixera le sens dans lequel doit être enseignée la Mécanique aux futurs ingénieurs de l'École centrale, à des gens qui n'auront à faire ni de la Métaphysique, ni de la pure Géométrie, ni de la pure Analyse, mais bien à mettre en équation des problèmes réels.

Son Livre s'ouvre par un Chapitre où sont établies les propositions fondamentales de la théorie des vecteurs. Disons de suite que, dans le Chapitre suivant, la vitesse et l'accélération seront nettement définies comme des dérivées géométriques. On est un peu étonné en pensant que cela est presque une nouveauté dans un Livre élémentaire. Dans la Cinématique du point, l'étude des mouvements vibratoires est faite avec détail : l'auteur a sans doute pensé qu'elle présentait quelque utilité pour l'enseignement de la Physique. Signalons aussi le paragraphe relatif aux diagrammes du mouvement (graphique des chemins de fer, etc.)

L'espace absolu est défini par un trièdre trirectangle invariablement lié aux étoiles fixes : dans la plupart des problèmes pratiques il n'y a pas d'inconvénient à regarder le trièdre fixe comme invariablement lié à la Terre. La masse m d'un point matériel est un coefficient numérique lié à ce point : on apprendra tout à l'heure comment on mesure effectivement ce nombre, au moyen de la balance. Si un point matériel est placé dans un champ de forces, il prend une accélération γ et la force qui agit sur lui est, par définition, le vecteur $m\gamma$. La pesanteur conduit, par voie expérimentale, à la notion de *poids absolu*. La *pression* exercée par un poids sur la main qui le soutient donne l'idée d'une comparaison grossière entre les poids absolus des corps par la sensation de l'effort musculaire pour les empêcher de tomber. Les dynamomètres permettent de préciser cette comparaison. Sans doute,

tout cela est grossier, et l'on criera, si l'on veut, au cercle vicieux, quand il sera question de mesurer la masse par la balance : la balance est une machine dont il faudrait avoir fait la théorie pour savoir ce qu'elle donne. Le vrai cercle vicieux est celui qu'on ne voit pas, celui où l'on s'enferme sans le savoir. Celui-ci crève les yeux et n'a donc aucun inconvénient. Il n'y a pas de science du réel sans cercle vicieux. Pascal a démontré cela surabondamment et je crois bien qu'Anaxagore l'avait fait longtemps avant lui : ce n'est pas là une découverte moderne. Et, cependant, il est vrai qu'il y a une science du réel, une Physique, qui nous permet de prévoir des phénomènes que nous observons, des machines qui marchent, qui exécutent des travaux, et que l'on calcule. L'important ici est de ne pas se tromper, et de ne pas substituer dans les équations des nombres inexacts. Eh bien ! c'est effectivement avec une balance qu'on mesure les masses, c'est des nombres obtenus au moyen de cet instrument que l'on se sert, et c'est ce qu'il importe de savoir : il importe aussi de ne pas se tromper quand on change d'unités, et l'on ne s'étonnera pas du soin avec lequel M. Appell a développé tout ce qui touche à ce sujet. Il donne ensuite les notions essentielles relatives aux champs de force, et traite divers exemples du mouvement d'un point matériel libre, choisis en vue des applications, et de manière à n'exiger que des connaissances très restreintes en Calcul intégral.

Pour ce qui est du mouvement d'un point qui n'est pas libre, l'auteur se borne à étudier le mouvement d'un point sur un plan, mais de manière à introduire la notion du frottement. Les lois du frottement sont expliquées pour le cas de l'équilibre et pour le cas du mouvement : il en est fait une application détaillée au cas d'un point assujetti à se mouvoir sur un plan horizontal sous l'action d'une force horizontale constante. Le problème du mouvement d'un point pesant sur un plan incliné est déjà trop compliqué pour le lecteur chez lequel on ne suppose aucune connaissance concernant le maniement des équations différentielles, et n'est traité que dans le cas où il n'y a pas de frottement : il eût été tout au plus possible de lui expliquer comment le problème se mettait en équation. Quoi qu'il en soit, si incomplètes que soient les connaissances acquises par ce lecteur, au moins son esprit ne sera-t-il pas faussé.

La théorie de l'équilibre d'un corps solide est précédée des notions essentielles concernant le moment d'un vecteur par rapport à un point ou à un axe et l'axe d'un couple de vecteurs. Après avoir observé l'invariance de la somme géométrique et du moment résultant d'un système de vecteurs quand on fait sur ce système les transformations dont on admet en Statique qu'elles ne troublent pas l'état du corps, on établit les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un corps solide en montrant d'abord que le système de forces peut être réduit à deux forces, et en admettant que ces deux forces doivent être égales, opposées et portées par la même droite. De la règle générale on déduit ensuite les règles concernant les forces parallèles.

L'auteur étudie enfin les conditions d'équilibre de quelques machines simples (levier, treuil, balance ordinaire, romaine; balance de Quintenz, poulies, moufles, etc.) Il n'est question du frottement que pour la poulie, en vue du calcul du rapport qu'il doit y avoir entre la puissance et la résistance, supposées verticales, pour que la poulie commence à se mouvoir. Ce calcul, d'ailleurs très simplement et très clairement présenté, aurait peut-être gagné à être précédé de quelques courtes explications sur ce qu'il faut entendre par l'« angle de frottement de l'œil sur l'axe », d'autant qu'il n'a été question, jusqu'ici, de cet angle de frottement que pour le cas d'un point matériel qui glisse sur un plan. Qeulques pages substantielles relatives au cas où les machines sont mises en mouvement, les forces étant supposées en équilibre à chaque instant, terminent cet intéressant petit Livre. Les candidats et les professeurs seront certainement reconnaissants à celui qui a bien voulu l'écrire. J. T.

CAPELLI (A.). — Lezioni sulla Teoria delle forme algebrische. 1 vol. in-8°, autographié, 295 pages. Naples, Pellerano, 1902.

Le lecteur trouvera dans ce Volume la reproduction du cours fait par M. Capelli à l'Université de Naples, sur les points essentiels de la théorie *générale* des formes algébriques, théorie qui,

si elle a été l'objet de nombreux et importants Mémoires, n'a guère été traitée d'une façon didactique : le Livre de M. Capelli apportera de grandes facilités de travail à ceux qui veulent s'initier à cette théorie.

Il est divisé en deux Chapitres : le premier contient les notions, définitions et propriétés fondamentales : la théorie des substitutions linéaires, des formes polaires, la définition des invariants et covariants, l'introduction des covariants de Cayley et de l'opération Ω, etc. Le second Chapitre est consacré à l'étude des divers procédés de formation, des représentations symboliques, des équations différentielles que vérifient les covariants, etc.; il se termine par la démonstration du théorème de M. Hilbert.

Enfin, dans un Appendice d'une vingtaine de pages, l'auteur a résumé les propositions essentielles concernant les formes binaires.

GAUSS (K.-F.). — General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825. Translated with notes and a bibliography by *J.-C. Morehead* and *A.-M. Hiltebeitel*. The Princeton University Library. In-4°, viii-126 pages. Princeton, 1902.

Le célèbre Mémoire de Gauss : *Disquisitiones generales circa superficies curvas,* présenté vers la fin de 1827 à la Société royale de Gœttingue, a une telle importance au point de vue du développement de la Géométrie infinitésimale, qu'il a été fréquemment reproduit. Liouville, le premier, l'a ajouté à l'édition qu'il a donnée de l'*Application de l'Analyse à la Géométrie* de Monge. Il a été traduit deux fois au moins en français et en allemand. Il fait partie notamment de la Collection des Classiques scientifiques publiée par Ostwald. Les auteurs de la présente publication ont eu l'idée à leur tour de le traduire en anglais, de manière à étendre encore le cercle d'une action qui ne paraît pas près d'être épuisée. Gauss n'a jamais livré à l'impression aucun de ses travaux sans avoir profondément médité sur la matière qu'il avait choisie. Ses moindres phrases méritent d'être étudiées avec soin; elles peuvent nous mettre sur la voie de notions importantes que

Gauss a gardées pour lui ou qu'il n'a pas eu le temps de publier. Les auteurs de la nouvelle traduction l'ont bien compris, et ils se sont attachés à la rendre aussi irréprochable et aussi fidèle que possible.

Mais ils ne se sont pas contentés de nous donner le Mémoire fondamental de Gauss. Ils y ont joint l'analyse que Gauss en a faite lui-même dans les *Mémoires de Gœttingue;* ils ont éclairé le texte par des notes abondantes.

Enfin ils ont reproduit une première ébauche du Mémoire qui a paru récemment dans le tome VIII des *Œuvres de Gauss,* et sur laquelle nous avions déjà appelé l'attention.

Nous nous demandons pourquoi les auteurs n'ont pas cru devoir joindre à leur travail le Mémoire sur les Cartes géographiques qui semblait en faire naturellement partie.

Quoi qu'il en soit, une bibliographie abondante termine le nouvel Ouvrage, qui est certainement appelé à avoir le plus grand succès et la plus grande influence dans tous les pays de langue anglaise et en particulier dans les Universités américaines.

G. D.

SELLENTHIN (B.). — Mathematischer Leitfaden mit besonderer Berücksichtigung der Navigation. 1 vol. in-8°; XI-450 pages. Leipzig et Berlin, Teubner, 1902.

L'auteur a réuni, dans les 450 pages qui constituent ce Volume, les connaissances d'Arithmétique, de Géométrie élémentaire, d'Algèbre, de Cosmographie, de Trigonométrie plane et sphérique qui sont indispensables aux jeunes gens qui se préparent à la Marine : son Livre est fait pour servir de base à l'enseignement mathématique dans les établissements suivants : Kaiserliche Deckoffizierschule, Seekadetten-Schulschiffe, Kaiserliche Marineschule. L'auteur s'est limité strictement à ce qui est nécessaire; il a d'ailleurs multiplié les exercices en les choisissant exclusivement parmi les questions qui se présentent dans la navigation. Son Livre est, au fond, un Traité de Mathématiques élémentaires destiné à de futurs marins. Ce n'est guère l'habitude, en France,

que de donner un enseignement élémentaire en vue d'une profession déterminée, et les raisons que l'on peut donner de nos habitudes demeureraient excellentes, s'il était possible d'allonger la durée de la vie humaine. On n'évite point d'ailleurs les spécialisations dans nos lycées; seulement, elles se font non en vue des professions, mais en vue des examens qui mènent à ces professions. Quoi qu'il en soit, il est intéressant de noter, ailleurs que chez nous, cette tendance à renoncer franchement aux bénéfices évidents de l'instruction générale et des connaissances spéculatives pour les jeunes gens qui se destinent aux carrières pratiques. Pour ceux même qui n'entendent nullement renoncer à ces bénéfices, le Livre de M. Sellenthin n'en sera pas moins utile à consulter en lui-même et comme document, et aussi en raison du très grand nombre d'exemples qu'il contient. Il est bon assurément de montrer aux élèves comment et à quoi les Mathématiques peuvent servir, et de leur parler quelquefois des réalités.

HAMMER (E.). — SECHSTELLIGE TAFEL DER WERTE $\log \frac{1-x}{1-x}$ FÜR JEDEN WERT DES ARGUMENTS $\log x$ VON 3,0-10 BIS 9,99000-10 (VOM ARGUMENT 9,99000-10 AN BIS 9,99970o-10 $\sin d$ DIE $\log \frac{1+x}{1-x}$ NUR NOCH FÜNFSTELLIG ANGEGEBEN VON DORT AN VIERSTELLIG). 1 vol. in-4°, IV-73 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

M. F.-W. Rex avait publié en 1884 des Tables à cinq décimales donnant pour les diverses valeurs du logarithme vulgaire de x ($x < 1$), les valeurs correspondantes du logarithme vulgaire de $\frac{1+x}{1-x}$ [1]; M. Hammer, qui a eu à sa disposition les calculs de M. Rex, a construit, par la méthode des différences, une Table à 9 décimales d'où il a tiré la présente Table à 6 décimales. Les cas

---

[1] Une petite Table de cette nature se trouve dans l'excellent *Recueil de formules et de Tables numériques* de J. Hoüel; mais les dimensions de la Table ne permettent pas une interpolation sûre.

douteux ont été résolus directement soit au moyen des Tables à 8 décimales du Service géographique de l'Armée, soit, quand il a été nécessaire, au moyen du *Thesaurus logarithmorum* à 10 décimales (Florence, 1889).

La disposition de la Table de M. Hammer est, en général, la suivante :

La Table est à double entrée.

Chaque page contient 51 valeurs de l'argument, dont la dernière est répétée à la page suivante. De 10 en 10, les valeurs sont imprimées en caractères gras et enfermées, ainsi que les nombres correspondants, entre deux traits fins; de trois lignes en trois lignes, il y a une ligne de blanc. Les parties proportionnelles sont calculées. Le fait que le dernier chiffre est forcé n'est indiqué que s'il est un 5.

L'impression est très nette et la recherche commode.

Les intervalles entre les arguments successifs sont déterminés par la condition que l'interpolation linéaire soit permise : ils sont successivement de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$, $\frac{1}{10^4}$, $\frac{1}{10^5}$ pour les valeurs de l'argument comprises entre $\bar{7},0$ et $\bar{4},0$, entre $\bar{4},0$ et $\bar{3},3$, entre $\bar{3},3$ et $\bar{2},5$, entre $\bar{2},5$ et $\bar{1},9$, entre $\bar{1},9$ et $\bar{1},995$; à partir de la valeur $\bar{1},99$ de l'argument, les valeurs de $\log\frac{1+x}{1-x}$ ne comportent plus que cinq décimales; pour les valeurs de l'argument qui vont de $\bar{1},995$ à $\bar{1},9999$, l'intervalle est de $\frac{1}{10^6}$, et les valeurs de $\log\frac{1+x}{1-x}$ ne comportent plus que quatre décimales à partir de $\bar{1},9997$. Dans la Table, tous les arguments sont augmentés de 10.

Il est inutile d'insister ici sur le genre de services que peut rendre cette Table aux calculateurs.

MÉLANGES.

SUR UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE RATIONNELLE;

PAR M. ANDOYER.

Je n'ai trouvé, dans les Traités classiques de Mécanique rationnelle, aucune donnée sur le problème suivant, que je me propose de résoudre :

Deux courbes quelconques sont assujetties, par une liaison sans frottement, à rester constamment tangentes entre elles. Quels sont, à un instant donné, les déplacements virtuels compatibles avec la liaison et quelles sont les forces de liaison, ou réactions, qui s'exercent entre les deux courbes?

Il est bien clair que, si l'on veut étudier le mouvement des deux courbes sous l'action de forces données, on peut traiter sans peine la question à l'aide des équations de Lagrange; mais si l'on veut connaître en outre les réactions qui s'exercent entre les deux courbes, c'est-à-dire traiter le problème *complètement,* on est amené à se poser précisément la question que nous allons résoudre.

Prenons pour axes de coordonnées rectangulaires :

1° La tangente commune Ox aux deux courbes données C et C′, en leur point de contact O, à l'instant donné;

2° La normale principale Oy à l'une des courbes, C, dirigée vers le centre de courbure;

3° La binormale Oz à C.

Si s désigne l'arc de la courbe C compté à partir de O dans le sens Ox, R le rayon de courbure de C en un point M correspondant à l'arc s, T le rayon de torsion de C en M, on peut développer en séries les coordonnées du point M de la façon sui-

vante :

$$x = s - \frac{s^3}{6R_0^2} + \ldots,$$

$$y = \frac{s^2}{2R_0} + \left(\frac{1}{R}\right)'_0 \frac{s^3}{6} + \ldots,$$

$$z = -\frac{s^3}{6R_0T_0} + \ldots.$$

R_0, T_0, $\left(\frac{1}{R}\right)'_0$ représentant les valeurs de R, T $\frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{ds}$, pour $s = 0$, c'est-à-dire au point O.

Rappelons d'ailleurs, afin de lever toute ambiguïté sur le signe de T, que l'on a la relation

$$\frac{1}{R^2T} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix} = 0.$$

La normale principale Oy' à la courbe C', dans le plan Oyz, fait avec l'axe des y un angle α, compté de Oy vers Oz; la binormale Oz' fait le même angle avec Oz. Si donc s' désigne l'arc de C' compté à partir de O dans le sens Ox, R' et T' les rayons de courbure et de torsion de C' en un point M' correspondant à l'arc s', on aura pour les coordonnées du point M' les formules suivantes, où les notations s'entendent d'elles-mêmes

$$x = s' - \frac{s'^3}{6R_0'^2} + \ldots,$$

$$y = \left[\frac{s'^2}{2R_0'} + \left(\frac{1}{R'}\right)'_0 \frac{s'^3}{6} + \ldots\right]\cos\alpha - \left(-\frac{s'^3}{6R_0'T_0'} + \ldots\right)\sin\alpha,$$

$$z = \left[\frac{s'^2}{2R_0'} + \left(\frac{1}{R'}\right)'_0 \frac{s'^3}{6} + \ldots\right]\sin\alpha + \left(-\frac{s'^3}{6R_0'T_0'} + \ldots\right)\cos\alpha.$$

Supposons la courbe C fixe et donnons à C' un déplacement virtuel défini par une translation de composantes a, b, c et une rotation autour du point O de composantes p, q, r. Pour la symétrie, nous introduirons aussi les composantes q' et r' de cette rotation suivant Oy' et Oz', de sorte que

$$q' = q\cos\alpha + r\sin\alpha,$$
$$r' = -q\sin\alpha + r\cos\alpha.$$

Après un temps infiniment petit δt, la courbe C′ a pris une nouvelle position et les coordonnées de M′ sont devenues, en négligeant le quatrième ordre par rapport à s, s', δt,

$$x = a\,\delta t + s' - \frac{s'^3}{6\,R_0'^2} + q \sin\alpha \frac{s'^2}{2\,R_0'}\,\delta t - r\cos\alpha \frac{s'^2}{2\,R_0'}\,\delta t + \ldots,$$

$$y = b\,\delta t + \left[\frac{s'^2}{2\,R_0'} + \left(\frac{1}{R'}\right)'_0 \frac{s'^3}{6} + \ldots\right]\cos\alpha$$
$$- \left(-\frac{s'^3}{6\,R_0'\,T_0'} + \ldots\right)\sin\alpha + rs'\,\delta t - p\sin\alpha \frac{s'^2}{2\,R_0'}\,\delta t + \ldots,$$

$$z = c\,\delta t + \left[\frac{s'^2}{2\,R_0'} - \left(\frac{1}{R'}\right)'_0 \frac{s'^3}{6} + \ldots\right]\sin\alpha$$
$$+ \left(-\frac{s'^3}{6\,R_0'\,T_0'} + \ldots\right)\cos\alpha + p\cos\alpha \frac{s'^2}{2\,R_0'}\,\delta t - qs'\,\delta t + \ldots.$$

Écrivons que le point M′ dans sa nouvelle position coïncide avec le point M et que la tangente en M′ à C′ dans sa nouvelle position coïncide avec la tangente en M à C; on obtient les relations

$$b = 0, \qquad c = 0,$$
$$a\,\delta t + s' = s,$$
$$\frac{s'}{R_0'}\cos\alpha - r\,\delta t = \frac{s}{R_0},$$
$$\frac{s'}{R_0'}\sin\alpha - q\,\delta t = 0.$$

Éliminant s, s', δt entre les trois dernières relations, on voit que les déplacements virtuels de C′ relativement à C, compatibles avec la liaison, sont définis par les relations

$$b = 0, \qquad c = 0,$$
$$a\sin\alpha + q\,R_0' - (q\cos\alpha + r\sin\alpha)\,R_0 = 0;$$

la dernière de ces conditions peut d'ailleurs s'écrire

$$a\sin\alpha + q\,R_0' - q'\,R_0 = 0,$$

sous une forme plus symétrique.

Si la courbe C′ est une ligne droite, on a simplement

$$b = 0, \qquad c = 0, \qquad q = 0.$$

Si l'on assujettit les courbes C et C′ à de nouvelles liaisons, on

aura de nouvelles conditions. Voici quelques cas particuliers simples :

a. On suppose qu'il y a roulement de C′ sur C.
Alors $s = s'$, et par suite on a

$$a = b = c = 0, \qquad q R'_0 - q' R_0 = 0.$$

b. On suppose qu'il y a glissement de C′ sur C.
Alors $s' = 0$ et l'on obtient

$$b = c = q = 0, \qquad a - R_0 r = 0.$$

c. De même, s'il y a glissement de C sur C′, de sorte que $s = 0$, on aurait

$$b = c = q' = 0, \qquad a - R'_0 r' = 0.$$

d. Imaginons maintenant que les courbes C et C′ soient assujetties à se déplacer de façon que l'angle de leurs normales principales reste constamment égal à α.

Pour exprimer cette condition, il faut tenir compte des termes du troisième ordre, non utilisés jusqu'à présent, dans les expressions des coordonnées de M et de M′, et l'on trouve sans peine la nouvelle relation

$$\frac{s'}{T'_0} - p\,\delta t = \frac{s}{T_0};$$

on en tire une nouvelle condition qui peut s'écrire sous la forme

$$p \sin\alpha - q\frac{R'_0}{T'_0} + q'\frac{R_0}{T_0} = 0.$$

Toutefois, il peut arriver que cette condition ne soit pas distincte de celles déjà établies ; dans tous les cas, on aura les relations qui définissent le déplacement virtuel, en faisant $b = c = 0$, et annulant tous les déterminants du troisième ordre tirés de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a & r & q & p \\ 1 & \dfrac{1}{R_0} & 0 & -\dfrac{1}{T_0} \\ 1 & \dfrac{\cos\alpha}{R'_0} & -\dfrac{\sin\alpha}{R'_0} & -\dfrac{1}{T'_0} \end{matrix} \right\|.$$

On pourra ensuite combiner ce cas particulier avec l'un des précédents sans difficulté.

Passons maintenant à la détermination des réactions qui s'exercent entre les deux courbes C et C′ et supposons à cet effet que ces réactions forment un système de forces réductible à une résultante générale appliquée en O de composantes X, Y, Z et à un couple dont l'axe a pour projections L, M, N sur les axes Ox, Oy, Oz; nous introduirons aussi d'ailleurs les projections de l'axe de ce couple sur Oy' et Oz', soit

$$\begin{aligned} M' &= M\cos\alpha + N\sin\alpha, \\ N' &= -M\sin\alpha + N\cos\alpha. \end{aligned}$$

Puisque la liaison qui existe entre C et C′ est sans frottement, la somme des travaux virtuels des forces de liaison doit être nulle et, par suite, on doit avoir, comme on sait,

$$aX + bY + cZ + pL + qM + rN = 0$$

pour tout déplacement compatible avec les liaisons.

Dans le cas général examiné en premier lieu, on aura donc

$$L = 0, \qquad \frac{X}{\sin\alpha} = \frac{M}{R'_0 - R_0\cos\alpha} = \frac{-N}{R_0\sin\alpha},$$

ou mieux

$$X = -\frac{N}{R_0} = -\frac{N'}{R'_0}, \qquad L = 0;$$

les composantes Y, Z ne sont soumises à aucune relation.

Si la courbe C′ est une droite, on aura

$$X = L = N = 0.$$

Dans le cas particulier (a), on a

$$L = 0, \qquad \frac{N}{R_0} = \frac{N'}{R'_0}.$$

Dans le cas (b), il vient

$$L = 0, \qquad X = -\frac{N}{R_0},$$

et dans le cas (c)

$$L = 0, \qquad X = -\frac{N'}{R'_0}.$$

Dans le cas (d), on trouve

$$X = \frac{L}{T_0} - \frac{N}{R_0} = \frac{L}{T'_0} - \frac{N'}{R'_0}.$$

S'il y avait en outre roulement, on aurait seulement

$$\frac{L}{T_0} - \frac{N}{R_0} = \frac{L}{T'_0} - \frac{N'}{R'_0}.$$

SUR UN THÉORÈME DE M. JENSEN;

PAR M. E. GOURSAT.

On doit à M. Jensen un beau théorème [1] concernant les zéros et les pôles d'une fonction méromorphe, qui paraît susceptible de nombreuses applications. Je me propose de montrer ici comment ce théorème peut se déduire très simplement du théorème fondamental de Cauchy, et se rattache ainsi à la théorie générale des fonctions.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe à l'intérieur d'un contour fermé C comprenant l'origine à son intérieur, et holomorphe sur ce contour; nous désignerons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les zéros de $f(z)$ intérieurs au contour C et différents de l'origine, chacun d'eux étant compté avec son degré de multiplicité, par $b_1, b_2, \ldots, b_m$ les pôles de $f(z)$, autres que l'origine, intérieurs au contour C, chacun d'eux étant compté aussi avec son degré de multiplicité. Nous nous proposons d'évaluer l'intégrale

$$(1) \qquad I = \int_{(C)} \log f(z) \frac{dz}{z},$$

prise le long du contour C dans le sens direct. Pour achever de préciser le sens de cette intégrale, nous conviendrons que la

[1] J.-L.-W.-V. JENSEN. *Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions* (*Acta mathematica*, t. XXII).

variable part d'un point A d'abscisse $r > 0$ où le contour C rencontre l'axe réel, l'argument de $f(z)$ ayant une valeur initiale déterminée. En intégrant par parties la formule (1), on peut encore écrire

$$(2) \qquad I = [\log z \log f(z)]_C - \int_{(C)} \log z \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

la première partie du second membre représentant l'accroissement du produit

$$\log z \log f(z),$$

lorsque la variable z décrit le contour C. On a pour valeur initiale de ce produit

$$\log r \log[f(r)],$$

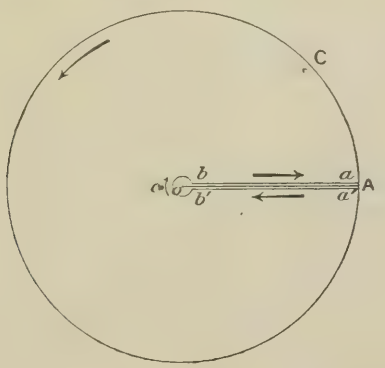
et nous conviendrons de prendre pour $\log r$ la valeur réelle; la valeur finale du même produit est

$$(\log r + 2\pi i)\{\log[f(r)] + 2K\pi i\},$$

K étant un nombre entier qui dépend du nombre des pôles et des zéros de $f(z)$ à l'intérieur de C. Il vient donc

$$(3) \qquad [\log z \log f(z)]_C = 2\pi i \{\log[f(r)] + K \log r\} - 4K\pi^2.$$

Pour évaluer l'intégrale $\int_{(C)} \log z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$, il suffit de considérer



le contour fermé Γ, formé de la courbe C, de la circonférence c de rayon ε ayant pour centre l'origine et des deux segments de

droite infiniment voisins ba, $b'a'$, tracés de part et d'autre de l'axe réel. Nous admettrons, pour fixer les idées, que la fonction $f(z)$ n'admet ni pôle ni zéro sur cette portion de l'axe réel. Dans le cas contraire, on remplacerait les droites ba, $b'a'$ par deux droites faisant un angle infiniment petit avec l'axe réel. La fonction $\log z \frac{f'(z)}{f(z)}$ est méromorphe à l'intérieur du contour Γ, et, en lui appliquant le théorème de Cauchy, nous obtenons la relation

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_\varepsilon^r \log z \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz + \int_{(C)} \log z \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \\ &+ \int_r^\varepsilon (\log z + 2\pi i)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz - \int_{(C)} \log z \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i \log\left(\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_m}\right); \end{aligned}\right.$$

on en tire

$$(4)^{bis}\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{(C)} \log z \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \\ &= 2\pi i \log\left(\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_m}\right) + 2\pi i \int_\varepsilon^r \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz - \int_{(C)} \log z \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz. \end{aligned}\right.$$

Supposons d'abord que l'origine ne soit ni un pôle, ni un zéro pour $f(z)$; lorsque ε tend vers zéro, l'intégrale

$$\int_{(C)} \log z \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

est infiniment petite et la formule précédente devient à la limite

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{(C)} \log z \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \\ &= 2\pi i \log\left(\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_m}\right) + 2\pi i \log f(r) - 2\pi i \log f(0). \end{aligned}\right.$$

La formule (2) devient donc

$$(6)\qquad I = 2\pi i\left[K \log r + \log f(0) - \log\left(\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_m}\right)\right] - 4K\pi^2;$$

les déterminations des logarithmes qu'il faut prendre dans le second membre résultent des conventions déjà faites. Pour obtenir la formule de M. Jensen, supposons que le contour C se

réduise au cercle de rayon r. Le long de ce cercle on peut poser

$$z = re^{i\varphi}, \qquad dz = ire^{i\varphi}\,d\varphi, \qquad \frac{dz}{z} = i\,d\varphi,$$

et l'on a

$$\mathrm{I} = i\int_0^{2\pi} \log[f(re^{i\varphi})]\,d\varphi.$$

Égalons maintenant les coefficients de i dans les deux membres de la formule (6), en observant que dans le cas actuel on a

$$\mathrm{K} = n - m,$$

et nous arrivons à la formule de M. Jensen

$$(7)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \log|f(0)| + \log\left|r^{n-m}\frac{b_1 b_2 \ldots b_m}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right|,$$

où ne figurent plus que des logarithmes ordinaires.

Lorsque la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon r, la formule se simplifie, et il reste

$$(8)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \log|f(0)| + \log\left|\frac{r^n}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right|.$$

En égalant de même les parties réelles dans les deux membres de la formule (6), on obtient la relation suivante qui complète le théorème de M. Jensen :

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi\,d\varphi = {} & \arg f(0) + \arg b_1 + \arg b_2 + \ldots + \arg b_m \\ & - \arg a_1 - \ldots - \arg a_n + 2(n-m)\pi; \end{aligned}\right.$$

dans cette relation, Φ représente l'argument de $f(z)$ le long du cercle C, et il est aisé de voir comment on doit choisir les différents arguments qui figurent dans le second membre, d'après la façon même dont on parvient à cette formule.

Si l'origine $z = 0$ est un pôle ou un zéro de $f(z)$, on peut écrire

$$f(z) = z^p\,\varphi(z),$$

p étant un nombre entier positif ou négatif et $\varphi(z)$ une fonction dont l'origine n'est ni un pôle ni un zéro, qui admet les racines $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et les pôles $b_1, b_2, \ldots, b_m$ à l'intérieur du

cercle C. On a dans ce cas

$$\log|f(re^{i\varphi})| = \log|\varphi(re^{i\varphi})| + p\log r;$$

on peut appliquer la formule (1) à la fonction $\varphi(z)$, et il reste

$$(10)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(r)e^{i\varphi}|\,d\varphi = \log|\varphi(0)| + \log\left|r^{n-m+p}\frac{b_1 b_2 \ldots b_m}{a_1 a_2 \ldots a_n}\right|.$$

Ce résultat pourrait aussi se déduire de la formule $(4)^{bis}$ en cherchant la limite, pour ε infiniment petit, de l'expression

$$2\pi i\int_\varepsilon^r \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz - \int_{(C)} \log z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

SUR LA PREMIÈRE LETTRE ARITHMÉTIQUE D'HERMITE A JACOBI;

PAR M. XAVIER STOUFF.

Soient

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{\substack{j=n\\i=n}} a_{ij}x_i x_j \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

une forme quadratique définie, D son déterminant,

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum b_{ij}y_i y_j$$

son adjointe, en entendant par b_{ij} le mineur de D relatif à l'élément a_{ij}. Nous dirons que f est réduite, si x_1 étant celle des indéterminées dont le carré a le plus petit coefficient, on a

$$(1)\qquad a_{11} < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt[n]{D}, \qquad |a_{1i}| < \frac{1}{2}a_{11} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

et si $g(0, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ est aussi une forme réduite. De la théorie exposée dans la première Lettre arithmétique [1] il résulte

[1] *Journal de Crelle*, t. 40.

que toute forme définie a pour équivalente au moins une forme réduite. M. Hermite a énoncé la proposition suivante :

Si f est réduite, le coefficient de l'un des carrés dans g est moindre que $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt[n]{D^{n-1}}$, et en multipliant les autres coefficients des carrés dans g rangés dans un certain ordre respectivement par la première, la deuxième, ..., la $(n-1)^{\text{ième}}$ puissance de ce coefficient, on obtient des quantités respectivement moindres que $\mu_1 \sqrt[n]{D^{2(n-1)}}$, $\mu_2 \sqrt[n]{D^{3(n-1)}}$, ..., $\mu_{n-1} \sqrt[n]{D^{n(n-1)}}$, où l'indice μ_i ne dépend que de n et de i.

Nous démontrerons ce théorème en prenant pour le coefficient, qui doit être moindre que $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt[n]{D^{n-1}}$ et qui est employé comme multiplicateur, le plus petit des coefficients des carrés dans $g(0, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ et pour le coefficient qui, multiplié par la puissance $(n-1)^{\text{ième}}$ du précédent doit donner un produit moindre que $\mu_{n-1} \sqrt[n]{D^{n(n-1)}}$, le coefficient de y_1^2. Nous prouverons que, si le théorème ainsi précisé est vrai pour les formes d'un nombre d'indéterminées moindre que n, il est vrai pour les formes d'ordre n.

Soient D' le déterminant de $g(0, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ et b_{22} le plus petit coefficient des carrés dans cette forme,

$$h(z_2, z_3, \ldots, z_n) = \sum_{\substack{i=2\\ j=2}}^{\substack{i=n\\ j=n}} c_{ij} z_i z_j,$$

la forme adjointe de $g(0, y_2, y_3, \ldots, y_n)$, D'' le déterminant de $h(0, z_3, z_4, \ldots, z_n)$ et c_{33} le plus petit coefficient des carrés dans cette forme, enfin

$$k(u_3, u_4, \ldots, u_n) = \sum_{\substack{i=3\\ j=3}}^{\substack{i=n\\ j=n}} d_{ij} u_i u_j,$$

la forme adjointe de $h(0, z_3, \ldots, z_n)$ et d_{44} le plus petit coefficient des carrés dans $k(0, u_4, \ldots, u_n)$. $h(0, z_3, z_4, \ldots, z_n)$

étant une forme réduite et le théorème étant supposé vrai pour les formes de moins de n variables, on aura

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} d_{44} < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-3)} \sqrt[n-2]{D^{n-3}}, \\ d_{44}d_{55} < \nu_1 \sqrt[n-2]{D^{2(n-3)}}, \\ d_{44}^2 d_{66} < \nu_2 \sqrt[n-2]{D^{3(n-3)}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ d_{44}^{n-4} d_{nn} < \nu_{n-4} \sqrt[n-2]{D^{(n-3)(n-3)}}, \\ d_{44}^{n-3} d_{33} < \nu_{n-3} \sqrt[n-2]{D^{(n-2)(n-3)}}; \end{array}\right.$$

on suppose que l'on a désigné dans un ordre convenable les variables de la forme k autres que u_3 et u_4 par $u_5, u_6, \dots, u_n$. $g(0, y_2, y_3, \dots, y_n)$ étant une forme réduite, on a

$$(3)\quad b_{22} < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-2)} \sqrt[n-1]{D'}, \qquad |b_{2i}| < \frac{1}{2} b_{22} \qquad (i = 3, 4, \dots, n).$$

Or, si l'on envisage le déterminant qui a pour éléments b_{ij}, $(i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$, D' est le mineur de ce déterminant relatif à l'élément b_{11} et, d'après les propriétés des déterminants réciproques,

$$(4)\qquad D' = a_{11} D^{n-2},$$

d'où

$$b_{22} < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-2)} a_{11}^{\frac{1}{n-1}} D^{\frac{n-2}{n-1}},$$

et, en remplaçant a_{11} par sa limite supérieure (1), on a, par un calcul facile,

$$(5)\qquad b_{22} < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt[n]{D^{n-1}};$$

c'est la première des inégalités à démontrer.

Les quantités $d_{ij} (i, j = 3, 4, \dots, n)$ sont les mineurs du déterminant de $h(0, z_3, \dots, z_n)$; d_{ij} s'obtient en enlevant dans le déterminant de $h(0, z_3, \dots, z_n)$ la ligne d'indice i et la colonne d'indice j. Donc d_{ij} est un mineur du second ordre du déterminant de $h(z_2, z_3, \dots, z_n)$ et s'en déduit en enlevant dans ce

déterminant la première ligne et la ligne d'indice i, la première colonne et la colonne d'indice j. Or le déterminant de h a pour éléments les mineurs du premier ordre de D'; donc, d'après les propriétés des déterminants réciproques,

$$(6) \qquad d_{ij} = (b_{22} b_{ij} - b_{i2} b_{2j}) D'^{n-4}.$$

D'' étant à D' dans une relation analogue à celle de D' à D, on a

$$(7) \qquad D'' = b_{22} D'^{n-3}.$$

La première des relations (2) donne alors

$$d_{44} < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-3)} \sqrt[n-2]{b_{22}^{n-3} D'^{(n-3)^2}}$$

et, d'après (6) et après avoir supprimé le facteur commun D'^{n-4},

$$b_{22} b_{44} - b_{24}^2 < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-3)} \sqrt[n-2]{b_{22}^{n-3} D'},$$

$$b_{22} b_{44} < \frac{1}{4} b_{22}^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-3)} \sqrt[n-2]{b_{22}^{n-3} a_{11} D'^{i-2}},$$

et, en remplaçant a_{11} et b_{22} par leurs limites supérieures (1) et (5),

$$(8) \qquad b_{22} b_{44} < \left[\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-2}\right] \sqrt[n]{D^{2(n-1)}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \sqrt[n]{D^{2(n-1)}};$$

c'est encore une des inégalités à démontrer.

Envisageons maintenant l'une des inégalités (2)

$$d_{44}^{i-4} d_{ii} < \nu_{i-4} \sqrt[n-2]{D'^{(i-3)(n-3)}},$$

lorsque i prend les valeurs 5, 6, 7, ..., n. Cela donne, en remplaçant D'', d_{44}, d_{ii} par les valeurs (7) et (6) et après avoir supprimé le facteur commun $D'^{(i-3)(n-4)}$,

$$(b_{22} b_{44} - b_{24}^2)^{i-4} (b_{22} b_{ii} - b_{2i}^2) < \nu_{i-4} \sqrt[n-2]{(b_{22}^{n-3} D')^{i-3}}.$$

Or b_{22} étant le plus petit coefficient des carrés dans

$$g(0, y_2, y_3, \ldots, y_n)$$

est au plus égal à b_{44}, $|b_{24}|$ est moindre que $\frac{1}{2} b_{22}$, donc

(b_{22}, b_{24}, b_{44}) est une forme binaire réduite et l'on a

$$b_{22}b_{44} - b_{24}^2 > \frac{3}{4} b_{22}^2,$$

$$b_{22}^{2(i-4)}(b_{22}b_{ii} - b_{2i}^2) < \left(\frac{4}{3}\right)^{i-4} \nu_{i-4}{}^{n-2}\sqrt{(b_{22}^{n-3}\mathrm{D}')^{i-3}};$$

on peut diviser les deux membres de cette inégalité par b_{22}^{i-4}, ce qui donne

$$b_{22}^{i-4}(b_{22}b_{ii} - b_{2i}^2) < \left(\frac{4}{3}\right)^{i-4} \nu_{i-4}{}^{n-2}\sqrt{b_{22}^{n-i+1}\mathrm{D}'^{i-3}},$$

$$b_{22}^{i-3}b_{ii} < \frac{1}{4} b_{22}^{i-2} + \left(\frac{4}{3}\right)^{i-4} \nu_{i-4}{}^{n-2}\sqrt{a_{11}^{i-3} b_{22}^{n-i+1}\mathrm{D}^{(n-2)(i-3)}},$$

et, en remplaçant dans le second membre a_{11} et b_{22} par leurs limites supérieures (1) et (5),

$$(9) \quad b_{22}^{i-3}b_{ii} < \left[\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)(i-2)} + \left(\frac{4}{3}\right)^{i-4+\frac{1}{2}(n-1)} \nu_{i-4}\right]\sqrt[n]{\mathrm{D}^{(n-1)(i-2)}},$$

on obtient encore ainsi $n - 4$ des inégalités à démontrer.

L'inégalité

$$d_{44}^{n-3}d_{33} < \nu_{n-3}{}^{n-2}\sqrt{\mathrm{D}^{(n-2)(n-3)}},$$

se traite absolument de la même manière et donne lieu à l'inégalité

$$(10) \quad b_{22}^{n-2}b_{33} < \left[\frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)^2} + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3+\frac{1}{2}(n-1)} \nu_{n-3}\right]\sqrt[n]{\mathrm{D}^{(n-1)^2}}.$$

Il ne nous reste plus qu'une seule inégalité à démontrer, à savoir

$$b_{22}^{n-1}b_{11} < \mu\sqrt[n]{\mathrm{D}^{n(n-1)}},$$

mais celle-ci exige une méthode toute spéciale. On a d'abord

$$(11) \qquad |b_{22}^{n-1}b_{ij}| < \sigma_{ij}\mathrm{D}^{n-1} \qquad \text{pour} \qquad i, j = 2, 3, 4, \ldots, n,$$

où les lettres σ_{ij} désignent des coefficients numériques ne dépendant que de n, i, j. Supposons d'abord $j = i$. On a

$$b_{22}b_{44} < \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\sqrt[n]{\mathrm{D}^{2(n-1)}};$$

d'où, en multipliant par b_{22}^{n-2},

$$b_{22}^{n-1} b_{11} < \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \sqrt[n]{D^{2n-1}}\, b_{22}^{n-2}.$$

il suffit de remplacer dans le second membre b_{22} par sa limite supérieure (5) pour obtenir l'inégalité à démontrer. De même, pour $i = 5, 6, \ldots, n$, on a

$$b_{22}^{n-1} b_{ii} = b_{22}^{n-i+2} . b_{22}^{i-3} b_{ii},$$

et, en remplaçant dans le second membre b_{22}^{n-i+2} par sa limite supérieure déduite de (5) et $b_{22}^{i-3} b_{ii}$ par sa limite supérieure (9), on a encore les inégalités à démontrer. On opère d'une manière analogue pour $b_{22}^{n-1} b_{33}$.

Pour démontrer les inégalités (11) lorsque i est différent de j, remarquons que la forme binaire (b_{ii}, b_{ij}, b_{jj}) étant définie, $|b_{ij}|$ est moindre que $\sqrt{b_{ii} b_{jj}}$, donc

$$|b_{22}^{n-1} b_{ij}| < \sqrt{b_{22}^{n-1} b_{ii}} \sqrt{b_{22}^{n-1} b_{jj}}.$$

et il suffit, pour achever la démonstration, de remplacer dans les seconds membres les quantités soumises aux radicaux par leurs limites supérieures déjà trouvées.

On a ensuite

$$(12) \qquad |b_{22}^{n-1} b_{1i}| < \rho_i D^{n-1} \qquad \text{pour} \qquad i = 2, 3, \ldots, n,$$

ρ_i étant un coefficient numérique qui ne dépend que de n et de i.

En effet, suivant l'exemple de M. Hermite, écrivons l'équation connue

$$\sum_{j=1}^{j=n} b_{ij} a_{1j} = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

qui peut encore s'écrire, en multipliant par b_{22}^{n-1} ses deux membres,

$$a_{11} b_{22}^{n-1} b_{1i} = -\sum_{j=2}^{j=n} a_{1j} b_{22}^{n-1} b_{ij},$$

en remplaçant dans le second membre les quantités $-a_{1j}$ par $\frac{1}{2} a_{11}$ limite supérieure de leurs valeurs absolues, et les quantités $b_{22}^{n-1} b_{ij}$ par les limites supérieures déjà trouvées, puis, divi-

sant par a_{11} les deux membres de l'inégalité ainsi obtenue, on obtient l'inégalité (12). Enfin on a

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_{1j} b_{1j} = \mathrm{D};$$

on peut écrire cette relation en multipliant par b_{22}^{n-1} ses deux membres

$$(13) \qquad a_{11} b_{22}^{n-1} b_{11} = \mathrm{D} b_{22}^{n-1} - \sum_{j=2}^{j=n} a_{1j} b_{22}^{n-1} b_{1j}.$$

Mais on a, d'après (3),

$$b_{22}^{n-1} < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)} \mathrm{D}' = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)} a_{11} \mathrm{D}^{n-2},$$

en remplaçant, dans le second membre de (13), b_{22}^{n-1} par cette limite supérieure, les quantités $-a_{1j}$ par $\frac{1}{2} a_{11}$ limite supérieure de leurs valeurs absolues, et les quantités $b_{22}^{n-1} b_{1j}$ par les limites supérieures (12), puis en divisant par a_{11}, on déduit de (13) l'inégalité à démontrer.

On remarquera que $h(z_2, z_3, \ldots, z_n)$ est précisément, à un facteur près, ce que M. Hermite, dans sa seconde Lettre arithmétique à Jacobi, nomme la *forme dérivée* de f par rapport à la variable x_1.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Voigt (W.). — *Elementare Mechanik als Einleitung in das Studium der theoretischen Physik.* 2e édition. Gr. in-8°, x-578 p. avec 66 fig. Leipzig, Veit et C°. 14 m.; relié, 16 m.

Hoff (J.-H. van't). — *Lectures on theoretical and physical Chemistry.* Traduit par R.-A. Lehfeldt. Part 3 : Relations between Properties and Composition. In-8°, 144 p. London, Arnold. 7 sh. 6 d.

Brisse (C.). — *Cours de géométrie descriptive.* 1re Partie. 2e édit. In-8°, xviii-177 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

FORSYTH (A.-R.). — *Theory of functions of a complex variable.* 2e édit. roy. In-8°, 808 p. London, Clay. 21 sh.

MICHEL (F.). — *Recueil de problèmes de Géométrie analytique. Solutions des problèmes donnés à l'École Polytechnique de* 1860 *à* 1900. In-8°, VI-240 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 6 fr.

NALLINO (C.-A.). — *Al-Battani sive Albatenii opus astronomicum, ad fidem codicis escurialensis arabice editum latine versum, adnotationibus instructum.* Pars III. In-4°. Milano, Hœpli. 25 l.

RAPPORTS *présentés au Congrès de Physique réuni à Paris en* 1900 *sous les auspices de la Société française de Physique,* rassemblés et publiés par Ch.-Ed. Guillaume et L. Poincaré. 3 vol. gr. in-8°, avec figures. Paris, Gauthier-Villars. 50 fr.

ANNALES *de l'Observatoire de Nice,* publiées par M. Perrotin. T. VII. In-4°, 450 p. et 89 pl. Paris, Gauthier-Villars. 30 fr.

ANNALES *de l'Observatoire de Paris,* publiées sous la direction de M. F. Tisserand. *Mémoires,* t. XXI. In-4°, 478 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 27 fr.

GROSSMANN (L.). — *Die Mathematik im Dienste der Nationalökonomie unter Rücksichtnahme auf die praktische Handhabung der Disciplinen d. Finanzwissenschaft u. Versicherungstechnik.* 12. (Schluss-) Liefg. Gr. in-8°. (Suppl. T. VIII, 80 p. avec 1 planche.) Vienne, Dr Ludw. Grossmann. 5 m.

HENTSCHEL (O.). — *Ausführung einiger conformen Abbildungen der Parabel auf den Kreis u. unendlich lange Parallelstreifen.* Gr. in-4°, 8 et 4 p. avec 9 planches de figures. Leipzig, G. Fock. 1 m. 20 pf.

JAHRBUCH *über die Fortschritte der Mathematik, begründet von C. Ohrtmann.* Herausgeg. von E. Lampe u. G. Wallenberg. T. XXIX. Année 1898. 3e fasc. Gr. in-8°. Berlin, G. Reimer. 12 m.

KLEIN (H.-J.). — *Handbuch der allgemeinen Himmelsbeschreibung nach den Standpunkte der astronom. Wissenschaft am Ende des* 19. *Jahrh.* 3e édition de *Anleitung zur Durchmusterung des Himmels.* Gr. in-8°, XIV-610 p. avec nombreuses figures et planches. Braunschweig, Vieweg. 10 m.

LOEWY (M.). — *Éphémérides des étoiles de culmination lunaire et de longitude pour* 1901. In-4°, 44 p. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr.

MONGE (G.). — *Darstellende Geometrie* (1798). Traduit et publié par R. Haussner. In-8°, 217 p. avec nombreuses fig. Leipzig, Engelmann. Cart. 4 m.

(Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. N° 117.)

Runge (C.). — *Praxis der Gleichungen.* In-8°, III-196 p. avec 8 fig. Leipzig, Göschen. Relié, 5 m. 20 pf.

(Sammlung Schubert. 14e Volume.)

Schlesinger (L.). — *Einführung in d. Theorie d. Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln.* In-8°, VIII-309 p. Leipzig, Göschen. Relié, 8 m.

(Sammlung Schubert. 13e Volume.)

Teubner's *Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* IV Bd. 1 Abth. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 2 m. 40 pf.; relié, 3 m.

Contenu : O. Stolz u. J. A. Gemeiner, Theoretische Arithmetik. 1 Abth. 2 Aufl. der Abschnitte 1—4 des 1 Theiles der Vorlesgn. über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. IV-98 p. avec 6 fig.

Valentiner (S.). — *Untersuchungen über die Beziehung zwischen dem Potential einer homogenen Kugel u. dem des Mittelpunktes.* (Dissert.) Gr. in-8°. 65 p. Karlsruhe, Braun'sche Hofbuchdr. 1 m. 60 pf.

Wendler (A.). — *Ueber die Flächen, welche dem partikulären Integrale der Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ *entsprechen.* (Dissert.) Gr. in-8°, 48 p. avec 1 planche. München, Reinhardt. 1 m. 50 pf.

Gross (Th.). — *Kritische Beiträge zur Energetik. I. Die Verwandlungen der Kraft nach Robert Mayer.* Gr. in-8°, XVIII-58 p. Berlin, Krayn. 1 m. 75 pf.

Konigsberger (J.). — *Ueber die Absorption des Lichtes in festen Körpern.* (Habilitationsschrift.) Gr. in-8°, 48 p. avec fig. Leipzig, Teubner. 1 m. 20 pf.

Janet (P.). — *Premiers principes d'électricité industrielle (Piles, Accumulateurs, Dynamos, Transformateurs).* 4e édit. In-8°, V-280 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars.

Abhandlungen *zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* Begründet von M. Cantor. 11. Heft. gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 5 m.

Contenu : M. Simon, Euclid u. die sechs planimetrischen Bücher. Mit Benutzg. der Textausgabe von Heiberg. VII-141 p. avec 192 fig.

Abhandlungen *mathematische, aus dem Verlage mathemat. Modelle* von Martin Schilling in Halle a. S. Neue Folge. N° 2 gr. in-8°. Halle, Schilling. 1 m. 60 pf.

Contenu : H. Wiener, die Eintheilung der ebenen Kurven n. Kegel 3. Ordg. in 13 Gattungen. VI-34 p. avec 2 fig.

KIEPERT (L.). — *Grundriss der Differential- u. Integral-Rechnung.* I Thl. Differential-Rechnung. 9e édition. Gr. in-8°, XVII-750 p. avec 171 fig. Hannover, Helwing. 12 m; relié, 13 m. 50 pf.

MENSBRUGGHE (G. VAN DER). — *Sur les phénomènes capillaires.* In-8°, 25 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars.

POINCARÉ (H.). — *Électricité et Optique. La Lumière et les théories électrodynamiques.* 2e édit. In-8°, X-647 p. avec fig. Paris, Carré et Naud.

THOMPSON (S.-P.). — *Michael Faraday : his life and work.* In-8°, 320 p. London, Cassell. 2 sh. 6 d.

ALBRECHT (M.-F.) u. C. S. VIEROW. — *Lehrbuch der Navigation u. ihrer mathemat. Hilfswissenschaften.* 8e édit. Neu bearb. von G. Holz. In-8°, XXII-528 p. avec 280 fig. et 2 planches. Berlin, v. Decker. 14 m.; relié, 16 m.

CARNOY (J.). — *Cours d'algèbre supérieure. Principes de la théorie des déterminants; théorie des équations; introduction à la théorie des formes algébriques.* 2e édit. In-8°, XI-555 p. Louvain, Uystpruyst. 9 fr.

GOURNERIE (J. DE LA). — *Traité de géométrie descriptive.* 3e édit. 3e partie. In-4°. XX-320 p. et atlas de 40 pl. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

HANDWÖRTERBUCH *der Astronomie,* herausgeg von W. Valentiner. 24e liv. gr. in-8°, avec fig. Breslau, Trewendt. 3 m. 60 pf.

KARSTENS (H.). — *Ueber gewisse asymptotische Lösungen der Differential- gleichungen der analytischen Mechanik* (Dissert.). Gr. in-8°, 37 p. Berlin, Mayer et Müller. 1 m. 20 pf.

KILLING (W.). — *Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten.* 2e. Thl. : Die Geometrie des Raumes. Gr. in-8°, VIII-361 p. Paderborn, Schöningh. 5 m. 20 pf.

LOEWY (M.). — *Éphémérides des étoiles de culmination lunaire et de longitude pour* 1902. In-4°, 44 p. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr.

OETTINGEN (A.-V.). — *Elemente des geometrisch-perspektivischen Zeichnens.* Gr. in-8°, VII-177 p. avec 209 fig. Leipzig, Engelmann. 8 m.; relié, 9 m.

RUSSEL (B.-A.-W.). — *Essai sur les fondements de la géométrie.* Traduction par A. Cadenat. In-8°, X-274 p. Paris, Gauthier-Villars. 9 fr.

DUFET (H.). — *Recueil de données numériques, publié par la Société française de Physique. Optique.* 3e fasc. In-8°, XII p. et p. 787 à 1313. Paris, Gauthier-Villars. 15 fr.

Ball (W. W. R.). — *Short account of the history of Mathematics.* 3e édit. in-8°, 532 p. London, Macmillan. 10 sh.

Barnes (E. W.). — *Theory of the double Gamma function.* (From *Philos. Trans.* A. vol. 126). London, Dulau. 6 sh.

Breithof (N.) et F. Breithof. — *Traité de géométrie descriptive.* 1re Partie. 4e édit. In-8°, 193 p. avec atlas in-4° de 24 planches. Louvain, Uystpruyst. 9 fr.

Handel (O.). — *Elementar-synthetische Kegelschnittslehre. Mit zahlreichen Uebungsaufgaben.* Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten. 2e édit. gr. in-8°, vi-85 p. avec 57 fig. Berlin, Weidmann. Cart. 1 m. 60 pf.

Loewy (M.) et P. Puiseux. — *Atlas photographique de la Lune.* publié par l'Observatoire de Paris. 5e fasc. In-4°, 62 p. avec planches. Paris, impr. nationale. 30 fr.

Marchand (J.). — *Partage des terrains. Arpentage, levé des plans et nivellement.* In-8° avec fig. Louvain, Uystpruyst. 4 fr.

Rohn (K.) u. E. Papperitz. — *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (In 2 Bdn.) 1. Bd. 2e édit. gr. in-8°, xx-418 p. avec fig. Leipzig, Veit et C°. 12 m.; relié, 13 m.

Schouten (G.). — *Analytische Meetkunde van het platte vlak.* (*Kegelsnedem*). 2. druk. gr. in-8°, 146 p. avec fig. Delft, Waltman jr. 2 fl. 25 c.

Recueil *de travaux offerts par les auteurs à H.-A. Lorentz, professeur de physique à l'Université de Leyde à l'occasion du 25e anniversaire de son doctorat, le 11 décembre* 1900. Gr. in 8°, x-678 p. avec 3 pl. La Haye, Nijhoff. Relié, 7 fl.

Reynolds (O.). — *Papers on mechanical and physical subjects.* Reprinted from various Transactions and Journals. Vol. 2 : 1891–1900. In-8°, 740 p. avec planches. London, Clay. 21 sh.

Autenheimer (F.). — *Elementarbuch der Differential- u. Integralrechnung, m. zahlreichen Anwendgn. aus d. Analysis, Geometrie, Mechanik u. Physik.* 5. Aufl., bearb. von A. Donadt. Gr. in-8°, x-602 p. avec 156 fig. Leipzig, B.-F. Voigt. 9 m.; relié, 10 m.

Bigourdan (G.). — *Le Système métrique des poids et mesures. Son établissement et sa propagation graduelle, avec l'histoire des opérations qui ont servi à déterminer le mètre et le kilogramme.* In-8°, 458 p. et portraits. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ZEUTHEN (H.-G.). — Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen age, édition française revue et corrigée par l'auteur, traduite par *Jean Mascart*. 1 vol. in-8°, XVI-296 pages. Paris, Gauthier-Villars; 1902.

Lorsque, deux ans après l'édition danoise de l'Ouvrage de M. Zeuthen, parut l'édition allemande, j'en ai dit ici-même (mai 1896, p. 105-108) au moins une partie du bien que j'en pensais; je ne puis donc que considérer comme très heureux que nous puissions enfin disposer, en France, d'une Histoire des Mathématiques avant la Renaissance, qui soit accessible aux élèves comme aux maîtres; qui, sans s'arrêter aux détails d'érudition nécessaires seulement à ceux qui veulent poursuivre eux-mêmes des recherches historiques, comprenne tout ce qu'il y a d'indispensable et d'important à savoir, avec tous les développements utiles pour une exacte intelligence des faits; une Histoire enfin en laquelle la haute compétence de l'auteur et le sens historique exquis dont il a donné tant de preuves puissent inspirer une confiance aussi entière qu'elle est méritée.

Je ne suis pas moins heureux de pouvoir, à cette occasion, annoncer que M. Zeuthen vient de terminer en danois, pour faire suite à cet Ouvrage, une *Histoire de la Mathématique pendant les* XVIe *et* XVIIe *siècles*. Faut-il espérer en même temps que cette Histoire n'attendra pas un traducteur français aussi longtemps que la première?

La revision à laquelle M. Zeuthen a soumis celle-ci, pour la nouvelle édition, a au reste été faite avec le plus grand soin, et comme les travaux les plus récents ont été utilisés, elle présente un tableau exact et bien au point de nos connaissances actuelles sur la matière, connaissances à l'extension desquelles M. Zeuthen a lui-même si largement contribué.

En réalité, ces connaissances sont relativement très satisfaisantes pour ce qui concerne l'histoire de la Géométrie dans l'antiquité;

au moins nous pouvons bien suivre le développement et l'évolution des théories qui nous ont été léguées dans ce domaine de la Mathématique. Pour celles qui ont été perdues dès avant les invasions arabes, la *Collection mathématique* de Pappus offrira longtemps encore des sujets d'études, de conjectures et de divinations; par exemple, le célèbre Ouvrage de Chasles sur les *Porismes* d'Euclide ne peut nullement être regardé comme définitif. Mais précisément parce que ces travaux anciens se sont perdus de bonne heure, ils n'ont pas joué un rôle important dans l'évolution scientifique; l'intérêt historique qu'ils peuvent éveiller est donc d'ordre secondaire et n'égale pas l'intérêt mathématique qu'offrent encore, même aujourd'hui, nombre de questions traitées ou indiquées par Pappus.

Des autres branches de la Mathématique ancienne, l'Astronomie seule est comparable, pour l'avancement de son histoire, à la Géométrie. En particulier, la Géométrie de la sphère, que les anciens traitaient en Astronomie, a été récemment l'objet de travaux approfondis de M. V. Braunmühl (*Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie*), travaux que M. Zeuthen a mis à contribution pour sa nouvelle édition, tout en y apportant lui-même sa quote-part personnelle.

Pour la Mécanique rationelle, à moins de vouloir se borner aux immortels travaux d'Archimède en Statique, son Histoire dans l'antiquité ne saurait être dégagée de celle de la Mécanique pratique, et là beaucoup de points restent obscurs. Cependant un effort considérable se produit actuellement pour la réunion de nouveaux matériaux (éditions critiques des anciens mécaniciens, recherches des traductions ou imitations arabes). Notamment notre compatriote M. le baron Carra de Vaux, après avoir donné la première édition des *Mécaniques* de Héron, va publier, également d'après des textes arabes, un Traité inédit de Philon de Byzance.

Mais le domaine dont l'histoire laisse le plus à désirer, sans qu'on puisse, semble-t-il, espérer de nouveaux documents, à moins d'une trouvaille inattendue dans les papyrus qui sont encore enfouis en Égypte, c'est sans contredit le domaine de l'Arithmétique; là, et en particulier pour le Calcul, les points les plus essentiels demeurent dans une profonde obscurité; si les patientes et sagaces recherches de Fr. Hultsch ont récemment abouti à certains résultats que l'on

peut désormais regarder comme définitivement acquis, ils font d'autant mieux apprécier l'étendue de la *terre inconnue,* sur laquelle on ne peut que former des conjectures plus ou moins plausibles.

M. Zeuthen accuse une propension assez marquée à revenir à la thèse de Hankel : les Grecs, merveilleusement doués pour la Géométrie, ne l'étaient nullement pour l'Arithmétique; la rédaction d'un Ouvrage comme celui de Diophante ne peut s'expliquer qu'en supposant l'influence, dans l'Égypte hellénisée, d'une race particulièrement apte aux calculs numériques, comme celle des Hindous.

M. Zeuthen se borne cependant à émettre à ce sujet des hypothèses sous forme dubitative; comme je suis le premier à reconnaître que la question ne peut se trancher d'une façon décisive, je ne renouvellerai pas ici les objections que j'ai, à plusieurs reprises, élevées contre la thèse de Hankel. Je bornerai donc mes observations à deux points sur lesquels l'attention a été récemment rappelée.

Page 9, M. Zeuthen, comme preuve de l'inhabileté des Grecs en calcul, fait ressortir, d'après Heiberg, qu'Hérodote semble incapable de faire exactement la division par 48 d'un nombre un peu grand. En fait, le texte d'Hérodote (VII, 187), après avoir évalué la consommation journalière de blé dans l'armée de Xerxès à 5 283 220 chénices, transforme ce nombre en médimnes (division par 48), et donne comme quotient 110 340 médimnes.

J'avoue que le plus singulier me paraît être, dans cette affaire, qu'aucun des nombreux éditeurs antiques d'Hérodote ne paraît s'être avisé de vérifier le calcul et de corriger l'erreur matérielle. Les manuscrits que nous avons n'offrent en effet aucune variante; mais cela ne suffit pas pour établir que la faute existait dans l'original d'Hérodote, et, s'il la renfermait de fait, on peut aisément en rendre compte sans supposer une erreur de calcul. Très certainement Hérodote n'a pas calculé, comme nous, la plume à la main; le système de numération écrite des Grecs, jusqu'au temps d'Euclide au moins, n'a jamais été, pas plus que celui des Romains, auquel il était analogue, employé pour des calculs un peu complexes. Hérodote a calculé ou a fait calculer par un esclave, sur l'abaque, avec des jetons; il a trouvé le résultat exact 110 060 médimnes,

340 chénices. Dès la première transcription ou la première copie, une corruption a pu s'introduire. Il me semble bien difficile, au reste, d'expliquer autrement la prétendue faute de calcul.

A la différence des Grecs, les Égyptiens étaient alors depuis plus de mille ans en possession d'un système de numération écrite permettant le calcul avec la plume (ainsi que le prouve le papyrus d'Ahmès). Avec leur système classique de la numération écrite, qui se développa sous les premiers Lagides, les Grecs obtinrent le même avantage, d'une façon d'ailleurs plus satisfaisante encore. Si jusqu'à Archimède ils se bornèrent aux myriades de myriades (nombres de huit figures), c'est sans doute que cela suffisait très amplement aux besoins de la pratique. A la vérité, cela montre bien qu'alors ils ne se souciaient guère d'effectuer de longs calculs pour des recherches purement numériques. Mais où en étaient alors les Hindous? Quand ont-ils créé leur système de numération? Quand leurs facultés arithmétiques indéniables ont-elles été assez développées pour déterminer ce progrès décisif? La vérité est que nous n'en savons rien, et qu'il serait bien difficile de prouver qu'au temps de Diophante ils avaient déjà, sous ce rapport, quelque supériorité sur les Grecs.

Par hypothèse, page 49, M. Zeuthen admet qu'avant Archimède il n'existait point de méthode généralement connue pour extraire les racines carrées quelconques, et il donne comme preuve qu'Archimède a pu seul arriver à la détermination des limites qu'il a données pour π. Je me demande si ce raisonnement est bien concluant, si la détermination en question était irréalisable avant lui.

Le seul fait que nous pouvons constater, c'est qu'Aristarque de Samos se contente d'assigner à π des limites numériques très grossières, beaucoup plus écartées que celles que pouvait déjà donner pratiquement le tracé d'une *quadratrice*. Mais ne peut-on dire que la détermination numérique de limites de π n'offrait d'intérêt pratique que pour le développement de l'Astronomie et qu'elle s'est, sous ce rapport, produite à son heure? Pour le but que se proposait Aristarque, les limites qu'il a prises étaient parfaitement suffisantes; j'imagine que pour la Géométrie pratique les Grecs pouvaient aisément s'en contenter également. Du moment où π n'était pas déterminable géométriquement pour eux, il valait

comme irrationel, et, quant à prendre une approximation, ils prenaient la plus simple. La gloire d'Archimède est d'avoir su prouver qu'avec des nombres réellement simples on pouvait avoir une approximation pratiquement très supérieure; mais il a pu, pour cela, n'employer que des moyens connus bien avant lui, sans que personne eût pris la peine de les combiner pour résoudre le même problème.

M. Zeuthen ne conteste point que le principe essentiel de l'extraction de la racine carrée des nombres entiers était connu déjà depuis longtemps à l'époque d'Archimède. Il s'agit donc des évaluations fractionnaires. Or nous connaissons sûrement aujourd'hui la méthode suivie par Héron. Avec la racine entière par défaut, soit a, il prend le nombre a_1, dont le produit avec a donne le nombre A dont la racine est à extraire. Entre ces deux nombres a et a_1, qui comprennent nécessairement la racine, il en intercale deux autres, b et b_1, qui sont la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique des deux premiers. D'ailleurs,

$$bb_1 = aa_1 = \mathrm{A},$$

et b, b_1 sont des limites plus approchées; l'opération peut se répéter indéfiniment et le procédé est tout à fait général.

Or, ce procédé remonte au moins à Archytas, qui l'a appliqué à la division des intervalles musicaux et a généralisé la notion de la moyenne harmonique, seulement ébauchée par les premiers pythagoriciens.

Quant à la détermination des limites de $\sqrt{3}$ choisies, sans explication, par Archimède pour son calcul des limites de π, je dirai que les ingénieuses conjectures de Hultsch ne m'ont point convaincu, et que je me demande si les séries auxquelles appartiennent ces nombres n'étaient pas connues dès avant Archimède.

M. Zeuthen a mentionné la série donnée par Théon de Smyrne :

$$\frac{1}{1},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{7}{5},\quad \frac{17}{12},\quad \ldots,\quad \frac{p}{q},\quad \frac{p+2q}{p+q},\quad \ldots$$

et qui donne la suite complète des solutions de l'équation

$$p^2 - 2q^2 = \mp 1.$$

Il reconnaît d'ailleurs que le troisième terme de cette série $\frac{7}{5}$ était connu de Platon.

Or la façon la plus simple de l'obtenir me paraît être la considération de deux limites comprenant la racine comme ci-dessus, à savoir $\frac{p}{q}$ et $\frac{2q}{p}$. Au lieu de former la moyenne arithmétique, comme dans le procédé héronien, on prendra comme termes intermédiaires $\frac{p+2q}{q+p}$ et $2\frac{q+p}{p+2q}$. S'il se trouve que $p^2 - 2q^2 = \pm 1$, le premier des deux rapports intermédiaires jouira de la même propriété avec le signe inverse; dès lors la considération des deux autres limites $\frac{2q}{p}$ et $2\frac{q+p}{p+2q}$, qui sont moins approchées, devient inutile.

Voilà un procédé qu'il n'y a aucun motif de ne pas faire remonter au moins à Archytas ou à Eudoxe, sinon plus haut, à savoir dès l'époque où l'on reconnut l'incommensurabilité de $\sqrt{2}$, à la suite de recherches numériques ayant peut-être beaucoup moins pour objet de satisfaire aux besoins de la pratique géométrique qu'aux exigences théoriques de la doctrine des intervalles musicaux.

Or le même procédé, appliqué à l'approximation de $\sqrt{3}$ à la simple condition de supprimer le facteur 2 lorsqu'il est commun aux deux termes des rapports, conduit immédiatement à la série

$$\frac{1}{1},\quad \frac{2}{1},\quad \frac{5}{3},\quad \frac{7}{4},\quad \frac{19}{11},\quad \frac{26}{15},\quad \ldots,\quad \frac{p}{q},\quad \frac{p+3q}{p+q},\quad +\ldots,$$

dont les termes satisfont alternativement aux deux formes de l'équation

$$p^2 - 3q^2 = \frac{-2}{+1}.$$

Ainsi, peut-être dès le ve siècle avant notre ère, on a pu presque machinalement, pour ainsi dire, établir la série dans laquelle Archimède n'aura eu qu'à choisir les termes donnant l'approximation dont il avait besoin.

Il est à remarquer que, pour les nombres n supérieurs à 3, le même procédé ne s'applique plus, en tant du moins qu'il ne conduit plus à une série satisfaisant à la condition de donner les valeurs minima de $p^2 - nq^2$, et celles-là seulement. C'est ce qui peut expliquer que les recherches dans cette voie n'aient pas été pour-

suivies. Le célèbre problème des bœufs, posé par Archimède, permet cependant de croire qu'il avait repris la question autrement et qu'il possédait une solution générale de l'équation de Pell, que, pour un motif ou un autre, il n'aura pas fait connaître.

Dans les remarques que je viens de faire, je le répète, il y a un élément conjectural dont je ne veux pas dissimuler l'importance. Mais la thèse de Hankel repose également sur des conjectures qui me semblent encore moins d'accord avec l'ensemble des faits certains, et le plus sûr est de reconnaître l'insuffisance des documents recueillis jusqu'à présent. PAUL TANNERY.

P.-S. — Dans une note (p. 208) que j'ai ajoutée à la traduction de M. Mascart et dont je suis responsable, on a imprimé par erreur *cappa* au lieu de *coppa*. C'est de cette dernière lettre grecque, qui ne fait pas partie de l'alphabet vulgaire, que dérive l'une des formes de l'abréviation du mot *arithmos* dans les manuscrits.

LARMOR (J.), M. A., F. R. S., Fellow of St-John's College, Cambridge. — AETHER AND MATTER. A development of the dynamical relations of the aether to material systems on the basis of the atomic constitution of matter, including a discussion of the influence of the Earth's motion on optical phenomena. In-8°, XXVIII-365 pages. Cambridge, University Press, 1900.

Il ne paraît plus permis, à l'heure actuelle, de nier la fécondité des théories telles que celle dont traite M. Larmor, je veux dire des théories qui reposent sur la conception moléculaire non seulement de la matière, mais encore de l'électricité; trop de phénomènes relevant des branches les plus différentes des sciences physico-chimiques ont conduit, dans ces dernières années, à cette notion de l'atome électrique.

Mais si le principe commun de ces théories moléculaires de l'électricité est généralement accepté, il est, par contre, singulièrement difficile de constituer ces théories en fait, d'assigner à ces atomes, à ces *électrons* dont on admet ainsi l'existence, les

propriétés qu'ils doivent posséder pour former par leur assemblage une matière et une électricité analogues à celles que nous connaissons. Ce n'est pas que de telles propriétés ne puissent exister, ou du moins on ne saurait, quant à présent, affirmer d'une façon absolue une telle impossibilité. La difficulté réside dans l'ampleur d'un pareil problème, qui embrasse, au fond, presque toute la Science. Si, en effet, M. Larmor prend soin de nous avertir que les théories atomiques de l'Électricité n'assument pas l'impossible tâche de régler, une fois pour toutes, l'ensemble des phénomènes physiques, il ajoute immédiatement qu'elles prétendent coordonner entre elles les explications qui ont été données de ces phénomènes; et il est clair, en fait, que leur raison d'être est d'aller beaucoup plus loin dans cette voie que les théories purement *mécaniques* [1].

Les faits mêmes qui ont conduit aux hypothèses électro-atomiques fournissent, par leur étude quantitative, une série de conditions auxquelles doivent satisfaire les lois élémentaires cherchées. Mais ces conditions ne sont ni les plus importantes ni les plus difficiles à réaliser; comme il est naturel pour des théories si profondément différentes des idées antérieures, ce sont les phénomènes les plus vulgaires et le plus anciennement connus (égalité de l'action et de la réaction, conductibilité, différence de potentiel au contact, etc.) qui serviront surtout de pierre de touche aux nouvelles doctrines.

Cependant, au nombre de ces données que nous fournit l'expérience courante, il est un fait général qui reste pour le moins aussi difficile à expliquer sous le point de vue mécanique que sous le point de vue moléculaire.

Les corps dont nous étudions les propriétés sont tous animés d'un mouvement commun, le mouvement de translation de la Terre. Comment cette translation reste-t-elle sans influence sur les phénomènes observés? En ce qui concerne les propriétés où la matière intervient, les propriétés mécaniques (au sens ordinaire du mot), la Dynamique classique n'est point embarrassée, puisque ses lois fondamentales ont été constituées exprès

---

[1] M. Larmor affecte cette dénomination à toutes les considérations relatives aux propriétés de la matière en bloc, à tout ce qui n'est pas *moléculaire*.

dans ce but. Mais la difficulté apparaît partout où intervient l'éther, comme en Électricité ou en Optique. Là, en effet, existe, en toute hypothèse, un mouvement *relatif,* celui des corps terrestres par rapport à l'éther interplanétaire, mouvement dont la vitesse v est grande et n'est pas absolument négligeable par rapport à la vitesse V de la lumière. Non seulement on ne voit, *a priori,* aucune raison pour qu'un tel mouvement relatif soit indifférent, mais, en fait, on sait qu'il ne l'est pas. Dans le cas de l'aberration, en effet, on a bien deux corps matériels en mouvement l'un par rapport à l'autre; mais, comme ces corps n'influent l'un sur l'autre que par l'intermédiaire de l'éther, il faut bien que leurs mouvements par rapport à ce dernier interviennent en quelque manière.

Seulement, cette condition, qu'il y ait mouvement *de la matière pondérable par rapport à la matière pondérable,* semble d'une nécessité absolue. Chaque fois qu'elle n'a pas été réalisée, les expérimentateurs ont toujours trouvé un effet nul, depuis Arago interposant un prisme de verre dans la lunette astronomique et comptant ainsi modifier l'aberration grâce à la propagation plus rapide de la lumière dans le solide, jusqu'à M. Mascart recherchant l'effet du mouvement terrestre sur la polarisation rotatoire du quartz. La réponse a encore été la même dans les expériences de MM. Michelson et Morley, dont la précision était suffisante pour mettre en évidence les effets de l'ordre de $\left(\frac{v}{V}\right)^2$, s'il en avait existé. Un seul cas a pu paraître un instant faire exception, celui de Fizeau et Angström (déplacement du plan de polarisation par passage à travers une pile de glace ou par diffraction); mais Fizeau lui-même considérait son observation comme extrêmement douteuse, tant les difficultés expérimentales et les causes d'erreur étaient nombreuses.

Comment concilier ces résultats négatifs avec le fait positif donné par le phénomène de l'aberration? Que l'on suppose l'éther fixe, même au passage des planètes, ou qu'on le croie entraîné avec elles; que l'on considère ce passage comme provoquant la formation de tourbillons ou comme ne la provoquant point, il semble que l'on arrive toujours à une contradiction d'un côté ou d'un autre. On comprend donc que, dans ces der-

nières années, M. Lorentz ait attribué une importance capitale à ces contradictions et cherché à les lever par l'intervention des électrons. C'est à elles, également, que s'attache cette fois M. Larmor, et c'est ainsi que l'Ouvrage consacré, dans la pensée primitive de l'auteur, à l'hypothèse électro-atomique est devenu principalement, mais non exclusivement, un traité sur les effets du mouvement terrestre, traité qui débute par l'exposition des difficultés dont nous venons de parler, l'histoire des idées qui ont été émises à leur sujet et des expériences instituées pour les vérifier.

Il s'agit ensuite (sect. II) de constituer une théorie du mouvement des électrons, d'où l'on déduira une électrodynamique à l'abri des objections précédentes. La méthode suivie par M. Larmor offre le grand avantage de ne point prendre pour point de départ les actions à distance. Le phénomène primordial sera la tension élastique de l'éther déformé. S'il n'y a ni molécules ni électrons, cette tension sera exclusivement de nature élastique et dépendra de la rotation moléculaire.

L'électron sera un point singulier de l'éther, point où les tensions deviendront infinies à la façon des dérivées de $\frac{1}{r}$. Ici, la théorie de M. Larmor cesse d'être, à proprement parler, électro-atomique. En effet, la présence de points singuliers de l'espèce indiquée ne permet plus de conserver sans modification les expressions pour les composantes de tension, de sorte qu'aux termes élastiques précédemment écrits il faut en ajouter d'autres dépendant du mouvement des électrons; les termes complémentaires ne sont pas calculés en chaque point : l'auteur n'écrit que leurs valeurs moyennes en fonction non du mouvement individuel des électrons, mais de leur mouvement moyen, autrement dit des composantes de courant telles qu'on les considère ordinairement.

Après le passage de l'électricité, les dérivées des composantes de tension retrouvent leurs expressions primitives, mais non les composantes elles-mêmes, lesquelles conservent indéfiniment un terme complémentaire.

Comme beaucoup de physiciens contemporains, M. Larmor, pour déduire de ses hypothèses fondamentales les équations différentielles des mouvements étudiés, emploie exclusivement le

principe de la moindre action, qui offre l'avantage de mener au résultat en partant des seules expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, sans entrer dans le détail des actions mutuelles. On peut toutefois se demander si cet avantage ne devient pas quelquefois un inconvénient. On voudrait, quoi qu'en dise l'auteur, suivre d'un peu plus près le mouvement des électrons, on voudrait s'expliquer comment le déplacement de ces points singuliers à travers l'éther élastique est possible, ce qui se conçoit véritablement assez mal.

Quoi qu'il en soit, on arrive par cette voie à des équations électrodynamiques qui, pour le cas des corps en repos, coïncident avec les équations de Maxwell, tout en en différant dans le cas du mouvement. Le rôle de la force d'induction magnétique est joué par la vitesse de l'éther. Le magnétisme est ailleurs considéré comme une apparence et remplacé par les courants particulaires d'Ampère.

Il est bon de noter que, dans certaines différentiations, on supprime les termes qui correspondent au mouvement de l'éther, et qui seraient du second ordre (puisqu'ils contiendraient, d'une part les dérivées partielles des quantités différentiées, d'autre part les composantes du mouvement de l'éther); autrement dit, considérant ce mouvement comme suffisamment lent, on réduit les équations à leur partie linéaire.

Quant aux molécules matérielles, elles n'existent pas, à proprement parler, pour M. Larmor. Une molécule n'est, en réalité, qu'un système d'électrons tournant les uns autour des autres. C'est cette rotation qui constitue le courant particulaire et, par conséquent, l'élément magnétique. L'existence d'un champ magnétique a pour effet : d'une part, d'orienter les orbites des électrons et, par conséquent, les courants particulaires, ce qui produit le magnétisme proprement dit; d'autre part, de contracter ces mêmes orbites dans une certaine proportion. Ce second effet, lorsqu'il prédomine, donnerait le diamagnétisme.

Ces notions fondamentales sont suivies d'un Chapitre, sans relation bien évidente avec elles, où sont exposées et discutées les vues récentes sur les propriétés des radiations : ce Chapitre termine la Section II.

Quel sera maintenant (Section III) l'effet d'un mouvement de

translation sur les phénomènes tels qu'ils se déduisent des hypothèses précédentes?

Tout d'abord, des considérations de symétrie conduisent l'auteur à affirmer *a priori* que les effets doivent être du second ordre par rapport à $\frac{v}{V}$, sauf peut-être dans les phénomènes (tels que la polarisation rotatoire) qui dépendent de l'orientation de l'espace, qui changent lorsqu'on remplace les différents corps que l'on considère par leurs images dans un miroir.

Entrant un peu plus dans le détail, l'auteur adopte l'hypothèse imaginée par M. Lorentz dans le but d'expliquer le résultat négatif des expériences de MM. Michelson et Morley, et d'après laquelle les solides animés d'un mouvement de translation de vitesse v subissent, dans le sens de ce mouvement, une contraction de l'ordre de $\left(\frac{v}{V}\right)^2$. Quelques pages sont employées à justifier cette hypothèse, si bizarre au premier abord.

D'autre part, on constate que, sur un corps en mouvement, les lois de la distribution électrique sont modifiées : la nouvelle distribution sera celle qui se présenterait sur un corps en repos et dont la forme se déduirait de celle du premier par un certain *allongement,* également de l'ordre de $\left(\frac{v}{V}\right)^2$. Cet allongement fictif vient précisément compenser $\left(\text{aux termes près du quatrième ordre en } \frac{v}{V}\right)$ la contraction réelle subie par le solide : de sorte que, en fin de compte, la distribution électrique reste sensiblement inaltérée.

Après avoir passé en revue les autres effets électriques importants, l'auteur arrive aux effets purement matériels, mécaniques de la convection. C'est à eux qu'il rattache la notion de masse : l'énergie des électrons est décomposée en deux parties dont l'une dépend de leurs changements de position *relatifs,* tandis que l'autre contient en facteur le carré de leur vitesse commune : c'est le coefficient de ce seul terme qui constitue la masse. L'inertie de la matière serait donc exclusivement de nature électrique.

Seulement, dans ce système, la gravitation et, particulièrement, le fait que celle-ci est proportionnelle aux masses ne semblent pas devoir trouver leur explication. L'auteur, de parti pris, ne s'arrête

pas à cette difficulté. Étant donné qu'on ne saurait attendre des théories moléculaires l'explication totale des phénomènes et que, par l'exemple, la cohésion des solides paraît leur échapper, il juge naturel que la gravitation soit dans le même cas.

Il faut maintenant examiner les cas, réservés jusqu'à présent, où il y a asymétrie, c'est-à-dire le phénomène de la polarisation rotatoire, que celle-ci soit d'ailleurs naturelle ou électromagnétique.

M. Larmor regarde la polarisation rotatoire comme un phénomène « dynamiquement secondaire et subordonné ». Mais il n'en reconnaît pas moins sa valeur comme moyen de vérification des théories électro-optiques, en raison de son extrême sensibilité qui lui permet de mettre en évidence des retards de propagation équivalant à de petites fractions de période.

Or on admet actuellement, d'après Lorentz, que ce phénomène donne précisément lieu à un désaccord entre l'expérience et la théorie, celle-ci conduisant à conclure que le mouvement terrestre devrait avoir une influence, tandis que les expériences de M. Mascart démontrent le contraire. C'est cette question qui est reprise ici (Section IV).

L'auteur commence par écrire en général les équations du phénomène, sans d'ailleurs faire intervenir tout d'abord les électrons et en prenant simplement pour base ce fait que la polarisation rotatoire est assurément liée à la présence, dans l'énergie électrodynamique, de termes contenant les *dérivées* de la force électrique : dérivées qui seront prises par rapport au temps s'il s'agit de la polarisation magnétique; par rapport aux coordonnées s'il s'agit de la polarisation naturelle.

Il indique rapidement ensuite comment, dans sa théorie, la polarisation rotative magnétique s'explique naturellement par l'orientation des orbites des électrons et traite, d'une manière indépendante, la polarisation rotatoire naturelle (en disant également un mot de la polarisation par réflexion magnétique).

Une analyse unique s'applique, par contre, aux deux cas lorsqu'il s'agit de rechercher l'influence de la translation. Elle aboutit à un résultat opposé à celui de Lorentz et conforme aux expériences de M. Mascart : concordance attribuée précisément à l'hypothèse précédemment faite que l'énergie des molécules

matérielles est exclusivement due à celle des électrons qui les composent.

La section V est consacrée aux rayons de Röntgen et aux radiations en général. On y trouve une nouvelle confirmation de l'hypothèse dont il vient d'être question, dans ce fait que les capacités d'absorption des différents corps pour les rayons de Röntgen varient comme leurs densités; et, d'autre part, des relations importantes entre les propriétés des électrons qui composent une même molécule. On constate, en effet, par un calcul analogue à ceux de la théorie des oscillateurs électriques, qu'un électron qui se meut est l'origine d'un certain ébranlement de l'éther et que, dans une molécule quelconque, il y aurait, par cette voie, dissipation continue d'énergie si les ébranlements dus aux différents électrons ne se compensaient pas. En particulier, le nombre de ces électrons doit être supérieur à deux dans une même molécule.

Une série d'appendices qui termine le volume mérite une mention spéciale. L'un d'eux (appendice D) a un but purement historique. Les trois suivants complètent sur plusieurs points les vues physiques exposées dans le corps de l'Ouvrage. Deux d'entre eux (C et F) sont, l'un une théorie des ions et de l'électrolyse, l'autre une théorie du phénomène de Zeemann. Dans l'appendice E, l'auteur cherche, à l'aide de comparaisons gyrostatiques si populaires chez les physiciens anglais depuis les travaux de Lord Kelvin, à nous donner une idée, idée bien lointaine et bien approximative, mais enfin à nous donner une idée de ce que peut être un électron.

Je n'entreprendrai pas ici d'examiner cette conception, non plus que d'énoncer un jugement sur les théories physiques résumées dans ce qui précède. On sait que plusieurs des difficultés qu'elles soulèvent ont été mises en évidence par M. Poincaré [1]. Je préfère dire un mot des vues plus mathématiques contenues dans les appendices A et B. Non que ces vues soient très développées; l'auteur a, d'une manière générale, délibérément écarté les considérations proprement analytiques de son Ouvrage. Celui-ci n'en est pas moins intéressant pour les mathématiciens,

---

[1] *Électricité et Optique*, deuxième Partie.

bien au contraire. Les théories qu'il contient sont liées à toute sorte de questions qu'il serait hautement intéressant de reprendre au point de vue analytique. On rencontrerait tout d'abord, bien entendu, les problèmes de calcul des probabilités auxquels donne lieu ce qu'on peut désigner, avec Maxwell et M. W. Gibbs, sous le nom de *Mécanique statistique*.

M. Larmor insiste plus particulièrement sur le caractère des approximations qui s'introduisent dans ces sortes de raisonnements. L'examen de ceux-ci vient évidemment à l'appui des idées émises par M. Klein, dans une de ses conférences de Chicago ([1]), sur la nécessité de ce qu'on pourrait appeler l'*analyse approchée*, c'est-à-dire d'une branche des Mathématiques dans laquelle toutes les données comporteraient un certain degré d'erreur.

Mais que pourra être cette analyse approchée? Des quelques pages consacrées par la Géométrie de Göttingue à cette question, on pourrait être tenté de tirer, quoique l'auteur ne l'ait pas expressément formulée, la conclusion qu'on pourrait, dans cette étude, renoncer aux difficultés de rigueur et aux excès de généralité qui ont été introduits dans l'analyse moderne.

Ainsi que j'ai eu l'occasion de le remarquer à propos d'une question particulière ([2]), le contraire peut être vrai : il est fort possible, sinon probable, que l'*analyse approchée* se voie forcée d'imiter les parties les plus délicates, les plus subtilement minutieuses de l'analyse rigoureuse. Pour prendre un exemple simple, envisageons cette double proposition :

Lorsqu'on sait qu'une fonction est finie et continue, on peut en conclure qu'elle a une intégrale, mais on ne peut rien affirmer sur l'existence de sa dérivée.

Cet énoncé fournit bien un type classique de ces scrupules, de ces *chinoiseries* de rigueur qu'on introduit bien à regret dans les Cours de calcul infinitésimal. Est-il possible, cependant, de méconnaître sa liaison avec le suivant :

Lorsqu'on connaît l'ordre de grandeur d'une fonction dans

([1]) Conférence VI, p. 46-48 de la traduction Laugel. Paris, Hermann; 1898.

([2]) *La théorie des plaques élastiques planes* (*Transactions of the American mathematical Society*, 1902).

un intervalle, on est renseigné sur l'ordre de grandeur de son intégrale, mais on ne sait rien sur celui de sa dérivée,

énoncé dont l'importance fondamentale, dans toutes les branches du calcul, et particulièrement dans les questions d'approximation qui nous occupent en ce moment, n'a pas besoin d'être démontrée.

Ce sont précisément des remarques analogues qui se présentent à M. Larmor lorsqu'il approfondit l'étude de la polarité magnétique ou électrique (appendice A). Là interviennent des fonctions *pratiquement* non dérivables, c'est-à-dire dont les dérivées existent, mais ont des valeurs très grandes et de signes variables; des intégrales définies *pratiquement* divergentes, etc.

L'appendice B traite des principes de la Mécanique. L'auteur, comme nous l'avons dit, donne le rôle principal au principe de la moindre action. Il ne s'arrête même pas à l'objection de Hertz, fondée sur l'existence de systèmes non holonomes (roulement et phénomènes analogues). Il écarte cette objection en répondant, encore une fois, que les phénomènes tels que le roulement sont étrangers à la Dynamique moléculaire. Il resterait à savoir si l'explication moléculaire qui rendrait compte de ces phénomènes pourrait satisfaire en même temps au principe de la moindre action.

J. Hadamard.

CZUBER (E.). — Probabilités et moyennes géométriques. Traduit de l'allemand par *H. Schuermans*. Préface de *Ch. Lagrange*. 1 vol. in-8°; 244 pages, 113 figures. Paris, Hermann, 1902.

Je reproduis ci-dessous, en partie, l'intéressante Préface que M. Ch. Lagrange, membre de l'Académie royale des Sciences de Belgique, a mise en tête du Livre de M. Czuber; elle en fera connaître l'esprit, mieux que je ne saurais faire.

« L'Ouvrage du Professeur E. Czuber, dont M. le capitaine Schuermans donne aujourd'hui la traduction, a pour objet principal de grouper, dans un cadre synthétique, la classe nombreuse

des problèmes de probabilités où intervient la notion de l'infini, c'est-à-dire ceux dans lesquels, sans pouvoir déterminer séparément les nombres de chances possibles et favorables, on peut en général, par un passage à la limite, trouver le rapport de ces nombres ou la probabilité cherchée.

» Ces questions ont pour type le célèbre et classique *problème de l'aiguille,* proposé et résolu déjà par Buffon, il y a plus d'un siècle, dans son *Essai d'Arithmétique morale.* Pour la plupart d'entre elles, ou bien les données sont d'ordre géométrique, ou les énoncés sont susceptibles de représentation géométrique. Ce caractère géométrique a attiré la pensée de l'auteur et dicté pour lui la définition du sujet et le titre du Livre. Fidèle à son argument, il examine successivement les problèmes qui se rapportent au point, à la droite et au plan. La portée de ces questions n'est d'ailleurs pas uniquement spéculative; comme presque partout ailleurs en probabilités, l'exploration métaphysique abstraite voisine avec la préoccupation d'une application concrète et utilitaire. Si l'on voulait de cela un exemple, il suffirait de mentionner l'application des probabilités par intégrales définies aux questions pratiques du tir.

» L'exposé didactique de la matière précédente ne constitue qu'une première Partie de l'Ouvrage. La seconde Partie n'expose pas des questions de probabilités proprement dites, mais elle traite d'une notion capitale en connexion intime avec leurs applications. Il s'agit de la *moyenne,* base des problèmes statistiques. On se propose ici la détermination d'une grandeur propre à représenter par un terme unique une collection donnée de grandeurs de même espèce. Ce n'est pas dans la *statistique* proprement dite seulement que cette question se présente avec un but utile; on la rencontrerait dans toutes les branches des sciences appliquées. Telles seraient, par exemple, en Physique ou en Astro-Physique, la détermination de l'intensité moyenne d'un rayonnement (lumineux ou autre) sur une surface, dans des conditions données; en Géodésie, la question de l'éloignement moyen de deux triangles, des points d'un triangle à un sommet, etc. Suivant l'ordre spécial de son sujet, c'est encore dans le domaine géométrique que l'auteur cherche et multiplie les exemples. En familiarisant l'esprit avec l'importante notion de la moyenne,

cette seconde Partie constitue une utile préparation à la théorie des erreurs [1]; à cette théorie touchait d'ailleurs déjà aussi, incidemment et par quelques problèmes, la première Partie.

» Nous observerons, en manière de parenthèse, que d'autres points, côtoyés ou même compris par le sujet, seraient dignes d'un développement plus étendu ou plus approfondi. Telle serait la question, ici fondamentale, de la représentation d'une collection de points par une surface. L'élucidation du paradoxe présenté par certains problèmes, qui semblent admettre pour la probabilité renseignée plusieurs solutions, gagnerait par l'usage systématique et l'énoncé explicite du principe fondamental de l'égale *possibilité* des chances, principe qu'il suffit de respecter dans chaque cas pour que ce prétendu paradoxe disparaisse de lui-même. De même on pourrait désirer pour quelques solutions l'emploi explicite du théorème de la probabilité totale, et la décomposition de celle-ci au moyen des probabilités des différentes *manières* et des probabilités de l'événement considéré *dans ces manières*.

» Pris en lui-même, l'Ouvrage actuel est essentiellement théorique. Pour défendre sa valeur pratique, redisons, comme déjà plus haut, qu'un point de vue inexact et très superficiel pourrait seul conduire à envisager le calcul des probabilités, même dans sa partie la plus abstraite, comme une sorte de hors-d'œuvre d'une portée et d'un intérêt purement spéculatifs : il est au contraire l'expression précise et nécessaire d'une science pratique, antérieure aux Traités didactiques et, comme d'autres sciences, imposée par la nature des choses. De tout temps les hommes ont fait des probabilités, tout comme ils ont fait de la Géométrie et de la Mécanique avant qu'il existât des livres de Géométrie et des traités de Mécanique rationnelle. C'est même, on peut le dire, ce *caractère humain* des probabilités qui, indépendamment de leurs applications pratiques et effectives, explique et justifie l'intérêt pédagogique de leur enseignement.... »

---

[1] M. le capitaine Schuermans a aussi entrepris et, à très peu près, terminé la traduction d'un autre Ouvrage du Professeur Czuber sur ce dernier sujet (*Theorie der Beobachtungsfehler*. Lepizig, 1891), particulièrement intéressant par l'exposé historique des différents essais relatifs a la théorie des erreurs. Il est fort à désirer que ce nouveau travail soit aussi publié.

Je ne veux ajouter que quelques mots : c'est tout d'abord justice que de louer l'intérêt du Livre de M. Czuber; les nombreux exemples qu'il développe sont vraiment instructifs et *amusants;* outre leur intérêt propre, ils constituent, pour la plupart, d'excellents exercices d'intégration. Quelques-uns de ces exemples sont accompagnés de renseignements historiques fort curieux. En particulier, les expériences dont le fameux problème de l'aiguille a été l'objet sont relatées avec détail.

Si l'auteur n'a pas insisté sur les définitions et les principes généraux, il convient toutefois de signaler les observations essentielles qu'il fait sur le choix des variables indépendantes, qui doit, dit-il, concorder avec l'interprétation du mot *arbitrairement*. C'est sans doute dans ce choix des variables indépendantes et des coordonnées qui permettent de les représenter, qu'il faut respecter ce « principe fondamental de l'égale possibilité des chances » dont M. Ch. Lagrange regrette de ne pas trouver dans le Livre de M. Czuber l'énoncé explicite; quelque lecteur regrettera sans doute, à son tour, que le savant géomètre belge n'ait pas lui-même formulé l'énoncé de ce principe, à la lumière duquel s'évanouissent les paradoxes. « Où le sens ne découle pas incontestablement des termes du problème, dit M. Czuber, il peut tojuours se discuter quelle interprétation correspond le mieux à la nature de la chose. » Sans doute, ce qui n'est pas incontestable peut être contesté, et peut-être, dans ces matières, faut-il parfois se contenter d'une *incontestable vraisemblance*. M. Czuber, par les nombreux exemples qu'il traite, semble s'être surtout proposé d'affiner l'intelligence de ses lecteurs et de leur donner, par l'habitude, cette acuité d'esprit qui permet de reconnaître que « le sens découle incontestablement des termes du problème ». Ce résultat, s'il est atteint, est l'essentiel pour ceux qui estiment que le sens du vrai importe encore plus que le sens de la rigueur.

M. Czuber, au début de son Livre, insiste sur l'impossibilité d'appliquer aux problèmes qu'il traite la définition ordinaire de la probabilité, qui suppose que l'on ait affaire à des « totalités discrètes de cas favorables et de cas possibles »; dans ces problèmes, c'est par des rapports d'intégrales (de longueurs, d'aires, de volumes, etc.) que la probabilité est évaluée ou définie. Si, par exemple, on donne dans un plan deux aires A, B, qui n'em-

piètent pas l'une sur l'autre, si l'on sait qu'un point est dans l'une ou l'autre de ces aires et si l'on regarde comme également probables les positions de ce point, n'importe où, dans l'une ou l'autre aire, on ne s'étonnera pas de voir prendre le rapport $\frac{A}{A+B}$ comme définition de la probabilité pour que le point soit situé dans l'aire A, et l'on conçoit que d'autres questions plus complexes puissent être ramenées au cas précédent, ou à d'autres analogues, par une assimilation plausible. Il est clair que, dans cette assimilation, c'est sur le choix des variables indépendantes, ou du système de coordonnées, que doit porter la critique. Si, par exemple, on veut avoir quelque idée de la probabilité pour qu'une équation du second degré, en u,

$$au^2 + bu + c = 0,$$

dont les coefficients sont arbitraires mais ne doivent pas, en valeur absolue, dépasser un nombre positif A, ait ses racines imaginaires, il paraîtra naturel de regarder les coefficients a, c, b comme les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point M, situé à l'intérieur d'un cube limité par les plans dont les équations sont

$$x = \pm A, \qquad y = \pm A, \qquad z = \pm A;$$

l'équation aura ses racines imaginaires si le point M est à l'intérieur du cône dont l'équation est $z^2 = 4xy$; on prendra alors pour mesure de la probabilité cherchée le rapport au volume du cube du volume intérieur à la fois au cône et au cube : on trouve ainsi, sans aucune peine, le nombre

$$\frac{31}{72} - \frac{\log 2}{12};$$

c'est à cela que revient au fond la solution donnée par M. H. M'Coll, que reproduit M. Czuber. Le nombre trouvé, comme on devait s'y attendre en raison de l'homogénéité, est indépendant de A; le résultat subsiste donc, comme le fait observer l'auteur, pour des valeurs infiniment grandes de A. Toutefois, il ne me semblerait pas légitime d'en conclure qu'on a la probabilité pour que l'équation $au^2 + bu + c = 0$, dont les coefficients sont entièrement arbitraires, ait ses racines imaginaires. L'image qui

a servi à définir cette probabilité, lorsqu'on supposait les coefficients limités, perd toute précision, et l'on n'a aucune idée du rapport à l'espace infini du volume d'un cône.

Je demande la permission de faire, à propos de la traduction, une observation qui n'a rien de spécial au travail de M. le capitaine Schuermans. On sent assez que celui-ci s'est efforcé d'être un traducteur fidèle, et l'on s'accorde d'ordinaire à regarder la fidélité comme le premier devoir d'un traducteur. Quand il s'agit de mathématiques, il me semble qu'on pourrait laisser de côté bien des scrupules et écrire librement dans la langue où l'on traduit, dès qu'on a bien compris l'auteur. On s'astreindrait, bien entendu, à une fidélité rigoureuse pour tout ce qui concerne les principes et les idées générales; mais, vraiment, lorsqu'il s'agit de développer des calculs ou des raisonnements géométriques, c'est, à ce qu'il me semble, se donner trop de peine que de vouloir suivre jusqu'au mouvement de la phrase d'un auteur, et je ne vois pas bien ce que le lecteur y gagne. J. T.

MÉLANGES.

SUR LES FONCTIONS DE GENRE INFINI

[Extrait d'une Lettre de M. Levi-Civita (à Padoue) à M. Borel (à Paris)].

J'avais lu, il y a déjà quelques semaines, votre Note *Sur les fonctions de genre infini* (¹). Ayant eu occasion d'y réfléchir un peu, je me suis aperçu que vos remarques, très simples d'ailleurs, peuvent être présentées d'une façon plus élémentaire encore.

Si vous le permettez, je vous entretiendrai quelques minutes à ce sujet.

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n, r_{n+1}, \ldots$ les modules (rangés par ordre croissant) des zéros d'une transcendante entière $f(z)$ (se réduisant

(¹) *Comptes rendus*, juin 1902.

à l'unité pour $z=0$); $r=|z|$, et $\mathfrak{J}(r)$ le nombre des zéros de $f(z)$, dont le module est plus petit que r.

On a par définition

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{J}(s)=1 & \text{pour} & r_1 < s \leqq r_2, \\ \mathfrak{J}(s)=2 & \text{pour} & r_2 < s \leqq r_3, \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \mathfrak{J}(s)=n-1 & \text{pour} & r_{n-1} < s \leqq r_n, \\ \mathfrak{J}(s)=n & \text{pour} & r_n < s \leqq r_{n+1}. \end{array}$$

D'après cela, en supposant $r_n < r \leqq r_{n+1}$, il vient de suite

$$\int_{r_1}^{r} \frac{\mathfrak{J}(s)}{s}\,ds = \sum_{1}^{n-1} k \log \frac{r_{k+1}}{r_k} + n \log \frac{r}{r_n} = \log \frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n}.$$

Or, d'après le théorème de M. Jensen, le second membre ne peut dépasser $\log M(r)$; par conséquent,

$$\log M(r) \geqq \int_{r_1}^{r} \frac{\mathfrak{J}(s)}{s}\,ds. \tag{1}$$

Au point de vue asymptotique, on peut naturellement remplacer $\mathfrak{J}$ par toute autre fonction $\chi(s)$ telle que $\lim\limits_{s=\infty} \frac{\mathfrak{J}(s)}{\chi(s)} = 1$.

Si je ne me trompe pas, il n'y a, *a priori,* aucune raison pour préférer votre fonction $\frac{\mathfrak{J}_1}{r} = \frac{1}{r}\int_{r_1}^{r} \mathfrak{J}(s)\,ds$ à $\int_{r_1}^{r} \frac{\mathfrak{J}(s)}{s}\,ds$, et l'on peut se contenter de l'inégalité (1), qui est valable en tout cas.

Au reste, en remarquant l'identité

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r-s}{s}\right)$$

et en posant

$$\varepsilon(r) = \int_{r_1}^{r} \frac{\mathfrak{J}(s)}{s}(r-s)\,ds,$$

il vient

$$\log M(r) \geqq \frac{1}{r}(\mathfrak{J}_1 + \varepsilon),$$

où, par la règle de l'Hospital,

$$\lim_{r=\infty} \frac{\varepsilon}{\mathfrak{J}_1} = \lim_{r=\infty} \frac{\int_{r_1}^{r} \frac{\mathfrak{J}(s)}{s}\,ds}{\mathfrak{J}(r)}.$$

Il suffit donc que $\int_{r_1}^{r} \frac{\mathfrak{I}(s)}{s} ds$ croisse moins vite que $\mathfrak{I}(r)$ (ce qui arrive notamment lorsque la croissance de $\mathfrak{I}(r)$ rentre dans le type exponentiel) pour que l'on ait votre inégalité asymptotique

$$\log M(r) > \frac{\mathfrak{I}_1}{r}.$$

Veuillez, etc. T. Levi-Civita.

23 juillet 1902.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Borel (E.). — *Leçons sur les séries divergentes.* In-8°, 112 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 4 fr. 50 c.

Brioschi (Fr.). — *Opere matematiche, pubblicate per cura del Comitato per le onorazione a Francesco Brioschi.* T. I, con ritratto di F. Br. In-4°, XI-416 p. Milano, Hoepli. 25 fr.

Cantor (M.). — *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* III. Bd. 2. Abthlg. Abschn. XVII (1700-1726). 2. Aufl. Gr. in-8°, avec 29 fig. Leipzig, Teubner. 6 m.

Hamilton (Sir W.-R.). — *Elements of quaternions.* 2e edit. par C.-J. Joly. Vol. 2, in-8°. London, Longmans. 21 sh.

Picard (E.). — *Traité d'Analyse.* 2e édit. T. I : *Intégrales simples et multiples; l'Équation de Laplace et ses applications, Développement en séries; Applications géométriques du calcul infinitésimal.* In-8°, XV-484 p. Paris, Gauthier-Villars. 16 fr.

Study (E.). — *Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften u. verwandte Gegenstände der Geometrie.* (In 2 Liefgn.) 1re liv. gr. in-8°, 240 p. avec fig. Leipzig, Teubner. 7 m. 60 pf.

Vogt (H.). — *Éléments de mathématiques supérieures, à l'usage*

des physiciens, chimistes et ingénieurs. In-8°, VII-619 p. avec fig. Paris, Nony et Cie.

MACH (E.). — *Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt.* 4. Aufl. XIV-550 p. avec 257 pl. Leipzig, Brockhaus. 8 m.; relié, 9 m.

BARBARIN (P.). — *Études de géométrie analytique non euclidienne.* In-8°, 168 p. avec fig. Bruxelles, Hayez. 2 fr.

BIANCHI (L.). — *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche.* In-8°. Pisa. Spoerri. 20 l.

CESÀRO (F.). — *Vorlesungen über natürliche Geometrie.* Deutsche Ausgabe von G. Kowalewski. Gr. in-8°, VIII-341 p. avec fig. Leipzig, Teubner. Relié, 12 m.

ENCYCLOPÄDIE *der mathematischen Wissenschaften m. Einschluss ihrer Anwendungen.* I Bd, 6. Heft. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 7 m. 20 pf.

— Bd IV (2), 1. Heft. Gr. in-8°. *Ibid.* 3 m. 80 pf.

FRICKE (R.). und F. KLEIN. — *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen.* II Bd. 1. Lfg. Gr. in-8°, 282 p. avec 34 fig. Leipzig, Teubner. 10 m.

KRONECKER (L.). — *Vorlesungen über Mathematik,* herausgeg. unter Mitwirkg. ein v. der königl. preuss. Akademie d. Wissensch. eingesetzten Kommission. In 2 Thln. 1. Thl. 1. Abschn. *Vorlesungen über Zahlentheorie.* I Bd. bearb. u. herausgeg. von K. Hensel. Gr. in-8°, XVI-509 p. avec 7 fig. Leipzig, Teubner. 18 m.

LEMAN (G.). — *Sur l'enseignement de l'analyse infinitésimale.* In-8°, 72 p. Gand, impr. Meyer-Van Loo. 1 fr.

NERNST (W.) und A. SCHÖNFLIES. — *Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung m. besond. Berücksichtigg. der Chemie.* 3. Aufl. Gr. in-8°, XII-340 p. avec 68 fig. München, Wolff. 10 m.; relié, 11 m. 50 pf.

PASQUIER (E.). — *Cours de Mécanique analytique.* T. I : *Vecteurs; Cinématique; Statique et Dynamique du Point.* In-8°, XXVII-358 p. Louvain, Uystpruyst. 10 fr.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ZAREMBA. — Sur l'équation $\Delta u + \xi u = 0$. (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1902.)

Dans un grand nombre de questions de Physique mathématique, au premier abord très différentes, on est conduit à des problèmes tels que celui-ci : déterminer une fonction u qui à l'intérieur d'un domaine D satisfasse à l'équation

$$\Delta u - \xi u = \varphi$$

(ξ est une constante donnée, φ une fonction donnée) et qui sur la surface S qui limite ce domaine satisfasse à des conditions aux limites telles que celles-ci

$$u = \psi,$$

ou

$$\frac{du}{dn} = \psi,$$

ou

$$u = h\frac{du}{dn}$$

(h étant une constante donnée, ou ψ une fonction donnée).

Tous ces problèmes sont étroitement apparentés les uns avec les autres. Dans le cas où φ et ξ sont nuls et où la condition aux limites est

$$u = \psi,$$

on retombe sur le célèbre problème de Dirichlet.

La plupart des méthodes proposées pour l'étude de ce problème sont moins des solutions que des démonstrations de la possibilité d'une solution. Il n'y a d'exception que pour la méthode de Neumann, qui conduit à un développement relativement simple. Mais, sous sa forme primitive, elle ne paraissait applicable qu'aux surfaces convexes, et l'on pouvait croire que cette restriction tenait à la nature même des choses.

Il y a quelques années, j'ai abordé le problème des vibrations

d'une membrane, problème caractérisé par les équations

$$\Delta u + \xi u = \varphi \qquad \text{(dans le domaine D)},$$
$$u = 0 \qquad \text{(sur la surface S)}.$$

En me servant d'une ingénieuse idée due à M. Schwarz, et en usant de différents autres artifices analytiques je suis arrivé à une solution complète du problème. Le fait saillant était le suivant : si φ est une fonction donnée, et si l'on fait varier le paramètre ξ, la fonction u est une fonction *méromorphe* de ξ dans tout le plan, et les pôles de cette fonction correspondent aux diverses vibrations propres de la membrane.

La même méthode était évidemment applicable, avec quelques modifications, à tous les problèmes analogues; j'ai donc cherché à l'appliquer à l'étude de la méthode de Neumann. J'ai généralisé le problème posé, de façon à introduire dans l'énoncé un paramètre arbitraire λ. La solution était encore une fonction méromorphe de λ, et l'étude de cette fonction méromorphe m'avait conduit à cette conclusion que la méthode de Neumann devenait légitime, *alors même que la surface envisagée n'était pas convexe.*

Ma démonstration avait encore néanmoins deux défauts :

1° Elle ne s'appliquait qu'aux surfaces *simplement connexes.*

2° Elle exigeait qu'on eût démontré préalablement le « principe de Dirichlet », c'est-à-dire la possibilité du problème (pour cela, il est vrai, les méthodes ne manquaient pas).

On pouvait prévoir cependant que ces restrictions n'étaient qu'artificielles et que d'autres chercheurs arriveraient à s'en affranchir.

Le problème de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \qquad \text{(dans D)},$$
$$u = \psi \qquad \text{(sur S)}$$

est intimement lié au suivant

$$\Delta u = 0 \qquad \text{(dans D)},$$
$$\frac{du}{dn} = \psi \qquad \text{(sur S)}.$$

Il est aisé de passer de la solution de l'un à celle de l'autre,

pourvu que cette solution ait été obtenue par la méthode de Neumann. C'est ce que Neumann avait fort bien vu.

Il est d'ailleurs possible de traiter le second de ces problèmes directement par une méthode analogue à celle de Neumann; c'est ce qu'a fait le regretté Robin, qui s'est servi d'un processus qui rappelle tout à fait celui de Neumann, mais où il fait jouer aux potentiels de simple couche le même rôle que le géomètre allemand attribuait aux potentiels de double couche.

Je reviendrai d'ailleurs avec plus de détails sur ces deux méthodes et sur leurs rapports mutuels, en analysant le Mémoire de M. Zaremba.

De la solution du problème de Dirichlet il est plus facile encore de déduire celle d'autres problèmes tels que celui-ci :

$$\begin{aligned} \Delta u &= \varphi \qquad (\text{dans D}), \\ u &= \psi \qquad (\text{sur S}). \end{aligned}$$

Jusqu'ici nous avons supposé $\xi = 0$. Mais le problème plus général

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta u + \xi u &= \varphi \qquad (\text{dans D}), \\ u\left(\text{ou } \frac{du}{dn}\right) &= \psi \qquad (\text{sur S}) \end{aligned} \right.$$

peut aussi être résolu quand on sait résoudre ceux dont nous venons de parler. Il suffit de faire une nouvelle application de la même méthode générale et de considérer u comme une fonction de ξ. On voit ainsi que cette fonction est encore méromorphe. On a alors à envisager le développement de cette fonction suivant les puissances croissantes de ξ. Pour calculer chacun des termes de ce développement il faut résoudre un problème de Dirichlet, ou un problème analogue, ce qui peut se faire, comme nous venons de le voir, par la méthode de Neumann et celle de Robin.

La solution du problème (A) se présente ainsi sous une forme fort compliquée, sous la forme d'une série double procédant d'une part suivant les puissances de ξ, de l'autre suivant celles du paramètre auxiliaire de la méthode de Neumann.

Ces considérations historiques étaient nécessaires pour faire comprendre quel était l'état de la question il y a quelques années et les progrès que devaient accomplir les chercheurs qui l'ont

abordée de nouveau dans ces derniers temps. Les principaux de ces chercheurs sont MM. Le Roy, Stekloff, Korn et Zaremba.

Arrivons maintenant à l'analyse du Mémoire de M. Zaremba. Un premier point caractéristique est le suivant. L'auteur aborde *directement* le problème

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u + \xi u = \varphi, \\ u\left(\text{ou } \dfrac{du}{dn}\right) = \psi. \end{array} \right.$$

Il a remarqué, en effet, que les méthodes de Neumann et de Robin, convenablement généralisées, peuvent nous fournir une solution immédiate de ce problème (A). Il suffit de substituer aux potentiels newtoniens, employés par Neumann et Robin, des *potentiels généralisés* pour lesquels l'attraction, au lieu de suivre la loi de Newton, varie comme la dérivée de la fonction

$$\frac{e^{-\mu r}}{r} \qquad (\text{où } \xi = -\mu^2,\ \mu > 0).$$

Le potentiel d'une masse 1 n'est plus alors $\frac{1}{r}$, mais $\frac{e^{-\mu r}}{r}$, où r désigne la distance du point attiré au point attirant.

Il est clair qu'un potentiel généralisé satisfera à l'équation

$$\Delta u - \mu^2 u = 0$$

qui remplacera l'équation de Laplace.

Remarquons, en passant, que ces potentiels généralisés ont été introduits pour la première fois par Kirchhoff, sous une forme un peu différente, dans sa théorie de la diffraction. M. C. Neumann en a fait usage, en 1896, pour étendre sa théorie au problème qui nous occupe, mais toujours en se bornant aux surfaces convexes.

En s'en servant à son tour, M. Zaremba réalisait un notable progrès, la solution du problème (A) ne se présentait plus sous la forme d'une série double, mais sous celle d'une série simple, ce qui était une sensible simplification. De plus, non seulement le problème (A) n'était pas plus difficile que celui de Dirichlet, mais, comme nous le verrons, on pouvait profiter de la possibilité de donner différentes valeurs au nombre $\xi = -\mu^2$, pour simplifier certains points de la démonstration.

D'un autre côté, M. Zaremba, au lieu de commencer par traiter le problème ($u = \psi$) par l'emploi de la méthode de Newmann et des potentiels de double couche, et d'en déduire celle du problème $\left(\frac{du}{dn} = \psi\right)$, préfère suivre la marche inverse. C'est donc le problème $\left(\frac{du}{dn} = \psi\right)$ qu'il résout d'abord par la méthode de Robin et les potentiels de simple couche.

Soient donc une surface fermée S, D le domaine intérieur, et D′ le domaine extérieur à cette surface. Voici les hypothèses que fait M. Zaremba sur S :

1° Elle a un plan tangent en chaque point;

2° L'angle de deux normales est plus petit que le produit d'une constante par la distance des pieds de ces normales;

3° Si O est un point de la surface et S′ l'ensemble des points de S dont la distance à O est inférieure à une certaine limite, une parallèle à la normale en O rencontrera S′ en un point au plus.

Le problème à résoudre est le suivant : trouver une fonction u satisfaisant aux conditions

$$(\mathrm{B})\quad \begin{cases} \left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \lambda\left[\left(\frac{du}{dN}\right)_e + \left(\frac{du}{dN}\right)_i\right] + \varphi & (\text{sur S}), \\ \Delta u - \mu^2 u = 0 & (\text{dans D et D}'), \end{cases}$$

et qui, en outre, bien entendu, se comporte régulièrement à l'infini.

On désigne par $\left(\frac{du}{dN}\right)_e$ et par $\left(\frac{du}{dN}\right)_i$ les dérivées de u prises, suivant la normale à la surface S, la première du côté externe, la seconde du côté interne.

On voit que, pour $\lambda = +1$, l'équation se réduit à

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = -\varphi,$$

de sorte qu'on est ramené au problème $\left(\frac{du}{dn} = \psi\right)$ pour le domaine intérieur D, tandis que, pour $\lambda = -1$, l'équation se réduit à

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_e = \varphi,$$

de sorte qu'on est ramené au problème $\left(\frac{du}{dn} = \psi\right)$ pour le domaine extérieur D'.

M. Zaremba développe la solution, suivant les puissances de λ, sous la forme

$$u = \sum u_k \lambda^k, \tag{1}$$

et il envisage, en outre, d'autres séries auxiliaires; posant

$$\sigma_0 = \psi,$$
$$2\sigma_k = \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_i,$$

il forme la série

$$2\pi\sigma = \sum \sigma_k \lambda^k. \tag{2}$$

On voit immédiatement que u_k est un potentiel généralisé de simple couche ayant pour densité σ_k, de sorte que chacun des termes de la série (1) s'obtiendra à l'aide d'un potentiel généralisé dont la densité ne dépendra que des termes précédents de la série.

Il forme ensuite les intégrales

$$I_{2k} = \int_S u_k^2\, ds,$$
$$W_{i+k} = \int_D \left(\sum \frac{du_i}{dx}\frac{du_k}{dx} + \mu^2 u_i u_k\right) dx\, dy\, dz,$$
$$W'_{i+k} = \int_{D'} \left(\sum \frac{du_i}{dx}\frac{du_k}{dx} + \mu^2 u_i u_k\right) dx\, dy\, dz.$$

La première intégrale est étendue à tous les éléments ds de la surface S, la seconde au domaine intérieur D, la troisième au domaine extérieur D'. Ce qui me permet d'écrire W_{i+k} et W'_{i+k} avec un *seul* indice $i+k$, c'est que ces intégrales, comme on le démontre aisément, ne dépendent que de la somme des deux indices i et k.

On a encore à envisager les deux séries

$$\sum \sqrt{I_{2k}}\, \lambda^k \tag{3}$$

et

$$(4) \qquad \sum (W'_k + W_k)\lambda^k.$$

La marche de la démonstration consiste à établir que les quatre séries (1), (2), (3), (4) ont même rayon de convergence (la convergence des deux premières étant d'ailleurs uniforme), et que ce rayon de convergence est au moins égal à 1 et même supérieur à 1, si certaines conditions sont remplies.

En ce qui concerne d'abord ce dernier point, on voit presque immédiatement que la suite

$$\frac{W'_{2k} + W_{2k}}{W'_{2k+2} + W_{2k+2}}$$

est constamment décroissante et au moins égale à 1. Elle tend donc vers une limite R^2 qui ne peut être inférieure à l'unité et qui n'est autre chose, comme le montre un raisonnement simple, que le carré du rayon de convergence de la série (4).

Supposons qu'on ait trouvé un nombre Θ_n tel que

$$(5) \qquad W_{2k} \leq \Theta_n W'_{2k}, \qquad W'_{2k} \leq \Theta_n W_{2k};$$

on montre aisément que

$$R^2 = \left(\frac{\Theta_n - 1}{\Theta_n - 1}\right)^2.$$

Ainsi R^2 sera plus grand que 1, pourvu qu'il existe un nombre Θ_n satisfaisant aux inégalités précédentes.

Pour démontrer l'existence de ce nombre je m'étais servi, dans mon Mémoire cité, d'une certaine transformation extrêmement générale, mais qui, cependant, ne s'appliquait qu'aux surfaces simplement connexes. C'était pour cette raison que ma démonstration n'était valable que pour ces surfaces.

M. Zaremba suit une tout autre voie. Il cherche à démontrer que u est une fonction méromorphe de λ. Pour cela, il suit la marche ordinaire, c'est-à-dire qu'il suppose que la fonction donnée φ contient n paramètres dont elle dépend linéairement, et il montre que l'on peut disposer de ces paramètres de façon que les inégalités (5) aient lieu, le nombre Θ_n étant d'autant plus voisin de 1 que n est plus grand.

Pour parvenir à ce résultat, voici l'artifice qu'il emploie : il remarque que la convergence des séries est assurée pourvu que le nombre μ soit assez grand; il compare ensuite la fonction u et les intégrales W à une autre fonction analogue qui ne diffère de u que par la substitution à μ d'un nombre caractéristique m plus grand que μ, et aux intégrales K formées avec cette fonction comme les intégrales W le sont avec u.

Si ce nombre m est convenablement choisi, la comparaison des intégrales K et W permet d'établir les inégalités (5).

On voit que, en généralisant le problème et en substituant à l'équation de Laplace l'équation plus générale

$$\Delta u - \mu^2 u = 0.$$

M. Zaremba, loin d'augmenter les difficultés, a rendu la solution plus facile.

Nous n'avons pas établi, il est vrai, que R est *toujours* plus grand que 1, mais seulement que R peut dépasser toute limite *si, la fonction φ dépendant de n paramètres, on dispose convenablement de ces paramètres.*

Mais nous verrons bientôt que cette restriction ne peut nous gêner.

La convergence de la série (4) entraîne celle de la série (3). On peut, en effet, établir une inégalité de la forme

$$(6) \qquad I_{2k} < L(W_{2k} + W'_{2k}),$$

où L est une constante ne dépendant que de la surface S.

Pour établir cette inégalité je m'étais toujours servi de la même transformation, ce qui m'obligeait encore à me restreindre aux surfaces simplement connexes.

M. Stekloff a trouvé une démonstration applicable à toutes les surfaces, sauf quelques restrictions; M. Zaremba a apporté encore un nouveau perfectionnement à la démonstration de M. Stekloff, de sorte qu'elle ne laisse plus rien à désirer sous le rapport de la généralité.

On a ensuite à faire voir que la convergence des séries (3) et (4) entraîne la convergence uniforme des séries (1) et (2). On remarque d'abord que ces séries (1) et (2) convergent et divergent en même temps. Si (2) converge, il en est de même de (1), cela

est évident; mais, pour établir rigoureusement la réciproque, M. Zaremba est obligé d'employer un artifice ingénieux analogue à celui dont nous avons parlé plus haut et qui consiste à comparer nos potentiels généralisés, où le nombre caractéristique est égal à μ, à d'autres potentiels généralisés auxiliaires où ce nombre est égal à $m > \mu$.

Cette difficulté ne se serait pas présentée dans la méthode de Neumann.

Il est clair que le rayon de convergence de (1) et (2) ne peut être supérieur ni à celui de (3), ni à celui de (4). Mais ce qu'il importe d'établir c'est qu'il ne peut être inférieur. Pour démontrer ce résultat j'avais été obligé de supposer que le principe de Dirichlet avait été préalablement démontré par une autre méthode. La démonstration de M. Zaremba est exempte de cet inconvénient. Cet auteur établit d'abord l'inégalité suivante :

$$(7) \qquad \delta_k < B_1 \rho\, \delta_{k-1} - B_2 \log\left(\frac{1}{\rho}\right) \sqrt{I_{2k-2}},$$

où δ_k représente le maximum de u_k, où B_1 et B_2 sont deux constantes dépendant uniquement de la surface S; l'inégalité a lieu pour toutes les valeurs de ρ comprises entre 0 et 1. Elle suffit évidemment pour démontrer le théorème énoncé.

Voici comment on parvient à l'inégalité (7). On trouve une relation entre les valeurs de u_k et de u_{k-1} sur la surface S. Soit M un point de S; considérons une couche attirante répandue sur cette surface et dont la densité soit $\frac{u_{k-1}}{2\pi}$. On voit que la valeur de u_k au point M est égale à la composante normale en ce point de l'attraction due à cette couche. La loi d'attraction est, bien entendu, la loi généralisée.

Décomposons maintenant la couche attirante en deux parties S′ et S″, où S′ sera une petite calotte entourant le point M et dont les dimensions linéaires sont de l'ordre de ρ. L'attraction de S′ nous donnera le premier terme du second membre de (e) et l'attraction de S″ nous donnera le second terme. Pour évaluer une limite supérieure de cette attraction de S″ il faut se servir de l'inégalité de Schwarz; mais cette inégalité conduirait à une limite supérieure infinie si le point A se trouvait sur S″ de telle façon que la dis-

tance r pût s'annuler. C'est pour cette raison qu'il a été nécessaire de décomposer la couche attirante en deux parties.

Cette manière de se tirer de cette difficulté et la façon dont M. Zaremba se sert de l'inégalité (7) méritent de fixer l'attention; car cet exemple pourrait être avantageusement imité dans des cas analogues.

Il résulte aisément de tout cela :

1° Que u est une fonction méromorphe de λ dans tout le plan. (Il suffit, en effet, de se rappeler que, si φ dépend linéairement de n paramètres, on peut disposer de ces paramètres de façon que R soit plus grand qu'une certaine limite, qui croît indéfiniment avec n, et d'appliquer ensuite à ce problème la méthode que j'ai employée dans mon Mémoire des *Rendiconti*.)

2° Que u est un potentiel généralisé de simple couche, la densité de la matière attirante étant égale à

$$\sigma = \frac{1}{2\pi}\sum \sigma_k \lambda^k.$$

Si nous considérons le résidu de cette fonction méromorphe relatif à un pôle quelconque, ce résidu sera évidemment un potentiel généralisé de simple couche dont la densité sera égale au résidu correspondant de la fonction σ. De plus, ce résidu devra satisfaire à des équations de même forme que (B), mais où la fonction φ devra être nulle.

Or il est aisé d'établir :

1° Qu'il n'existe pas de fonction satisfaisant à ces équations (où $\varphi = 0$) si λ est imaginaire; ni si $|\lambda| < 1$; ni si $\lambda = -1$; ni si $\lambda = 1$ et $\mu > 0$.

Nous n'aurons donc ni pôle imaginaire, ni pôle à l'intérieur du cercle de rayon 1, ni pôle sur la circonférence de ce cercle pour $\mu > 0$. Donc, si $\mu > 0$, le rayon de convergence R de nos séries sera plus grand que 1; nous pourrons donc faire dans nos séries $\lambda = \pm 1$, ce qui nous donnera la solution du problème

$$\left(\frac{du}{dn} = \psi\right).$$

Si $\mu = 0$, le pôle $\lambda = 1$ peut exister et, pour que la méthode soit applicable, il faut que le résidu correspondant soit nul, ce qui s'écrit

$$\int \varphi \, ds = 0; \tag{8}$$

c'est là une condition à laquelle toutes les méthodes conduisent : on sait, en effet, que le problème $\left(\frac{du}{dn} = \psi\right)$ n'est possible pour le domaine intérieur D que si

$$\int \frac{du}{dn} \, ds = 0,$$

ce qui n'est autre chose que la condition (8).

Voyons cependant comment on pourrait résoudre le problème $\left(\frac{du}{dn} = \psi\right)$ pour le domaine extérieur D′ quand la condition (8) n'est pas remplie.

Nous trouverons alors

$$u = \frac{P}{\lambda - 1} + w,$$

où w est une fonction méromorphe ayant tous ses pôles extérieurs au cercle de rayon 1; le résidu P est alors le potentiel d'une couche électrique en équilibre sur la surface S supposée conductrice. (La loi d'attraction est d'ailleurs redevenue la loi newtonienne puisque $\mu = 0$.)

Pour $\lambda = -1$ on trouve alors

$$u = w - \frac{P}{2}.$$

La série w converge pour $\lambda = -1$; quant à P, on peut le calculer par la méthode de Robin, que les considérations précédentes justifient complètement. On voit comment, par une application ingénieuse de la méthode des *Rendiconti,* M. Zaremba échappe aux difficultés qu'il aurait rencontrées s'il avait voulu démontrer directement que R est généralement plus grand que 1.

Il faut enfin passer du problème $\left(\frac{du}{dn} = \psi\right)$ au problème $(u = \varphi)$ de façon à justifier la méthode de Neumann et le principe de

Dirichlet. M. Zaremba montre qu'on passe facilement de l'un à l'autre. Dans le problème de Neumann, il s'agit en effet de trouver un potentiel généralisé de double couche satisfaisant à la condition

$$(v)_i - (v)_e = \lambda[(v)_i - (v)_e] + 2\varphi.$$

Dans le problème que nous venons de résoudre il fallait trouver un potentiel généralisé de simple couche satisfaisant à la condition

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \lambda\left[\left(\frac{du}{dN}\right)_e + \left(\frac{du}{dN}\right)_i\right] + 2\psi.$$

Il suffit, pour passer de l'un à l'autre, de prendre

$$v = \frac{\lambda u - v_0}{1 - \lambda} \qquad (\text{dans } D),$$

$$v = \frac{\lambda u - v_0}{1 + \lambda} \qquad (\text{dans } D')$$

et

$$\psi = \frac{dv_0}{dN},$$

v_0 étant le potentiel d'une double couche dont la densité est $\frac{\varphi}{2\pi}$.

Cela suppose, il est vrai, que la dérivée $\frac{dv_0}{dN}$ existe. Je n'indiquerai pas ici l'artifice grâce auquel M. Zaremba ramène le cas général à celui où cette dérivée existe.

Dans tous les cas, la méthode de Neumann et le principe de Dirichlet se trouvent entièrement justifiés.

On voit quelle est la généralité du résultat obtenu par M. Zaremba. Les surfaces auxquelles le principe s'applique n'ont pas besoin d'être simplement connexes. Les conditions imposées à la surface S sont extrêmement larges. Elles sont remplies par toutes les surfaces analytiques, et même par les surfaces composées de plusieurs morceaux analytiques, pourvu qu'en un point commun à deux ou plusieurs morceaux le plan tangent à tous ces morceaux soit le même.

La généralisation qui résulte de l'introduction du terme

$$\xi u = -\mu^2 u$$

a contribué à simplifier la démonstration, de sorte que cette dé-

monstration semble avoir atteint sa forme définitive et qu'il n'y sera sans doute plus apporté que des modifications de détail.

Il importe toutefois de faire la part de chacun; car le résultat n'a été obtenu que par étapes successives et avec le concours de plusieurs travailleurs. Un court aperçu historique est donc nécessaire. J'ai expliqué plus haut ce qu'il restait à faire quand j'ai abandonné la question. J'avais fait usage d'une certaine transformation T qui m'obligeait à me restreindre à des surfaces simplement connexes, il fallait rendre inutile cette transformation T de façon à pouvoir envisager une surface quelconque. J'avais supposé le principe de Dirichlet préalablement démontré, il fallait s'affranchir de cette nécessité; enfin, j'avais, sans tenter une démonstration et en me contentant d'un de ces aperçus qui suffisent au physicien sans contenter l'analyste, montré l'existence et l'importance probables de certaines fonctions que j'appelais *fondamentales* et qui comprenaient les fonctions sphériques et les fonctions de Lamé comme cas particuliers.

On chercha d'abord à se servir de ces fonctions fondamentales pour arriver à combler les lacunes qui subsistaient encore, mais on n'obtint ainsi que des résultats très incomplets.

M. Le Roy (*Annales de l'École Normale*, 1898) introduisit des fonctions analogues et en établit rigoureusement l'existence, mais elles ne contenaient pas les fonctions fondamentales comme cas particuliers, de sorte que les intéressants résultats qu'il avait obtenus et qui étaient si utiles dans divers problèmes de Physique mathématique n'étaient pas directement applicables au problème de Dirichlet.

Dans la suite MM. Liapounoff, Tauber et Stekloff approfondirent la nature des liens qui rattachent la méthode de Robin à celle de Neumann.

En 1899, M. Korn publie son Ouvrage *Lehrbuch der Potentialtheorie,* où il démontre la légitimité de la méthode de Robin et de celle de Neumann *sans supposer le principe de Dirichlet préalablement démontré*. C'était là un progrès très considérable qui était d'ailleurs réalisé presque en même temps et indépendamment par M. Stekloff (*Annales de la Faculté de Toulouse,* 1900). Ce savant, qui avait d'abord fait des tentatives dans le même sens que M. Le Roy, n'a pas besoin non plus de s'appuyer

sur une démonstration préalable du principe de Dirichlet. De plus, il imagine un théorème qui affranchit une des parties de la démonstration de la considération de la transformation T.

Ces deux auteurs supposent que la fonction Φ, qui définit les valeurs du potentiel sur la surface limite, a des dérivées premières continues. Mais, en 1901, M. Korn (*Abhandlungen zur Potentialtheorie*) fait un pas de plus, et il suppose seulement que cette fonction Φ elle-même est continue, sauf le long de certaines lignes.

C'est M. Zaremba le premier qui s'est affranchi de la transformation T, ce qui lui a permis d'envisager une surface de connexion quelconque et qui a établi rigoureusement l'existence des fonctions fondamentales. Il a ensuite étendu les résultats à l'équation $\Delta u + \xi u = 0$ (*Bulletin de l'Académie de Cracovie* et *Comptes rendus*, 1901). Il avait donc réussi à combler définitivement les trois lacunes que nous avions signalées plus haut.

Peu après, M. Korn (*Abhandlungen zur Potentialtheorie*, 5) retrouve et développe quelques-uns des résultats précédents de M. Zaremba et étudie, par une méthode dont le principe se trouve déjà dans un travail antérieur de M. Stekloff, le problème du développement d'une fonction arbitraire en série procédant suivant les fonctions fondamentales.

Nous arrivons ainsi au Mémoire que nous analysons ici. Ce n'est en un sens que le développement des deux Notes succinctes que nous avons citées plus haut et qui avaient paru en 1901. Cependant de nombreux perfectionnements de détail ont été introduits et, comme nous l'avons vu, en envisageant l'équation plus générale $\Delta u + \xi u = 0$, bien des points de la démonstration relative à l'équation de Laplace se sont trouvés simplifiés.

Ces détails historiques étaient indispensables pour faire comprendre la place exacte qu'occupe le Mémoire de M. Zaremba dans l'histoire du développement de cette partie de la Science.

POINCARÉ.

BARDEY (E.) — Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Fünfte Auflage bearbeitet von *F. Pietzker*. 1 vol. in-8°; XIII-402 pages. Leipzig, Teubner, 1902.

Ce livre, dont la première édition remonte à 1868, est sans doute populaire dans les gymnases allemands et l'on peut le recommander aux professeurs et aux élèves de nos lycées qui sont en quête d'exercices. Il en contient plus d'un millier, et dans ces mille exercices il y en a beaucoup qui se subdivisent en un assez grand nombre de questions spéciales.

Tous ces exercices se rapportent à des équations ou à des systèmes d'équations qui se résolvent par radicaux et, le plus souvent, par des radicaux du second degré. Ils sont gradués et groupés avec soin ; ils sont suivis non seulement des résultats, mais encore d'indications très suffisantes pour retrouver rapidement la solution ; l'auteur y a même joint, à l'occasion, des observations générales qui peuvent être très utiles. Je dois ajouter que la plupart de ces exercices m'ont paru fort bien choisis, vraiment intéressants et instructifs par la nature des calculs auxquels ils conduisent, par les réductions et les simplifications qui se rencontrent dans ces calculs, et par l'élégance des résultats. C'est un livre dont je me suis servi il y a longtemps, et je suis bien aise que cette cinquième édition, améliorée sur divers points par M. Pietzker, me donne l'occasion de dire ici tout le bien que j'en pense.

C'est à ceux qui veulent acquérir l'art de manier le calcul, de triturer les équations, de bien choisir les inconnues auxiliaires, de profiter des circonstances qui se présentent, de tel ou tel genre de symétrie, etc., que ce livre s'adresse. Cet art-là n'est pas méprisable ; il est amusant à acquérir, et il me semble qu'on l'a par trop sacrifié, chez nous, aux discussions minutieuses et approfondies. Celles-ci, d'ailleurs, ont aussi leur mérite, et personne ne conteste qu'elles servent à développer les qualités d'ordre, de méthode, de soin, je dirais presque de conscience, si ce mot n'était pas bien gros. Le talent du maître est surtout dans la mesure. Au reste, le livre de Bardey peut encore rendre de grands

services par les choses même qui y manquent, par l'effort que devra faire le lecteur pour discuter et critiquer les solutions qu'on y trouve; sur bien des points le nouvel éditeur a facilité cet effort.

Les équations sont toutes posées; dans quelques cas, on en indique l'origine. C'est donc, encore une fois, l'art du calculateur que le livre de Bardey peut servir à développer. Il n'y est point question de la *mise en équation;* peut-être l'auteur a-t-il pensé que les conseils ou les exemples que l'on peut donner sur ce sujet sont plutôt l'affaire de l'enseignement oral; peut-être a-t-il désiré faire œuvre systématique et ne *tenir qu'une spécialité;* peut-être a-t-il craint de grossir démesurément son volume. Quoi qu'il en soit, il y a là un sujet intéressant, qui pourrait tenter quelqu'un de ces professeurs consciencieux et modestes qui ont le goût de leur métier et de leur science, qui savent observer leurs élèves, reconnaître les difficultés qui les arrêtent, qui démêlent la raison de ces difficultés et trouvent les moyens de les aplanir.

PERRY (J.). — Höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von *R. Fricke* und *F. Süchting*, mit 166 in den Text gedrückten Figuren. 1 vol. in-8°; VIII-423 pages. Leipzig und Berlin, Teubner, 1902.

Ce livre est fort intéressant et original. Il ne manque pas de traités de Mathématiques qui, d'après le titre et même d'après les intentions des auteurs, sont écrits pour les techniciens, et parmi ces livres on en trouve bon nombre que l'on a grand'peine à distinguer de ceux qui sont écrits pour tout le monde : ce n'est pas le cas ici; non seulement le livre de M. Perry est fait pour les techniciens, mais il n'est fait que pour eux, il ne peut être compris que par eux; ce livre-là parle le langage de ses lecteurs, ne leur dit que ce qu'il faut, et montre plus qu'il ne dit. Non seulement tous les exemples sont pris dans les arts, et dans les arts les plus divers, la mécanique, la physique appliquée, l'architecture, l'électricité, etc., mais les explications théoriques ne semblent données qu'en vue des applications. Inutile de dire qu'elles sont réduites à ce qui est indispensable, présentées sous la

forme la plus concrète. M. Perry répète à ses lecteurs que « cela n'est pas difficile », qu'on n'a pas besoin, dans les applications usuelles, des parties difficiles des Mathématiques; il le leur prouve d'une façon qui peut donner à penser aux professeurs de Mathématiques. Ajoutons qu'il est de belle humeur, qu'il écrit d'une façon alerte et gaie qui n'est point la manière habituelle des auteurs de traités de calcul; voici quelques lignes prises au commencement de son livre, et qui suivent les explications relatives à la représentation d'une quantité variable au moyen d'une courbe :

« J'ai lu jadis un article très savant sur la façon dont la population, le bien-être et les impôts ont augmenté en Angleterre. L'exposition était difficile à suivre. En prenant les nombres de l'auteur, en les représentant graphiquement sur du papier quadrillé, chacun des résultats qu'il avait déduits, non sans peine, devenait si visible sur les courbes, qu'un enfant aurait pu le comprendre. C'est peut-être la raison pour laquelle plusieurs auteurs ne publient pas de courbes : ils n'auraient plus rien à dire. »

Les traits de cette nature fourmillent.

Quelle est la place d'un pareil livre dans l'enseignement des Mathématiques et quels services peut-il rendre? — Il serait bien inutile de le recommander à ceux qui ne veulent rien sacrifier ni de la rigueur dans l'exposition, ni de la valeur de cette exposition dans la formation intellectuelle des étudiants. Quelques-uns, bien qu'ils prisent très haut l'un et l'autre, estiment qu'il est pourtant permis d'enseigner les Mathématiques en vue de leur utilité pratique, et seulement en vue de cette utilité; il y a des gens pressés, dans le monde, qui ont besoin d'apprendre très vite un métier et de faire ce métier; ces gens-là ont leurs droits, d'autant plus qu'on ne saurait se passer d'eux, et c'est, en quelque sorte, d'un enseignement *primaire* des Mathématiques supérieures qu'ils ont besoin. C'est à ce besoin que répondent les explications théoriques que l'on trouve dans le livre de M. Perry.

Maintenant, on doit reconnaître qu'il ne peut être entièrement compris que par des étudiants dont le cours d'études est organisé d'après des principes qui ne prévalent pas habituellement. — Ils prévalent sans doute au *Royal College of Sciences* de Londres, où enseigne M. Perry. — J'ai déjà dit que toutes les applications

sont tirées des sciences appliquées et ne peuvent donc être saisies que par ceux qui possèdent les éléments de ces sciences ; il paraît *logique* de n'enseigner ces sciences appliquées qu'à des étudiants qui sauraient déjà, en fait de Mathématiques, précisément ce que le livre de M. Perry est destiné à enseigner. On sait assez que, en matière d'enseignement, la *logique* n'est pas tout et qu'il est bon de mettre en contact avec les réalités pratiques ceux qui doivent passer leur vie au milieu de ces réalités ; il est clair que, sous ce rapport, les habitudes de notre pays et l'interminable initiation théorique que l'on y exige des futurs ingénieurs sont déplorables. Le *plan d'études* que suppose le livre de M. Perry serait toutefois fort curieux à connaître.

L'inconvénient que je signale ne pouvait manquer de frapper les savants traducteurs allemands ; ceux-ci, en tête de leur traduction, ont mis une très intéressante préface, dans laquelle ils s'expliquent sur ce point et sur beaucoup d'autres. Ils ne voient pas d'inconvénient à ce que les lecteurs de cette *Höhere Analysis für Ingenieure* laissent de côté les applications qu'ils ne sont pas en mesure de comprendre ; ils y reviendront plus tard, voilà tout. Il est vrai de dire que ces explications sont assez nombreuses et variées pour que chacun, au point où il en est, soit sûr d'en rencontrer quelqu'une dont il puisse profiter, et qui suffise à illustrer la théorie qu'il apprend. Le livre de M. Perry doit rester entre les mains des étudiants pendant tout le temps qu'ils passeront à l'école technique ; ils doivent le lire et le relire ; ils l'emporteront et le garderont, c'est-à-dire qu'ils y auront recours plus tard, quand ils seront ingénieurs, s'ils ont oublié quelque règle, quelque formule ou quelque démonstration ; et précisément parce que ce livre parle leur langage, qu'il est bourré d'exemples qui, maintenant, leur sont familiers, il ne leur sera jamais un livre étranger, comme le deviendrait, malgré tout, au milieu de leurs préoccupations, un livre de pures Mathématiques. C'est là, après tout, une conception fort raisonnable et que la qualité de l'Ouvrage justifie d'ailleurs.

Il va de soi que cet Ouvrage sera consulté utilement autre part que dans les écoles techniques anglaises ou allemandes. C'est la multiplicité et la variété des exemples qui, partout, le rendra précieux. L'auteur parle quelque part, avec cette *humour* qui lui est familière, de la gaucherie des meilleurs étudiants en Mathéma-

tiques, lorsqu'ils sont en face d'un problème concret : ils ne savent plus que faire de leurs équations et de leurs courbes, si les unes ou les autres représentent quelque chose. Je crois bien qu'il n'y a pas un professeur de Physique qui n'ait fait cette observation.

Les étudiants doivent lutter contre cette incapacité, et leurs maîtres, même lorsqu'ils donnent un enseignement théorique, doivent les y aider : aux uns et aux autres le livre de M. Perry peut être d'un grand secours.

PASCAL (E.) — Repertorium der höheren Mathematick (Definitionen, Formeln, Theoreme, Literatur). Autorisirte deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals von *A. Shepp*. Analysis und Geometrie. II. Theil : die Geometrie, 1 vol. gr. in-18; IX-712 pages. Teubner, 1902.

Nous avons déjà eu l'occasion d'annoncer dans le *Bulletin* les deux volumes du *Repertorio di Matematiche superiori* de M. E. Pascal, et la traduction allemande du premier volume, consacré à l'Analyse. La traduction de la Géométrie paraît à la librairie Teubner : M. E. Pascal, M. F. Engel, M. A. Lœwy ont amélioré le texte sur plusieurs points. Signalons en particulier les additions et corrections réunies à la fin du livre et qui se rapportent tant au premier volume qu'au second. Il est inutile de revenir sur les services que peut rendre la publication de M. Pascal, qui est éminemment commode et pratique.

COMBEBIAC (Gaston), Capitaine du Génie. — Calcul des Triquaternions (Thèse de Doctorat. Faculté des Sciences de Paris). 1 vol. in-4° de 122 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

M. Combebiac s'est proposé d'établir une analyse géométrique se passant de tout système de référence.

On sait que les formules d'Olinde Rodrigues suffisent pour mettre en évidence les rapports existant entre les rotations autour d'un point fixe et les quaternions d'Hamilton.

En cherchant un système de quantités complexes qui s'interprètent géométriquement par le déplacement général d'un solide dans l'espace, on a été amené à imaginer les biquaternions. Mais la superposition des deux ordres d'idées n'est pas parfaite, en ce sens qu'un déplacement comporte six paramètres et un biquaternion, huit, ce qui fait qu'une double infinité de biquaternions se trouve correspondre à un déplacement donné.

M. Combebiac, en vue d'aboutir à un système de quantités complexes qui mettent directement en jeu les éléments simples de la géométrie de l'espace, points, plans et droites, s'est proposé de rechercher un système de quantités complexes qui corresponde géométriquement au groupe des transformations par similitude. De cette façon, les symétries par rapport aux points, plans ou droites de l'espace seront comprises dans ce groupe et mettront en évidence chacune un point, un plan ou une droite suivant le cas. La quantité complexe correspondante représentera alors l'un de ces trois éléments. Pour arriver à ce système de quantités complexes répondant à son objet, l'auteur observe qu'il doit comprendre les quaternions comme cas particuliers. En effet, le groupe des similitudes comprend le sous-groupe des rotations ; or les quaternions correspondent à ce dernier.

Mais il se trouve alors que, d'après un théorème précédent de M. Scheffers, tout système quaternionien est de la forme

$$q + \omega_1 q_1 + \omega_2 q_2 + \ldots + \omega_n q_n,$$

où q, q_1, q_2, ..., q_n, sont des quaternions ordinaires et $(1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, les unités d'un système de quantités complexes.

C'est ainsi que les biquaternions offrent le premier échelon

$$q + \omega_1 q_1.$$

Ces systèmes ont déjà été étudiés par d'autres géomètres. Les triquaternions viennent ensuite

$$q + \omega_1 q_1 + \omega_2 q_2.$$

Le système est complètement défini, comme on sait, sur les expressions de ω^2, μ^2, $\omega\mu$, $\mu\omega$ en fonction de ω et μ.

Des considérations géométriques directes, fondées sur une

remarque faite par M. Study sur les biquaternions, amènent l'auteur à faire le choix suivant :

$$\omega^2 = 0, \qquad \mu^2 = 1, \qquad \omega\mu = \omega, \qquad \mu\omega = \omega.$$

Le système ainsi défini comporte douze paramètres et se prête avec élégance aux représentations géométriques que l'auteur avait en vue.

Après une introduction où M. Combebiac rappelle les principes de la théorie des quaternions, qui lui sert de point de départ, il aborde dans le premier Chapitre les principes fondamentaux du calcul des triquaternions : Inverse d'un triquaternion, transformations par similitude, éléments linéaires.

Le second Chapitre est consacré à l'application des triquaternions au mouvement des systèmes indéformables en général. L'auteur y examine en particulier l'équilibre et le mouvement continu d'un corps solide.

Les troisième et quatrième Chapitres sont consacrés à des applications géométriques du calcul des triquaternions aux complexes linéaires et aux surfaces du second degré. L'auteur montre l'efficacité du calcul des triquaternions, employé comme analyse géométrique pour l'établissement des propriétés élémentaires des quadriques. E. E.

MÉLANGES.

SUR CERTAINES SURFACES MINIMA;

PAR M. HADAMARD.

Dans un travail précédent [1], j'ai étudié les géodésiques des surfaces à courbures opposées, et constaté l'influence prépondé-

[1] *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques* (*Journal de M. Jordan*, 5e série, t. IV, 1898, p. 27 et suiv.).

rante que jouait dans cette étude le mode de connexion de la surface. Il y a, dès lors, un certain intérêt à former des surfaces à courbure négative présentant une connexion plus ou moins compliquée.

Je me suis demandé si les surfaces minima ne fourniraient pas des exemples intéressants à cet égard, la condition de courbure négative étant remplie d'elle-même.

Considérons, par exemple, une surface minima algébrique définie [dans le système de notations de M. Darboux (¹)] par une fonction $f(u)$ algébrique. Celle-ci sera liée à une certaine surface de Riemann T, définie par une équation algébrique entière

$$\varphi(u, v) = 0, \tag{1}$$

$f(u)$ étant égal à une fonction rationnelle de u et de v.

Il est clair que le genre de la surface minima ne sera autre que celui de la surface de Riemann. Mais, pour obtenir l'ordre de connexion, il faudra tenir compte, non seulement de ce genre, mais des bords ou nappes infinies (²). Celles-ci correspondent aux valeurs de u pour lesquelles les expressions des coordonnées (³) sont infinies.

Les surfaces algébriques donneraient donc une solution assez générale du problème, si elles ne présentaient pas de points singuliers à distance finie. Malheureusement, c'est le contraire qui a lieu en général. L'élément linéaire de la surface est, en effet (⁴),

$$ds^2 = \mathcal{F}(u)\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du\,du_1(1 + uu_1)^2 = (1 + |u|^2)^2 \,.\, |\mathcal{F}(u)\,du|^2,$$

où $\mathcal{F}(u) = f'''(u)$ et où u_1 et $\mathcal{F}_1(u_1)$ sont respectivement conjuguées de u et de $\mathcal{F}(u)$. Dès lors, il est clair que toute valeur de u qui annulera $f'''(u)$ donnera un point singulier de la surface.

Les points de ramification de la surface T ne sont pas, en général, des points singuliers de notre surface : ils correspondent

---

(¹) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, nos 188-192, p. 288-295.

(²) *Voir* le Mémoire cité *Sur les surfaces à courbures opposées*, particulièrement p. 32.

(³) Darboux, *loc. cit.*, n° 188, formules (18), p. 289.

(⁴) Darboux, *ibid.*, p. 309.

à des points de courbure nulle [1]. Seulement, si l'on considère un cycle (au sens d'Halphen) ayant pour origine un de ces points et que t soit la variable de ce cycle (de sorte que u et v soient des séries ordonnées suivant les puissances entières et croissantes de t), il faudra que $\mathcal{F}(u)\frac{du}{dt}$ soit différent de zéro.

En un mot, les points singuliers de la surface minima correspondent à ceux de la courbe minima [2] qui lui donne naissance.

La recherche de la fonction f de manière à éviter les points singuliers est un problème d'Algèbre qui semble présenter certaines difficultés, et il est peut-être tout aussi simple de construire *directement* des courbes minima répondant aux conditions cherchées, autrement dit, de former des fonctions algébriques x, y, z vérifiant l'équation différentielle

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

ou

$$d\xi\, d\eta - dz^2 = 0,$$

en posant

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = -(x - iy).$$

Je suis arrivé dans cette voie, après quelques tâtonnements, à l'exemple suivant :

$$(2)\qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\left[\zeta - \frac{\zeta^2}{3}\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{7}{5}\,\frac{\zeta^6}{\zeta^7 - 1}\right)\right], \\ y = \frac{1}{2i}\left[\zeta - \frac{\zeta^2}{3}\left(\frac{1}{\zeta} + \frac{7}{5}\,\frac{\zeta^6}{\zeta^7 - 1}\right)\right], \\ z = \zeta, \end{cases}$$

où ζ est une variable complexe liée à ξ par la relation

$$(3)\qquad \zeta^3 = \frac{\xi}{\xi^7 - 1}.$$

Les formules précédentes définissent une courbe minima. En remplaçant les seconds membres par leurs parties réelles, on a une surface minima. Toutes deux sont dépourvues de singularités à distance finie.

Le genre de la surface [celui de l'équation (3)] est 6, le nombre

---

[1] *Leçons sur la théorie des surfaces*, p. 445.
[2] *Ibid.*, p. 341.

des nappes infinies 11; par conséquent, l'ordre de connexion est 23.

Dans les différents exemples que j'avais indiqués au cours du travail précédemment cité, le nombre des nappes infinies était pair chaque fois que le genre était différent de zéro. On pouvait donc douter qu'il pût en être autrement. L'exemple précédent décide ce point.

La surface précédente est, comme on voit, assez compliquée. Il serait intéressant d'en former d'un peu plus simples et surtout d'en trouver qui présentent les symétries étudiées par M. Goursat dans un Mémoire connu ([1]). La difficulté, comme nous venons de le voir, réside dans la présence des points singuliers.

On pourrait, il est vrai, au lieu de la fonction $f(u)$, se donner la fonction $\mathfrak{F}(u)$, et il serait alors facile de choisir celle-ci de manière qu'elle ne s'annule qu'aux points à l'infini de la surface.

Mais celle-ci aurait alors des périodes correspondant à celles des intégrales $\int(1-u^2)\mathfrak{F}(u)\,du$, $i\int(1+u^2)\mathfrak{F}(u)\,du$, $2\int u\,\mathfrak{F}(u)\,du$, dont les parties réelles donnent les coordonnées. Si l'on veut éviter les surfaces périodiques, on se trouvera en présence d'une nouvelle difficulté consistant à exprimer que ces périodes sont purement imaginaires.

([1]) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. IV, 1887.

ERRATA.

Page 43, en note, *au lieu de : voir* ce même Tome, p. 597, *lisez :* voir *Bulletin*, t. II_2, p. 200.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXVI.

361

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXVI; 1902. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages.

AHL (F.). — Untersuchungen über geodätische Linien..... 118-120
ALEZAIS (R.). — Sur une classe de fonctions hyperfuchsiennes..... 127-129
Annales internationales d'Histoire. Congrès de Paris..... 229-230
APPELL (P.). — Cours de Mécanique à l'usage des candidats à l'École centrale..... 285-288
BARDEY (E.). — Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung..... 351-352
BASSET (A.-B.). — An elementary treatise on cubic and quartic Curves. 11
BOLTZMANN (L.). — Leçons sur la théorie des gaz. Ire Partie, traduction par A. Gallotti, avec une introduction et des Notes par M. Brillouin. 32-37
BOREL (E.). — Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France, recueillies par M. d'Adhémar..... 153-157
BOURLET (C.). — Cours de Mathématiques à l'usage des élèves architectes et ingénieurs, professé à l'École des Beaux-Arts..... 14
BOUVARD et RATINET. — Nouvelles tables de logarithmes à cinq décimales..... 281-285
BOUVIER (E.). — La méthode mathématique en Économie politique.... 173-175
CAPELLI (A.). — Lezioni sulla teoria delle forme algebrische..... 288-289
CELLÉRIER (C.). — Cours de Mécanique..... 124-127
CESÀRO (E.). — Vorlesungen über natürliche Geometrie. Autorisierte deutsche Aufgabe von G. Kowalewski..... 13
CLAIRIN (J.). — Sur les transformations de Baecklund..... 198-200

Pages.

COIGNET (M.). — Le traité des sinus (publié par H. Bosmans) 31-32
COMBEBIAC (G.). — Calcul des triquaternions 355-357
CZUBER. — Probabilités et moyennes géométriques, traduit par H. Schuermans 328
DASSEN (C.). — Metafisica de los conceptos matematicos fundamentales y del analysis llamado infinitesimal 175-177
DICKSON (L.-E.). — Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory 17-20
EPSTEEN (S.). — Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen 4. Ordnung 168-172
ESTANAVE (E.). — Revue décennale des Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris 30-31
Festschrift zur Feier des hundertfünfzigjährigen Bestehens der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 113-115
FREYCINET (C. DE). — Sur les principes de la Mécanique rationnelle... 129-138
GAUSS (K.). — General investigations of curved Surfaces of 1827 and 1825. Translated..., by J.-C. Morehead and A.-M. Hiltebeitel... 289-290
GIBBS (W.) et WILSON (E.). — Vector Analysis 21-30
GOURSAT (E.). — Cours d'Analyse mathématique, t. I 217-228
HAMEL (G.). — Ueber die Geometrien in denen die Graden die kürzesten sind 138-142
HAMMER (E.). — Sechstellige Tafel der $\log \frac{1+x}{1-x}$ 291-292
HEIDKE (P.). — Ueber Kreisteilungsgleichungen von Primzahlgrad $p = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_1} \ldots p_\mu^{\pi_\mu} + 1$ $(\mu > 1)$ 160-161
HILBERT. — Grundlagen der Geometrie 249-272
KLEIN (F.). — Anwendung der Differential- und Integral Rechnung auf Geometrie. Eine Revision der Principien 185-198
KOMMERELL (K.). — Die Krummung der zweidimensionalen Gebilde in ebenen Raum von vier Dimensionen 159-160
LARMOR. — Aether and Matter 319-328
LEMOINE (E.). — Géométrographie ou art des constructions géométriques 157-159
LORENTZ (H.-A.). — Lehrbuch der Differential- und Integral Rechnung und der Anfangsgrunde der analytischen Geometrie, übersezt von Dr Schmidt 5-10
MATTER (K.). — Die den Bernoulli'schen Zahlen analogen Zahlen im Körper der dritten Einheitswurzeln 165-168
MÜLLER (F.). — Vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français. Zweite Hälfte 11-12
NETTO (E.). — Lehrbuch der Combinatorik 98-102
OETTINGEN (A. VON). — Elemente der geometrisch-perspectivischen Zeichnens 15
PASCAL (E.). — Repertorium der höheren Mathematik. Autorisierte deutsche Ausgabe..., von A. Schepp. II Theil : die Geometrie 355
PERRY (J.). — Höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von R. Fricke und F. Sächting 352-355
PICARD (E.). — Quelques réflexions sur la Mécanique, suivies d'une première leçon de Dynamique 57-58

Pages.

RATINET. — *Voir* BOUVARD et RATINET.
RICHARD (J.). — Sur la surface des ondes de Fresnel 231-232
ROY (W.). — Sur la *curvatura integra* et la Topologie des surfaces fermées 93-98
SCHUR (I.). — Ueber eine Klasse von Matrizen die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen 161-164
SELLENTHIN (B.). — Mathematischer Leitfaden mit besonderer Berücksichtigung der Navigation 290-291
SICARD (H.). — Traité de Cinématique théorique, avec des Notes par A. Labrousse 16
SNELLIUS (W.). — Le degré du méridien terrestre (publié par H. Bosmans). 31
STOKES (G.). — Mathematical and physical Papers. III 20-21
TESSARI (D.). — La Costruzione delli ingranaggi ad uso delle Scuole degli ingegneri e dei meccanici 120-124
VIVANTI (G.). — Teoria delle Funzioni analitiche 116-118
WEBER (H.). — Die partiellen Differential-gleichungen der mathematischen Physik, nach Riemann's Vorlesungen in vierter Auflage 12-13
WILSON. — *Voir* GIBBS et WILSON.
ZAREMBA. — Sur l'équation $\Delta u + \xi u = 0$ 337-350
ZEUTHEN (H.). — Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen-âge, traduite par Jean Mascart 313-319
ZOLL (O.). — Ueber Flächen mit Scharen von geschlossenen geodätischen Linien 102-105

MÉLANGES.

ANDOYER. — Sur un problème de Mécanique rationnelle 293-298
DARBOUX (G.). — Le Catalogue international de Littérature scientifique. 58-67
— Note relative à l'article précédent (*voir* DURAND) 183-184
DELAUNAY (N.). — Sur les calculateurs cinématiques des fonctions elliptiques 177-180
DURAND (A.). — Sur un théorème relatif à des moyennes 181-183
GOURSAT (E.). — Sur un théorème de M. Jensen 298-300
HADAMARD (J.). — Sur certaines surfaces minima 357-360
LEBESGUE (H.). — Sur les transformations de contact des surfaces minima 106-112
LEVI-CIVITA. — Sur les fonctions du genre infini 333-335
LŒWY (A.). — Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires 83-87
OCAGNE (M. D'). — Sur quelques travaux récents relatifs à la Nomographie 67-83
PICARD (E.). — Le premier Chapitre d'un Rapport sur quelques progrès récents dans les Sciences 37-53
— Sur les intégrales doubles de fonctions rationnelles dont tous les résidus sont nuls 143-152
RAFFY. — Correspondance : A propos de la Thermodynamique générale de Gustave Robin 87-92

Pages.

STOUFF. — Sur la première lettre arithmétique d'Hermite à Jacobi..... 302-308

Thèses de Sciences mathématiques soutenues devant la Faculté des Sciences de Paris et devant les Facultés des Sciences des départements dans le courant du XIXe siècle..... 201-280

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXVI.

31-81 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, à Paris.

3

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BOUGAIEFF, BROCARD, GOURSAT,
KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, MANSION, MOLK, RADAU, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE,
SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY
ET DE 1886 A 1901 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXVI. — ANNÉE 1902.

(XXXVIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1902

5.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK (JOURNAL DE CRELLE), édité par L. KRONECKER avec la collaboration de WEIERSTRASS, VON HELMHOLTZ, SCHROETER, FUCHS. Tome 105 (4 Cahiers et 1 Planche), 356 pages. Berlin; 1889.

Günther (*Paul*). — Sur les équations différentielles linéaires, dont les intégrales n'ont qu'un point singulier à distance finie, et sont régulières à l'infini. (1-34).

La forme générale des équations considérées, en supposant que leurs coefficients sont rationnels, et que le point singulier est $x = 0$, est

$$\frac{d^n y}{dx^n} + q_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + q_n(x)\,y = 0,$$

avec

$$q_i(x) = a_{i,i}x^{-i} + a_{i,i+1}x^{-(i+1)} + \ldots + a_{i,\pi_i}x^{-\pi_i}.$$

Il s'agit de rechercher si elles ont des *intégrales normales*, au sens donné à ce mot par Thomé (*Journal für Mathematik*, t. 95), c'est-à-dire ici des intégrales de la forme

$$y = e^{G\left(\frac{1}{x}\right)} x^A g(x) \qquad [G(0) = 0,\ g(0) \neq 0],$$

G et g étant des polynomes entiers; et de donner une méthode régulière pour les trouver.

Ce problème a été posé et étudié par Hamburger [*Sur une classe spéciale d'équations différentielles linéaires* (*Journal für Mathematik*, t. 103)]. L'auteur modifie sa méthode de manière qu'elle s'applique à tous les cas.

On détermine d'abord, d'après Thomé, les valeurs possibles du degré m de G, en cherchant deux entiers positifs α et m tels que les produits

$$p_i(x) = x^{\alpha+i(m+1)} q_i(x)$$

soient tous des polynomes entiers en x. Posant alors

$$f(x, v) = v^n + p_1(x) v^{n-1} + \ldots + p_n(x),$$
$$F(x, v) = f(x, v) - \frac{1}{2}(m+1) x^m v \frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

on détermine les premiers termes des développements

$$v = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots,$$

satisfaisant à l'équation $F(x, v) = 0$, en se bornant à ceux que peuvent fournir, quand on y fait $x = 0$, cette équation et celles qu'on en déduit en la différentiant m fois de suite.

Si v_0 est racine simple de $F(0, v) = 0$, on obtient $v_0, v_1, \ldots, v_m$, et l'on a

$$G\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{v_0}{m} x^{-m} - \frac{v_1}{m-1} x^{-m+1} - \ldots - \frac{v_{m-1}}{1} x^{-1},$$
$$A = v_m;$$

de sorte qu'en posant $y = e^{G\left(\frac{1}{x}\right)} \eta$, on est ramené à chercher, suivant les méthodes connues, les intégrales de la transformée en η qui sont de la forme $x^A g(x)$. (Ce premier cas était le cas traité par Hamburger.)

Si v_0 est racine multiple de $F(0, v) = 0$, et si l'on suppose qu'aucune impossibilité ne se présente, les équations considérées fournissent un moindre nombre de coefficients, soient $v_0, v_1, \ldots, v_{r-1}$ $(r \leqq m)$. On pose alors

$$y = e^{G'\left(\frac{1}{x}\right)} \eta,$$

où

$$G'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{v_0}{m} x^{-m} - \ldots - \frac{v_{r-1}}{m-r+1} x^{-(m-r+1)},$$

et l'on est ramené à chercher une intégrale normale de la transformée en η, mais avec un polynome G de degré moindre que m. Le problème se résoudra donc par un nombre d'essais limité.

L'auteur applique ensuite sa méthode aux équations du second ordre. Il termine par la recherche des intégrales normales logarithmiques, c'est-à-dire de la forme

$$y = e^{G(x^{-1})} x^A \sum_k P_k(x) \log^k x.$$

Frobenius (*G.*). — Sur les fonctions de Jacobi pour trois variables. (35-100).

L'auteur donne d'abord un résumé de la théorie générale des fonctions de Jacobi du premier ordre (ou fonctions thêta) et des caractéristiques, puis applique ces généralités au cas de trois variables : il donne la formation des 36×64 systèmes fondamentaux de huit caractéristiques, et leur groupement en familles de 36 systèmes.

Mais l'objet essentiel du Mémoire est l'étude de la fonction que l'auteur désigne par $\varphi(u)$, et qu'il considère comme formant le centre de la théorie. C'est la fonction de Jacobi du second degré, qui se comporte comme le carré de la fonction $\vartheta(u)$, et dont le développement commence par des termes du quatrième degré : elle est définie par là à un facteur constant près. Son importance résulte de ce qu'elle s'annule identiquement quand on y remplace ses arguments par les trois intégrales abéliennes de première espèce, prises entre deux points quelconques de la surface de Riemann.

L'étude de cette fonction $\varphi(u)$ comprend essentiellement : expression de $\varphi(u)$ en fonction linéaire et homogène des carrés de huit fonctions thêta; calcul de ses valeurs et de celles de $\sqrt{\varphi(u)}$ pour les 63 demi-périodes; représentation de $\varphi(u)$ au moyen des fonctions sigma; passage d'un système fondamental de caractéristiques à un autre.

M. Frobenius introduit aussi les fonctions thêta du second degré impaires et dont le développement commence par des termes du troisième degré; il s'en sert pour établir les fondements analytiques de la théorie des fonctions racines du second et du troisième ordre (*Wurzelfunctionen zweiter und dritter Ordnung*).

Il termine en montrant le lien entre la théorie de la fonction $\varphi(u)$ et celle des courbes du quatrième ordre.

Sturm (*Rudolf*). — Recherches purement géométriques sur les surfaces minima algébriques. (101-126).

L'auteur établit par des considérations purement géométriques divers résultats connus de la théorie des surfaces minima. La première Partie de l'Article est consacrée à la détermination de l'ordre et de la classe du lieu des milieux des segments dont les extrémités s'appuient sur deux courbes algébriques données, distinctes ou confondues; les surfaces minima algébriques en sont, comme l'on sait, un cas particulier. Dans la seconde Partie de son Travail, l'auteur démontre que toute droite d'une surface minima en est un axe de symétrie (Schwarz), et que la section normale de tout cylindre circonscrit à une surface minima algébrique est la développée d'une courbe algébrique (Henneberg), ainsi que divers résultats qui se rattachent à ces théorèmes.

Lipschitz (*R.*). — Étude des propriétés d'une classe de séries infinies. (127-156).

En appliquant un procédé de transformation employé par Riemann pour la série $\zeta(s)$ à la série plus générale

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi m t}}{(v+m)^s} \qquad (0 < v < 1)$$

(t quantité complexe à partie réelle non négative; s quantité complexe à partie réelle positive), l'auteur obtient la formule

$$\frac{(2\pi)^{1-s}}{\Gamma(1-s)}\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{e^{-2\pi(v+m)t}}{(v+m)^s}=\lim_{N=\infty}\sum_{n=-N}^{n=+N}\frac{e^{2\pi nvi}}{(t+ni)^{1-s}}.$$

Cette formule peut se rattacher à une transformation générale des séries thêta simplement infinies. L'auteur l'applique aux diverses séries introduites par Dirichlet dans son Mémoire sur la progression arithmétique, et découvre, comme conséquence, une relation caractéristique entre ces séries de Dirichlet et la théorie générale de la division du cercle en un nombre quelconque de parties égales. De là résulte un principe pour la répartition des nombres entiers en classes, qui conduit en particulier à une répartition des nombres premiers en classes.

Kronecker (*L.*). — Remarques sur la représentation des séries au moyen d'intégrales. (157-159 et 345-354).

L'auteur montre comment l'emploi de l'intégrale de Cauchy conduit à des formules sommatoires importantes. Certaines de ces formules, ou d'autres qui en résultent, remontent à Cauchy, Plana, Abel, Schlömilch, Lipschitz : elles découlent ici d'une méthode uniforme, et les conditions dans lesquelles elles sont applicables sont bien précisées.

Les deux plus générales s'obtiennent en intégrant le long d'un contour rectangulaire parallèle aux axes la fonction $\pi\cot z\pi f(z)$ de la variable complexe $z=x+iy$. Dans le premier cas, $f(z)$ est supposée continue et finie dans une bande comprenant l'axe réel, et tendant vers zéro pour x infini; on fait alors croître indéfiniment les côtés du rectangle d'intégration parallèles à l'axe réel, et l'on obtient la formule

$$F(0)+2\sum_{k=1}^{k=\infty}F(k)=i[\operatorname{sgn}\eta]\int_{-\infty}^{+\infty}F(x+\eta i)\cot(x+\eta i)\pi\,dx,$$

où

$$F(z)=\frac{1}{2}[f(z)+f(-z)].$$

Dans le second cas, le rectangle d'intégration est modifié au moyen d'arcs de cercle convenablement choisis, et l'on obtient

$$\frac{1}{2}\sum_{k}f(k)+\frac{1}{2}\sum_{k'}f(k')=-\frac{1}{2}\int_0^\infty\sum_{\alpha,\varepsilon}(-1)^\alpha\cot(x_\alpha+\varepsilon yi)\pi f(x_\alpha+\varepsilon yi)\,dy$$

$$(x_0<k<x_1,\ x_0\leqq k'\leqq x_1)\qquad(\alpha=0,1;\ \varepsilon=+1,-1),$$

à condition que $f(z)$ remplisse, dans la bande parallèle à l'axe imaginaire qui intervient alors, des conditions analogues aux précédentes.

Pour les applications de ces formules, nous ne pouvons que renvoyer à l'Article lui-même.

Tano (*F.*). — Sur quelques théorèmes de Dirichlet. (160-169).

L'auteur étudie les conditions de résolubilité, en nombres entiers, de l'équation indéterminée

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

D étant un produit de facteurs premiers de la forme $4n+1$ en nombre quelconque, ou le double d'un tel produit. Dirichlet avait considéré le cas où D est un produit de deux ou trois facteurs premiers de la forme $4n+1$, ou le double d'un tel facteur premier.

Königsberger (*Leo*). — Sur une relation entre certains déterminants dans la théorie des équations différentielles linéaires. (170-179).

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_m$ un système fondamental d'intégrales de l'équation

$$y^{(m)} = p_1 y^{(m-1)} + p_2 y^{(m-2)} + \ldots + p_{m-1} y' + p_m y;$$

si l'on désigne par D_1 le déterminant

$$D_1 = |y_k, y'_k, \ldots, y_k^{(m-1)}| \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-1),$$

on obtient la relation

$$y_m\left(\frac{d^{m-1}D_1}{dx^{m-1}} + P_{1,0}\frac{d^{m-2}D_1}{dx^{m-2}} + \ldots + P_{m-1,0}D_1\right)$$
$$-y'_m\left(\frac{d^{m-2}D_1}{dx^{m-2}} + P_{1,1}\frac{d^{m-3}D_1}{dx^{m-3}} + \ldots + P_{m-2,1}D_1\right) + \ldots = y_m^{(m-1)}D_1 = Ce^{\int p_1 dx},$$

où les P_{ik} sont des fonctions entières des p_h et de leurs dérivées.

L'auteur montre qu'elle peut fournir des relations algébriques entre les intégrales particulières considérées et leurs dérivées.

Il examine spécialement le cas où l'équation proposée est binome

$$(p_1 = p_2 = \ldots = p_{m-1} = 0);$$

D_1 est alors une intégrale si m est pair; et si m est impair D_1 est intégrale de l'équation obtenue en changeant p_m en $-p_m$.

L'auteur termine par diverses remarques sur une représentation symbolique de l'équation linéaire comme produit de facteurs, sur la recherche des solutions multiples, et sur des transformations analogues à la transformation de Tschirnhausen.

Czuber (*E.*). — Calcul de la surface latérale et du volume de la portion d'une sphère comprise entre deux plans qui coupent la sphère et se coupent l'un l'autre. (180).

Ce problème a été traité par Crelle (*Journal für Mathematik*, t. 52). L'auteur en donne une solution élémentaire.

Schlesinger (*Ludwig*). — Contribution à la théorie des fonctions fuchsiennes. (181-232).

C'est une nouvelle théorie des fonctions fuchsiennes, développée suivant une marche analogue à celle que Gauss avait donnée pour l'introduction des fonctions elliptiques : la relation fonctionnelle dont l'inversion fournit les fonctions fuchsiennes est obtenue comme la limite d'une série de relations algébriques. Pour plus de simplicité, l'auteur se limite à un cas particulier, qui est celui des fonctions fuchsiennes de la deuxième famille (type symétrique) de M. Poincaré.

L'auteur part de la surface de Riemann à $\overline{n+1}$ feuillets plans, définie par $\overline{n}$ points de ramification doubles donnés sur l'axe réel; le mode de liaison des feuillets en chacun de ces points est aussi défini. Cette surface définit, à trois constantes arbitraires près, une fonction algébrique y de x, qu'on peut représenter par

$$y = S_{n+1}(x/a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant les affixes des points de ramification.

Cela posé, on considérera la suite des variables $y_0, y_1, y_2, \ldots$, liées entre elles par la loi de récurrence

$$y_{\lambda+1} = S_{n_{\lambda+1}+1}\left(y_\lambda / a_1^{(\lambda)}, a_2^{(\lambda)}, \ldots, a_{n_{\lambda+1}}^{(\lambda)}\right),$$

où les constantes réelles $a_k^{(\lambda)}$ sont les diverses valeurs prises par y_λ pour les valeurs

$$a_1^{(\lambda-1)}, \quad a_2^{(\lambda-1)}, \quad \ldots, \quad a_{n_\lambda}^{(\lambda-1)}$$

de $y_{\lambda-1}$; n_1 est un entier supérieur à deux, et $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_{n_1}^{(0)}$ des nombres réels distincts quelconques.

On peut étudier y_λ comme fonction de y_0; et cette fonction tend vers une certaine fonction limite η lorsque λ devient infini. L'auteur montre ensuite que y_0, considérée comme fonction de η, est précisément une fonction fuchsienne de l'espèce indiquée. Il établit directement les propriétés connues de ces fonctions, en particulier la relation différentielle que vérifie chacune d'elles. Il termine en signalant le lien qui unit sa méthode à la transformation des fonctions fuchsiennes : il tient à ce que les diverses variables y_λ considérées sont toutes des fonctions fuchsiennes de η, et que y_λ est, quel que soit λ, fonction rationnelle de $y_{\lambda+1}$.

Schottky (*F.*). — Sur les relations entre les seize fonctions thêta de deux variables. (233-249).

L'auteur donne une représentation géométrique nouvelle de ces relations. Les fonctions thêta impaires étant désignées par $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_6$, et les fonctions paires par $\Theta_{123}, \ldots$ ($\Theta_{123} = \Theta_{456}, \ldots$), on considère les vingt produits $F_{\alpha\beta\gamma} = \Theta_\alpha \Theta_\beta \Theta_\gamma \Theta_{\alpha\beta\gamma}$. En vertu des relations liant les fonctions thêta, ils s'expriment tous en fonction linéaire et homogène de quatre quantités x, y, z, w : les équations $F_{\alpha\beta\gamma} = 0$ représentent ainsi des plans, et ce sont tous ceux qui passent par trois points quelconques d'un système de six points fixes fondamentaux. Posant encore $\Pi = \Theta_1 \Theta_2 \ldots \Theta_6$, les équations $\Pi\Theta_\alpha^2 = 0$ représentent les six cônes du second degré passant par les six points fondamentaux et ayant leurs sommets en chacun d'eux : et les équations $\Pi\Theta_{\alpha\beta\gamma}^2 = 0$ représentent les couples

de plans passant par ces six points. Ces seize fonctions $\Pi\Theta^2_{mi}$ sont donc fonctions linéaires et homogènes de quatre nouvelles quantités X, Y, Z, W, qui sont des formes quadratiques de x, y, z, w. Mais il existe une relation identique entre les $F_{\alpha\beta\gamma}$ qui exprime que le point (x, y, z, w) doit se trouver sur la surface lieu des sommets des cônes du second degré passant par les six points fondamentaux (*surface de Weddle*); si l'on considère X, Y, Z, W comme les coordonnées d'un point correspondant au point (x, y, z, w), il décrit une *surface de Kummer*.

Enfin la correspondance entre les arguments u et u' des fonctions thêta et le point (x, y, z, w) de la surface de Weddle est la suivante. Soient

$$F_1(X, Y, Z, W; x, y, z, w), \qquad F_2(X, Y, Z, W; x, y, z, w)$$

les deux formes bilinéaires qui deviennent identiquement nulles quand on y remplace X, Y, Z, W en fonction de (x, y, z, w), on a les formules

$$du = \frac{F_1(X, Y, Z, W; dx, dy, dz, dw)}{2\sqrt[4]{P}},$$

$$du' = \frac{F_2(X, Y, Z, W; dx, dy, dz, dw)}{2\sqrt[4]{P}},$$

P désignant le produit des six fonctions de x, y, z, w représentées par $\Pi\Theta^2_\alpha$ pour $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Stern (*M.-A.*). — Démonstration d'un théorème de Liouville. (250-266).

Il s'agit du théorème suivant, énoncé par Liouville sans démonstration :

Si N *est le nombre total des solutions en nombres entiers de l'équation*

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

où n est pair, la somme des quatrièmes puissances des valeurs de x dans toutes ces solutions est

$$\Sigma x^4 = \frac{n^2 N}{8}.$$

Kronecker (*L.*). — Sommation de la série de Gauss $\sum_{h=0}^{h=n-1} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}}$. (267-268).

L'auteur montre qu'elle se déduit avec une surprenante simplicité du théorème de Cauchy sur l'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise le long d'un contour fermé, en prenant $f(z) = \frac{e^{\frac{2\pi i z^2}{n}}}{1 - e^{2\pi i z}}$, et en choisissant convenablement le contour.

Schottky (*F.*). — Recherche algébrique sur les fonctions thêta de trois arguments. (269-297).

Il s'agit d'une représentation géométrique des relations entre les soixante-quatre fonctions Θ de trois arguments, analogue à celle qui a été exposée pour les seize fonctions Θ de deux arguments dans le Mémoire de l'auteur analysé plus haut. Mais il faut ici supposer les trois arguments liés par une relation, qui sera celle qu'on obtient en égalant à zéro l'une des soixante-quatre fonctions thêta.

Ces fonctions étant désignées, suivant une notation connue, par Θ; $\Theta_1, \ldots, \Theta_7$; $\Theta_{1,2}, \ldots, \Theta_{6,7}$; $\Theta_{123}, \ldots, \Theta_{567}$; on considérera les trente-cinq produits

$$F_{\alpha\beta\gamma} = \Theta_\alpha \Theta_\beta \Theta_\gamma \Theta_{\alpha\beta\gamma},$$

qui s'expriment en fonction linéaire et homogène de quatre quantités x, y, z, w; de sorte que les équations $F_{\alpha\beta\gamma} = 0$ représentent tous les plans passant par trois points choisis parmi sept points fondamentaux. Posant encore

$$\Pi = \Theta_1 \Theta_2 \ldots \Theta_7,$$

chacune des équations $\Pi^2 \Theta_m^2 = 0$ représente une surface du quatrième ordre admettant les sept points fondamentaux comme points doubles. Les points (x, y, z, w) ont pour lieu géométrique une surface du sixième degré, ayant les sept points fondamentaux comme points triples : elle peut se définir comme le lieu géométrique des points doubles des surfaces du quatrième degré ayant huit points doubles dont sept sont les points fondamentaux. On peut lui faire correspondre une surface du sixième degré à vingt-huit points doubles, par une transformation analogue à celle qui faisait correspondre, dans le précédent Mémoire, une surface de Kummer à la surface de Weddle.

Staude (*Otto*). — Sur les fonctions conditionnellement périodiques d'un argument complexe à variabilité limitée, et leurs applications à la Mécanique. (Avec une Planche de figures). (298-328).

La théorie exposée par l'auteur, et dont les principes ont été exposés par lui dans un précédent Mémoire (*Mathematische Annalen*, t. XXIX, p. 168), lui a été inspirée par un Article de Weierstrass sur les fonctions réelles périodiques (*Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1866, p. 97). Dans la première Partie de l'Article, il étudie le problème d'inversion défini par les équations

$$t_1 = \int_{a_1}^{z_1} \frac{g_{11}(z_1)\,dz_1}{\sqrt{(z_1 - a_1)(b_1 - z_1) f_{11}(z_1)}} + \int_{a_2}^{z_2} \frac{g_{12}(z_2)\,dz_2}{\sqrt{(z_2 - a_2)(b_2 - z_2) f_{12}(z_2)}},$$

$$t_2 = \int_{a_1}^{z_1} \frac{g_{21}(z_1)\,dz_1}{\sqrt{(z_1 - a_1)(b_1 - z_1) f_{21}(z_1)}} + \int_{a_2}^{z_2} \frac{g_{22}(z_2)\,dz_2}{\sqrt{(z_2 - a_2)(b_2 - z_2) f_{22}(z_2)}},$$

en employant le changement de variables

$$w_1 = \int_{a_1}^{z_1} \frac{dz_1}{\sqrt{(z_1 - a_1)(b_1 - z_1)}}, \qquad w_2 = \int_{a_2}^{z_2} \frac{dz_2}{\sqrt{(z_2 - a_2)(b_2 - z_2)}}.$$

Les conditions imposées aux fonctions $f_{\alpha\beta}$ et $g_{\alpha\beta}$ sont énoncées avec précision, en restant d'abord au point de vue réel.

L'inversion fournit des fonctions

$$w_1 = \varphi_1(t_1, t_2), \qquad w_2 = \varphi_2(t_1, t_2)$$

qui jouissent des propriétés exprimées par

$$\varphi_\alpha(t_1 + 2\omega_{1\beta}, t_2 + 2\omega_{2\beta}) = \varphi_\alpha(t_1, t_2) + 2\varepsilon_{\alpha\beta}\pi,$$

où $\varepsilon_{\alpha\beta}$ est égal à zéro, pour $\alpha \neq \beta$, et à un pour $\alpha = \beta$. On en conclut qu'une fonction de z_1, z_2, $\sqrt{z_1 - a_1}$, $\sqrt{b_1 - z_1}$, $\sqrt{z_2 - a_2}$, $\sqrt{b_2 - z_2}$ est, sous certaines conditions de continuité, une fonction $G(t_1, t_2)$ admettant les couples de périodes $(2\varepsilon_1\omega_{11}, 2\varepsilon_1\omega_{21})$, $(2\varepsilon_2\omega_{12}, 2\varepsilon_2\omega_{22})$, où ε_1 et ε_2 ont, suivant les cas, les valeurs un ou deux. De là la représentation d'une telle fonction en série de Fourier à deux variables.

C'est en faisant, dans une telle fonction, $G(t_1, t_2)$, $t_1 = 0$ et $t_2 = t$ que l'auteur obtient ce qu'il appelle une fonction *conditionnellement périodique :* elle a en effet la période $2\varepsilon_1 m_1\omega_{21} + 2\varepsilon_2 m_2\omega_{22}$, si m_1 et m_2 sont des entiers pour lesquels on ait $2\varepsilon_1 m_1\omega_{11} + 2\varepsilon_2 m_2\omega_{12} = 0$.

Les résultats précédents s'étendent au cas où t_1 et t_2 sont des variables complexes se déplaçant dans des bandes suffisamment étroites parallèles à l'axe réel et le comprenant, sous certaines conditions indiquées par l'auteur.

La seconde Partie du Mémoire contient l'application de la théorie générale qui précède à divers problèmes classiques de Mécanique : mouvement d'un point sous l'action d'une force centrale, mouvement sur une surface de révolution sous l'action d'une force à potentiel, mouvements de Liouville et Jacobi, mouvement d'un corps solide qui a un point fixe et n'est soumis à aucune force, mouvement de la toupie, etc. Dans plusieurs de ces cas, les séries de Fourier introduites se réduisent à des séries de Fourier simples.

Hensel (*K.*). — Sur les classes de grandeurs algébriques, qui résultent de la composition de deux classes. (329-344).

Ce Travail est une contribution à la théorie de Kronecker sur les classes (*Gattungen*) de grandeurs algébriques.

L'auteur donne d'abord une solution du problème suivant : Déterminer la puissance d'un diviseur premier P (*Primdivisor*) du domaine naturel de rationalité contenue comme diviseur essentiel dans le discriminant d'une classe donnée. Il traite ensuite le même problème pour la classe qui résulte de la composition de deux classes données, dans le cas où l'ordre de l'une d'elles ne se réduit pas par l'adjonction de l'autre au domaine de rationalité. La méthode employée est fondée sur la construction d'un système fondamental relatif au module P, pour une classe donnée. Les résultats obtenus permettent de déterminer le discriminant de la classe composée, connaissant les deux classes composantes.

Tome 106 (4 Cahiers, 348 pages). Berlin; 1890.

Fuchs (*L.*). — Remarque sur le Travail publié dans le Tome 75 (p. 177) de ce Journal. (1-4).

Il s'agit de la détermination du plus grand cercle de centre $w = 0$, à l'intérieur duquel deux branches de la fonction w définie par

$$w\,g(w)z - f(w) = 0 \qquad \text{ou} \qquad z - F(w) = 0$$

ne puissent devenir égales. Dans le Travail cité, M. Fuchs avait donné comme rayon de ce cercle le plus petit module des racines de $F'(w) = 0$. Ce rayon peut être plus petit lorsque les coefficients des polynomes $f(w)$ et $g(w)$ satisfont à certaines conditions. C'est ce cas d'exception qui est ici précisé et étudié.

Minkowski (*H.*). — Sur les conditions sous lesquelles deux formes quadratiques à coefficients rationnels peuvent se transformer rationnellement l'une dans l'autre. (Extrait d'une lettre de M. H. Minkowski, à Bonn, à M. Adolf Hurwitz). (5-26).

Soit f une forme quadratique à n variables, à coefficients rationnels et à discriminant non nul. On désigne par J le nombre de carrés positifs de f, supposée réduite à une somme de n carrés de formes linéaires réelles; et par A le produit de tous les facteurs premiers figurant dans le discriminant avec des exposants impairs affecté du signe de $(-1)^J$.

L'auteur montre qu'à tout nombre premier p on peut faire correspondre, par la considération des restes de f pris par rapport à des puissances de p suffisamment élevées, un nombre C_p bien déterminé, ayant la valeur $+1$ ou -1. Pour tout nombre p impair qui n'appartient ni au discriminant, ni au dénominateur général des coefficients, C_p a la valeur $+1$. On désignera par B le produit de tous les facteurs premiers impairs figurant dans le discriminant, ou le dénominateur général ne figurant pas dans A, et pour lesquels C_p a la valeur -1.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux formes f puissent se transformer l'une dans l'autre par une transformation linéaire à coefficients rationnels est que les nombres n, J, A, B aient respectivement les mêmes valeurs pour les deux formes. De plus, sous certaines conditions que doivent remplir ces quatre nombres, il existe toujours une famille de formes pour lesquelles ils ont des valeurs données.

L'auteur examine ensuite dans quel cas deux équations $f = 0$ peuvent se transformer rationnellement l'une dans l'autre; c'est-à-dire à quelles conditions deux formes f peuvent se transformer l'une dans l'autre, à un facteur numérique rationnel près. Il faut ici distinguer le cas de n pair et de n impair. Dans les deux cas, la considération des unités C_p permet encore de définir un nouvel invariant D; et la condition cherchée est que les valeurs de n et D soient les

mêmes, et que le nombre $(n - 2J)$ ait la même valeur absolue pour les deux formes.

Entre autres applications, l'auteur donne les divers cas où l'équation $f = 0$ peut se résoudre en nombres entiers.

Lipschitz (*R.*). — Remarque sur l'Article : *Étude des propriétés d'une classe de séries infinies.* (27-29).

Dans l'Article cité (*Journal für Mathematik*, t. 105), l'auteur a déduit de la théorie de la division du cercle un mode de répartition des nombres en classes. Il donne ici quelques explications complémentaires sur le principe de cette classification, et montre qu'elle conduit à une infinité de classes.

Reye (*Th.*). — Sur les multiplicités linéaires de faisceaux de plans projectifs et de réseaux de plans ou d'espaces tangentiels collinéaires. II. (30-47). III. (315-329).

Suite du Mémoire commencé au Tome 104 (p. 211 à 240) du même Journal.

II. Chacun des éléments dont sont composées les multiplicités linéaires considérées est l'un des ∞^7 faisceaux de plans qui sont en relation projective avec l'un quelconque d'entre eux. L'auteur étudie successivement les multiplicités linéaires $|u_4|$, $|u_5|$, $|u_6|$ formées respectivement de ∞^4, ∞^5, ∞^6 de ces éléments. (Dans le Mémoire précédent avaient été étudiées les multiplicités linéaires $|u_1|$, $|u_2|$, $|u_3|$ formées de ∞^1, ∞^2, ∞^3 de ces mêmes éléments.) Dans chacun des trois cas, on considère les multiplicités d'ordre inférieur contenues dans la multiplicité considérée : certaines d'entre elles présentent des singularités et permettent de définir des éléments géométriques simples caractéristiques de la multiplicité donnée. C'est ainsi qu'à chaque $|u_4|$ correspond une cubique gauche; à chaque $|u_5|$ un système de droites d'une quadrique; à chaque $|u_6|$ une division de points sur une droite (ce dernier résultat est dû à W. Stahl). Ces résultats ne subsistent pas sans modifications pour les $|u_4|$, $|u_5|$ et $|u_6|$ singulières. Ils mettent en évidence (dans le cas général) une dualité remarquable entre les $|u_0|$ et $|u_6|$, les $|u_1|$ et $|u_5|$, les $|u_2|$ et $|u_4|$, respectivement.

III. Les éléments fondamentaux sont maintenant les ∞^{11} réseaux de plans qui sont en relation collinéaire avec l'un quelconque d'entre eux. Les multiplicités linéaires $|S_1|$, $|S_2|$, $|S_3|$ formées de ∞^1, ∞^2 ou ∞^3 de ces éléments ayant été précédemment étudiées, il s'agit de l'étude d'une multiplicité $|S_4|$ de ∞^4 de ces éléments. La méthode de recherche est la même que dans ce qui précède : elle conduit, entre autres résultats, à la considération de dix points nodaux, de ∞^2 faisceaux cubiques principaux, et d'une congruence du troisième ordre et de la sixième classe.

Kneser (*Adolf*). — Nouvelle démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales de degré supérieur. (48-64).

Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ les racines de l'équation considérée, supposée soluble

par radicaux, et générale. On considère la résolvante

$$G(x) = \prod_{\alpha} (x - u_1 \omega_{\alpha_1} - u_2 \omega_{\alpha_2} - \ldots - u_n \omega_{\alpha_n}) = 0,$$

où le produit $\prod_{\alpha}$ est étendu à toutes les permutations paires : elle est rationnelle, après adjonction du discriminant, et irréductible en vertu de l'hypothèse. Elle doit devenir réductible, après adjonction préliminaire de certaines quantités, par l'adjonction d'une racine déterminée d'une équation binome de degré premier q. L'auteur montre qu'il en résulte que q doit diviser tous les nombres impairs compris entre n et 1 : ce qui est impossible pour $n > 4$.

Busche (*E.*). — Sur la fonction $\sum_{x=1}^{x=\frac{q-1}{2}} \left[\frac{px}{q}\right]$. (65-80).

$[a]$ est pris avec le sens donné par Gauss à cette notation. L'auteur désigne par $\psi(p, q)$ la fonction indiquée dans le titre, et lui donne un sens précis pour des valeurs de p et q de tous signes. Se servant alors d'un lemme général donné dans sa Thèse (Göttingen, 1883), et qu'il démontre de nouveau, il établit la formule

$$\psi(p, q) + \psi(q, p) = \frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2} - \frac{\varepsilon - 1}{2}\,\frac{\delta - 1}{2}$$
$$(\varepsilon = \operatorname{sgn} p,\ \delta = \operatorname{sgn} q)$$

qui contient la loi de réciprocité des résidus quadratiques. Il donne aussi diverses propriétés de la fonction $\psi(p, q) - \psi(q, p)$.

Netto (*Eugen*). — Sur le plus grand commun diviseur de deux fonctions entières d'une variable. (81-88).

Il s'agit du plus grand commun diviseur pour un système de modules premiers donné, question étudiée par Kronecker (*Journal für Mathematik*, t. 100) au moyen de la méthode d'élimination de Bézout. L'auteur retrouve les mêmes résultats en employant la méthode d'élimination d'Euler.

Eberhard (*V.*). — Une classification des systèmes généraux de plans. (89-120).

Il s'agit d'étudier la division de l'espace en corps primaires par n plans illimités quelconques. Deux points appartiennent à un même corps primaire si l'on peut aller de l'un à l'autre, en passant ou non par l'infini, sans traverser l'un des plans donnés. L'ensemble de tous les corps primaires constitue le *n-èdre* complet défini par les n plans donnés.

Incidemment l'auteur examine la question analogue pour le *n-latère* formé par n droites dans un plan, c'est-à-dire sa décomposition en surfaces primaires. Si n est impair, il est constitué par un seul système de surfaces primaires deux

à deux opposées par un angle; si n est pair, par deux tels systèmes sans partie commune. Dès que $n \geqq 6$, il y a plusieurs sortes de *n-latères,* chacune étant caractérisée par le système des triangles primaires : il y a toujours au moins n de ces triangles.

D'une manière analogue, si n est impair, le *n-èdre* complet est composé d'un seul système de corps primaires deux à deux opposés par une arête; et de deux systèmes complémentaires, si n est pair. La répartition des corps primaires en systèmes de corps deux à deux opposés par un sommet est régie par une loi plus compliquée, et donne lieu à une classification des systèmes de plans en deux espèces. Pour $n > 6$, il y a plusieurs sortes de *n-èdres :* c'est ici le système des tétraèdres primaires qui est caractéristique; il y en a toujours au moins n. L'auteur étudie en détail le cas où il y en a exactement n : le *n-èdre* est alors dit *normal.*

Beck (*A.*). — Sur le problème fondamental de l'Axonométrie. (121-124).

Ce problème consiste à construire trois segments égaux et rectangulaires ayant pour projections obliques trois segments donnés. On sait que tout revient à construire les axes de l'ellipse bitangente aux trois ellipses qui ont pour demi-diamètres conjugués deux quelconques des trois segments donnés.

L'auteur ramène la question à la construction des axes d'une quadrique dont on connaît trois diamètres conjugués, et peut alors appliquer une construction due à Chasles.

Frobenius (*G.*). — Théorie des formes biquadratiques. (125-188).

Il faut entendre ici par formes biquadratiques celles qui sont du second degré à la fois par rapport à deux couples de variables x, x_1 et y, y_1, c'est-à-dire du type

$$\begin{aligned} F(x, y) = \quad & (A x^2 + 2B x x_1 + C x_1^2) y^2 \\ & + 2(A' x^2 + 2B' x x_1 + C' x_1^2) y y_1 + (A'' x^2 + 2B'' x x_1 + C'' x_1^2) y_1^2. \end{aligned}$$

L'auteur lui associe la forme quadratique

$$\begin{aligned} G = \quad & (A p + B q + A' r + B' s) p + (B p + C q + B' r + C' s) q \\ & + (A' p + B' q + A'' r + B'' s) r + (B' p + C' q + B'' r + C'' s) s, \end{aligned}$$

qui en est, en un certain sens, un covariant, ainsi que la forme

$$H = ps - qr.$$

On considère donc le faisceau $G + \lambda H$, et son discriminant

$$R_2(\lambda) = \lambda^4 - 6\lambda^2 s + 4\lambda t + u,$$

dont les coefficients s, t, u sont les invariants fondamentaux de F. Les trois formes R, R_1 et R_2 (on désigne par R et R_1 les discriminants de F par rapport aux deux couples de variables) ont des invariants égaux. M. Frobenius donne de ce théorème trois démonstrations algébriques, et une démonstration au

moyen des fonctions elliptiques. La première de ces démonstrations est analogue à celle par laquelle Cayley a prouvé l'égalité des invariants de R et R_1.

L'auteur examine ensuite si l'on peut transformer F en une forme de même nature, mais symétrique par rapport aux deux couples de variables. La question revient à celle de l'équivalence de R et R_1 :

La condition nécessaire et suffisante de cette équivalence est que R_2 *ait un diviseur élémentaire linéaire.*

M. Frobenius donne ensuite la solution complète du problème suivant :

Déterminer toutes les formes F *pour lesquelles* R *et* R_1 *sont des formes données.*

Il trouve, comme conséquence, que, pour que deux formes F soient équivalentes, il faut et il suffit que leurs fonctions caractéristiques R_2 aient les mêmes diviseurs élémentaires.

Une étude spéciale des formes F symétriques, et une application des résultats obtenus à la théorie des fonctions elliptiques, terminent le Mémoire.

Stäckel (*P.*). — Contribution à la théorie des fonctions uniformes. (189-192).

On se donne une suite infinie de nombres complexes a_ν, susceptibles d'être les zéros d'une fonction transcendante entière, et une suite de polynomes $\gamma_\nu(x)$, de degrés $(h_\nu - 1)$, tels que tous les h_ν soient inférieurs à un nombre fixe. L'auteur montre qu'il existe une infinité de fonctions transcendantes entières dont les développements suivant les puissances de chacune des différences $(x - a_\nu)$ coïncident, dans leurs h_ν premiers termes, avec celui de la fonction $(\gamma_\nu x)$ correspondante, et donne une formule générale pour les représenter. Il établit d'abord que les fonctions dont l'expression est donnée par le théorème de Mittag-Leffler sont susceptibles d'être représentées par un développement de la forme

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)\, e^{-u_\nu\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)^{h_\nu}},$$

où les $f_\nu(x)$ sont les fonctions rationnelles données, chacune d'elles ayant pour seul pôle le point a_ν, d'ordre h_ν de multiplicité, et où les u_ν sont des constantes positives convenablement choisies.

Selling (*Eduard*). — Sur une formule pour les suites numériques empiriques, et particulièrement pour l'établissement des Tables de mortalité et d'invalidité. (193-198).

Il s'agit de représenter une fonction y de x, connue par ses valeurs pour les valeurs 0, 1, 2, 3, ... de x, par une formule de la forme

$$y = au^x + bv^x + cw^x + \ldots.$$

L'auteur donne des formules simples pour le calcul des constantes a, b, c, ...;

u, v, w, ... Il applique ses résultats à la représentation du nombre des vivants d'âge x.

Schottky (*F.*). — Sur les équations caractéristiques des surfaces planes symétriques, et sur les fonctions abéliennes correspondantes. (199-268).

Étant donnée une aire plane G, à un ou plusieurs contours, il existe, comme l'auteur l'a montré dans un précédent Mémoire (*Journal für Mathematik*, t. 83, p. 320), des fonctions $K(x)$ qui se comportent comme des fonctions rationnelles dans l'intérieur de G et aussi, en un certain sens, sur les contours de G, et qui sont réelles en tout point de ces contours. Elles s'expriment rationnellement en fonction de deux d'entre elles : p et q, qui sont liées par une relation algébrique $G(p, q) = 0$: si $(\rho + 1)$ est le nombre des contours de G, cette relation est de genre ρ.

L'auteur étudie ici les particularités qui se présentent, lorsque l'aire G est symétrique par rapport à un axe. Si chacun des contours de G est symétrique par rapport à l'axe, on obtient seulement des fonctions hyperelliptiques. Écartant ce cas, on a τ couples de contours deux à deux symétriques l'un de l'autre, et $(\rho + 1 - 2\tau)$ contours dont chacun admet l'axe pour axe de symétrie. Les fonctions abéliennes de ρ variables, auxquelles la relation $G = 0$ donne naissance, peuvent alors s'exprimer au moyen de fonctions abéliennes dépendant respectivement de τ variables, et de $\sigma = \rho - \tau$ variables seulement. Aux τ arguments des premières correspondent des intégrales abéliennes de première espèce qui se réduisent à des intégrales de genre τ. Il n'en est pas de même pour les autres, qui sont par suite particulièrement intéressantes.

M. Schottky donne l'expression effective des fonctions considérées, et des diverses fonctions qu'on leur associe dans la théorie des fonctions abéliennes, dans le cas $\tau = 1$. Les premiers termes des développements des fonctions thêta qui interviennent présentent des particularités caractéristiques; pour $\sigma = 4$, deux des fonctions thêta paires, et deux seulement, s'annulent en même temps que les variables.

L'auteur traite ensuite le problème suivant : Étudier les fonctions que l'on obtient en remplaçant, dans les quotients de fonctions thêta, les arguments par des intégrales prises entre deux points quelconques de la surface G.

Heffter (*L.*). — Sur certaines formules de récurrence pour les intégrales des équations différentielles linéaires homogènes. (269-282).

Les équations différentielles linéaires considérées sont à coefficients rationnels et à intégrales régulières. L'auteur établit une formule générale, d'où se déduit la formule de récurrence pour les coefficients de toute série qui satisfait à l'équation. Il en conclut l'existence, sous certaines hypothèses, d'intégrales uniformes dans le domaine d'un point singulier de l'équation. Il donne ensuite les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'une des intégrales soit un polynome entier de degré donné. Enfin il fait l'application des résultats obtenus à diverses classes d'équations linéaires.

Fuchs (*L.*). — Remarque sur le précédent Mémoire de M. Heffter sur la théorie des équations différentielles linéaires. (283-284).

En se servant de l'équation linéaire aux dérivées d'ordre r d'une équation linéaire donnée, de la classe considérée par M. Heffter, M. Fuchs établit immédiatement l'un des théorèmes obtenus par M. Heffter, à savoir :

Si l'équation fondamentale déterminante relative à $x = \infty$ a des racines négatives entières, et si $-r$ est celle de ces racines qui a la plus petite valeur absolue, l'équation considérée a pour intégrale un polynome entier de degré r.

Schafheitlin (*Paul*). — Contribution à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. (285-314).

Le but de l'auteur est de retrouver, par des moyens algébriques, les résultats fondamentaux obtenus par M. Fuchs sur la forme analytique des intégrales, dans ses premiers Mémoires sur les équations linéaires.

Les équations considérées peuvent être mises sous la forme

$$\sum_{k=0}^{n} q_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} = 0,$$

où $q_k(x)$ est un polynome de degré k au plus, sauf $q_n(x)$ qui est exactement de degré n. On peut ensuite les mettre sous une certaine *forme normale* qui est une généralisation de l'équation hypergéométrique de Gauss. Les propriétés fondamentales des intégrales et la forme de leurs développements, tant dans le voisinage d'un point ordinaire que d'un point singulier, sont ensuite mises en évidence sur cette forme normale.

Günther (*Paul*). — Sur une méthode pour déterminer l'équation fondamentale relative à un point singulier d'une équation différentielle linéaire homogène. (330-336).

Les coefficients de l'équation en question ont été donnés par M. Hamburger (*Journal für Mathematik*, t. 83, p. 193) sous forme de séries dans les termes desquelles interviennent les valeurs que prennent, pour un point du domaine du point singulier considéré, les dérivées successives des intégrales d'un système fondamental bien défini, prises par rapport au logarithme de la variable indépendante. Ce sont ces valeurs dont M. Günther donne une expression explicite, en fonction des coefficients de l'équation, en se servant d'un développement en séries des intégrales d'une équation linéaire dû à M. Fuchs (*Annali di Matematica*, t. 4, p. 36). Pour plus de netteté, le calcul est fait pour l'équation du second ordre. Application des résultats est faite à une équation étudiée par Cayley (*Journal für Mathematik*, t. 100, p. 293).

Stern (*M.-A.*). — Contribution à la théorie de la fonction Ex. (337-345).

Il s'agit de la fonction Ex de Legendre, ou $[x]$ de Gauss, c'est-à-dire du plus

grand entier positif contenu dans x. L'auteur obtient, par voie élémentaire, un grand nombre de formules relatives à cette fonction. Il détermine, par exemple, les valeurs des sommes suivantes

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} \mathrm{E}\frac{kn}{m}, \quad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} \mathrm{E}\frac{2kn}{m}, \quad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(m-1)} \left(\frac{kn}{m}+\frac{1}{2}\right),$$

sous diverses formes.

Kronecker (*L.*). — Remarques sur la fonction arithmétique d'une quantité réelle x, que Gauss désigne par $[x]$. (346-348).

Au moyen de la formule évidente

$$\mathrm{E}x = [x] = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{r=1}[1+\operatorname{sgn}(x-h)],$$

où r est un entier positif quelconque, supérieur à x, l'auteur vérifie les formules données par M. Stern dans l'Article précédent, et des formules données par M. Busche dans sa Thèse (Göttingen, 1883). On trouve aussi facilement

$$\sum_{k}\left[\frac{km}{n}\right] = \frac{1}{2}(m-1)(n-1) + \frac{1}{2}\sum_{h,k}\operatorname{sgn}\left(\frac{k}{n}-\frac{h}{m}\right)$$

$$(k=1, 2, \ldots, \overline{m-1};\ h=1, 2, \ldots, \overline{n-1});$$

d'où résulte aussitôt la formule connue

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{km}{n}\right] = \frac{1}{2}(m-1)(n-1).$$

Tome 107 (4 Cahiers, 352 pages et 2 Planches). Berlin; 1891.

Kohn (*Gustav*). — Sur les coniques de contact et les tangentes doubles de la courbe générale du quatrième ordre. (1-50).

L'auteur montre que la courbe générale C^4 du quatrième ordre peut être définie de la manière suivante. On considère les ∞^2 triangles T circonscrits à une conique J, qui sont définis par une équation du second degré entre les fonctions symétriques élémentaires des paramètres des points de contact de leurs trois côtés. C^4 est le lieu des points qui sont sommets d'un seul de ces triangles. Il existe deux systèmes quadratiques de coniques, Σ et Σ', dont chaque conique est circonscrite à ∞^1 triangles T : ce sont deux des 63 systèmes de coniques de contact de C^4. Inversement au système Σ correspondent 32 coniques J, dont chacune est enveloppe commune de ∞^1 triangles T inscrits dans l'une quel-

conque des coniques du système Σ, et cela donne en tout ∞^2 tels triangles correspondant à l'une quelconque de ces coniques J, suivant la loi énoncée. Par là est définie la correspondance, indiquée par Steiner, entre un quelconque des systèmes de coniques de contact et 32 autres systèmes.

Aux systèmes Σ et Σ' est associé un troisième système Σ'' de coniques de contact : chacune des coniques de Σ'' est le lieu des sommets des triangles T qui ont un côté fixe. La relation entre ces trois systèmes est symétrique.

En partant de ces considérations, l'auteur établit, par une méthode uniforme et purement géométrique, les théorèmes obtenus par Steiner, Hesse, Aronhold, etc., sur les systèmes de coniques de contact, et les tangentes doubles, qui proviennent des coniques de contact qui se décomposent en droites. Il retrouve, par exemple, la construction linéaire d'Aronhold pour obtenir toutes les tangentes doubles au moyen de sept d'entre elles, convenablement choisies. Enfin, M. Kohn obtient aussi nombre de résultats nouveaux.

Thomé (*L.-W.*). — Sur une application de la théorie des équations différentielles linéaires non homogènes. (51-79).

L'auteur applique les méthodes développées par lui dans ses précédents Mémoires (*voir* notamment *Journal für Mathematik*, t. 96) aux équations de la forme

$$\mathcal{F}(y, x) = \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = q,$$

où le premier membre est une expression différentielle pouvant s'exprimer par un système d'expressions différentielles normales (plus spécialement une expression différentielle régulière, ou à coefficients constants. Le second membre q est une somme de produits $R(x) F(x) Q(x)$ ainsi définis : $R(x)$ est une fonction rationnelle; $Q(x)$ est une fonction satisfaisant à une équation linéaire de la même nature que $\mathcal{F}(y, x) = 0$; enfin $F(x)$ est une fonction analytique partout uniforme, satisfaisant à une équation linéaire homogène connue à coefficients rationnels, dont les intégrales sont régulières en tous ses points singuliers, sauf un.

M. Thomé étudie successivement la forme des intégrales dans le domaine des points singuliers, leur calcul avec une approximation donnée, leur prolongement analytique, la détermination des substitutions linéaires qui interviennent dans le prolongement des intégrales, et l'introduction des logarithmes dans les développements des intégrales au voisinage des points singuliers.

Hermite (*Ch.*). — Sur les polynomes de Legendre. (Extrait d'une lettre adressée à M. F. Caspary). (80-83).

De l'intégrale définie

$$\int_0^\pi \frac{d\omega}{A + B - (A - B)\cos\omega} = \frac{\pi}{2\sqrt{AB}},$$

l'auteur déduit diverses expressions des polynomes P_n, données par Laplace, Jacobi, Mehler.

Puis il rattache à la théorie des fractions continues algébriques des identités

entre des polynomes P_n de degrés différents, dues à Jacobi et Beltrami. Il généralise en même temps l'identité de Beltrami.

Simon (*Max*). — Méthode élémentaire et géométrique pour obtenir la construction des parallèles dans la Géométrie absolue. (84-86).

Il s'agit de la construction du rayon parallèle à un rayon donné, mené par un point donné, obtenue par Bolyai et Lobatschewsky au moyen de la Trigonométrie. L'auteur en donne une justification purement géométrique et élémentaire.

Frischauf (*J.*). — Sur la théorie des fonctions sphériques. (87-88).

Simplification de la démonstration de M. H. Bruns (*Journal für Mathematik*, t. 90, p. 322 à 328) de ce théorème que $P_n(\cos\gamma)$ s'annule pour n infini, si $n\gamma$ devient infini $\left(\gamma \leq \frac{\pi}{2}\right)$, ou si $n(\pi-\gamma)$ devient infini $\left(\gamma > \frac{\pi}{2}\right)$.

Maurer (*L.*). — Sur la théorie des invariants. (89-116).

L'auteur expose les principes généraux d'une théorie générale des invariants des formes tant générales que spéciales.

Les formes seront réparties en classes, dont chacune contient les suivantes, et est caractérisée par un système d'équations entre les coefficients de la forme générale, du degré considéré. La forme générale d'une de ces classes est donc fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et des paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_t$ au moyen desquels s'expriment tous les coefficients (en vertu des équations qui caractérisent la classe). Pour en définir les invariants, on devra introduire des groupes de transformations, rationnelles par rapport aux x_i et u_k, transformant ces variables séparément, algébriques par rapport aux paramètres, et laissant invariante la forme considérée. Les invariants seront les fonctions des u_k qui restent inaltérées par les transformations de ces groupes. On peut aussi considérer des groupes dans lesquels les variables u_k seules seront transformées entre elles.

L'auteur montre comment la théorie des groupes de Lie conduira à introduire des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles, analogues au système des n^2 équations d'Aronhold. Il donne, à cet effet, une exposition des principes fondamentaux de la théorie des groupes de transformations.

M. Maurer termine par quelques indications générales sur la marche à suivre pour résoudre les problèmes généraux que les considérations précédentes l'ont conduit à poser.

Schottky (*F.*). — Sur la définition du système des quatrièmes fonctions thêta paires et impaires. (117-134).

Les fonctions thêta, étant définies comme des fonctions transcendantes entières jouissant des propriétés connues relativement aux périodes, ne sont déterminées qu'à des facteurs constants près. L'auteur cherche à déterminer ces facteurs par

la condition suivante : chaque fonction

$$\Theta_{aL}\Theta_{aM}\Theta_{aN}\Theta_{aLMN} : \Theta_a\Theta_{aLM}\Theta_{aLN}\Theta_{aMN},$$

doit se changer, par l'addition des demi-périodes correspondant à l'indice K, en la fonction de même nature

$$\Theta_{aKL}\Theta_{aKM}\Theta_{aKN}\Theta_{aKLMN} : \Theta_{aK}\Theta_{aKLM}\Theta_{aKLN}\Theta_{aKMN}.$$

(Les notations sont les mêmes que dans l'Article de l'auteur : *Journal für Mathematik,* t. 102, p. 313). Il en résulte que chaque fonction

$$\Theta_{aL}\Theta_{aM} : \Theta_a\Theta_{aLM}$$

se transforme, dans les mêmes conditions, en

$$\Theta_{aKL}\Theta_{aKM} : \Theta_{aK}\Theta_{aKLM}.$$

à un facteur ± 1, que l'auteur représente par le symbole (K, L, M). L'étude de ces facteurs permet d'aborder la question posée pour laquelle on arrive à la conclusion suivante : après avoir choisi arbitrairement ce qu'il y a d'indéterminé dans le symbole (K, L, M), l'une des fonctions (la fonction Θ) est déterminée à un facteur constant près, les fonctions $\Theta_\varkappa$, à des racines quatrièmes de l'unité près, et les fonctions $\Theta_{\varkappa\lambda}$ aux signes près.

Kronecker (*L.*). — Réduction des systèmes de n^2 éléments entiers. (135-136).

Il s'agit de réduire un déterminant à éléments entiers, par des transformations élémentaires (échange, addition ou soustraction des lignes ou des colonnes). On peut d'abord faire en sorte que le premier élément à gauche et en haut soit positif et divise les n^2 éléments; puis annuler tous les autres éléments de la première ligne et de la première colonne. On continue à opérer de même sur le mineur du premier élément, et ainsi de suite.... Dans le déterminant réduit, tous les éléments, sauf ceux de la diagonale principale, sont nuls; et chaque élément de la diagonale principale, qui n'est pas nul, est positif et divise tous les suivants. Cette réduction n'est possible que d'une seule manière.

Caspary (*F.*). — Sur quelques formules relatives aux fonctions sphériques. (Extrait d'une lettre adressée à M. Ch. Hermite à Paris). (137-140).

Plusieurs des formules relatives aux polynomes P_n, démontrées par M. Hermite dans l'Article analysé ci-dessus, sont établies en se servant d'une équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait la fonction $T = (1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$. L'auteur en déduit plusieurs autres relatives aux fonctions sphériques de seconde espèce, et données déjà, pour la plupart, par F. Neumann (*Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen.* Leipzig; 1878).

Hurwitz (*A.*). — Sur la construction de Schröter pour les courbes

planes du troisième ordre. (Extrait d'une lettre adressée à M. H. Schröter). (141-147).

La courbe est définie par trois couples de points correspondants; on en déduit d'autres, de proche en proche, en prenant les troisièmes couples de sommets opposés de quadrilatères complets dont deux couples de sommets opposés sont des couples de points correspondants déjà connus. Telle est la construction de Schröter. L'auteur montre que son application indéfiniment répétée, ou bien ne donne qu'un nombre limité de couples de points, ou bien en donne une infinité qui couvrent, avec une densité uniforme (*überall dicht*), soit une courbe du troisième ordre à une seule branche, soit la branche impaire seulement, soit les deux branches d'une cubique à deux branches.

Un théorème analogue s'applique à la construction, donnée également par Schröter, des biquadratiques gauches de première espèce, au moyen de systèmes de trois points.

Züge. — Le potentiel d'un anneau homogène à section elliptique. (148-161).

L'auteur rappelle une formule donnée par lui (*Journal für Mathematik*, t. 104) pour le potentiel des corps homogènes de révolution. Elle conduit, dans le cas actuel, au calcul de deux intégrales doubles ayant une ellipse pour champ d'intégration. L'auteur les ramène à des intégrales simples, en imitant la méthode employée par Gauss dans un cas analogue (*Werke*, t. III, p. 331). L'une des formules obtenues avait été donnée par F. Grube (*Journal für Mathematik*, t. 69, p. 6). Le potentiel cherché s'exprime donc par une intégrale double, qui ne se réduit que dans des cas particuliers.

Reye (*Th.*). — Sur les multiplicités linéaires de faisceaux de plans projectifs, et de réseaux de plans ou d'espaces tangentiels collinéaires (IV). (162-178).

[Suite du Mémoire commencé au Tome 104, et continué au Tome 106 de ce Journal.]

Après avoir remarqué que sa théorie donne une représentation effective des géométries à plus de trois dimensions, l'auteur étudie les multiplicités linéaires $|S_5|$ de ∞^5 réseaux de plans en relation collinéaire. A chacune d'elles correspond un complexe (d^3) du troisième degré, auquel appartiennent les génératrices de l'un des systèmes de deux familles de ∞^2 quadriques remarquables; les génératrices de l'autre système de toutes ces quadriques appartiennent à un même complexe.

L'étude des multiplicités analogues $|S_6|$, $|S_7|$, $|S_8|$, $|S_9|$, $|S_{10}|$ se résume au fond en ce résultat général que les multiplicités $|S_n|$ et $|S_{10-n}|$ se correspondent dualistiquement. Ce fait résulte de l'étude détaillée que fait l'auteur de chacune d'elles.

Stahl (*Wilhelm*). — Sur les figures projectives en involution. (179-188).

Une division de points

$$x_i = a_i + \lambda b_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

et un faisceau de plans

$$u_i = \alpha_i + \lambda \beta_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

qui sont en relation projective, sont en *involution,* si l'on a la relation

$$(a\beta) - (b\alpha) = 0 \qquad \left[(a\beta) = \sum_i a_i \beta_i,\ (ba) = \sum_i b_i a_i\right].$$

Il y a une multiplicité linéaire de ∞^{6-n} faisceaux de plans en involution avec toutes les divisions d'une multiplicité linéaire de ∞^n divisions (tous ces faisceaux et divisions étant en relation projective). De là résulte la dualité, signalée par Reye, entre les théories des multiplicités linéaires de ∞^n et ∞^{6-n} faisceaux de plans projectifs.

Si l'on considère des divisions et faisceaux de plans du second ordre, en relation projective

$$x_i = a_i + 2\lambda b_i + \lambda^2 c_i, \qquad u_i = \alpha_i + 2\lambda \beta_i + \lambda^2 \gamma_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

on dira qu'ils sont en *involution,* si l'on a

$$(a\gamma) - 2(b\beta) + (c\alpha) = 0.$$

Ils définissent des réseaux collinéaires

$$x_i = (a_i + \mu b_i) + \lambda(b_i + \mu c_i), \qquad u_i = \alpha_i + \mu\beta_i + \lambda(\beta_i + \mu\gamma_i),$$

qui seront dits aussi en involution. Et de là résultera une correspondance entre les multiplicités linéaires de ∞^n et ∞^{10-n} réseaux collinéaires. D'où, dans ce cas encore, la dualité signalée par Reye.

Ces considérations se généralisent pour les autres cas examinés par M. Reye, et pour d'autres encore : par exemple, en introduisant, à la place des points et des plans, des sphères, des surfaces quelconques, des complexes, etc.

Schottky (*F.*). — Le problème de l'interpolation pour les fonctions elliptiques. (189-195).

Les variables x et y étant liées par une relation algébrique de genre un, il s'agit de déterminer une fonction rationnelle de x et y qui prenne des valeurs données en un certain nombre de points (x, y) donnés. L'auteur cherche la fonction inconnue sous la forme d'un quotient de produits de fonctions thêta. Les conditions du problème étant convenablement précisées, la solution dépend de la résolution d'une équation du second degré, de sorte qu'il y a deux fonctions satisfaisant à la question.

M. Schottky se sert du résultat pour donner une forme explicite du théorème d'Abel pour les intégrales hyperelliptiques.

Schwering (*K.*). — Multiplication de la fonction sin*am u* lemniscatique. (196-240).

Il s'agit de la fonction $x = \sin am\, u$ définie par la relation

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

L'auteur traite, après divers auteurs, et en s'inspirant principalement des travaux d'Eisenstein et de Kronecker, le problème de la multiplication complexe. La fonction $y = \sin am\, \rho u$ ($\rho = \alpha + \beta i$, α impair, β pair) est donnée par une formule de la forme

$$y = \frac{\pm \varphi(x^4)}{x^{p-1}\varphi(x^{-4})}, \qquad \varphi(z) = z^\nu + a_1 z^{\nu-1} + \ldots + a_\nu,$$
$$\left[p = \alpha^2 + \beta^2,\ \nu = \frac{1}{4}(p-1)\right].$$

Tout revient à calculer $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$. Une première méthode consiste à se servir de l'identité

$$\frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}} = \rho \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}},$$

dont on développe les deux membres suivant les puissances de x. Elle donne divers résultats théoriques intéressants, mais conduit, pour des valeurs de p un peu élevées, à des calculs inextricables. Il en est de même d'une seconde méthode dans laquelle on cherche, au lieu des coefficients $a_1, a_2, \ldots$, les sommes des puissances semblables des racines de $\varphi(z^{-1}) = 0$.

Dans une troisième méthode, l'auteur pose

$$1 - y = (1 - x)\frac{[F(x)]^2}{x^{p-1}\varphi(x^{-4})}$$

et cherche à déterminer les coefficients de $F(x)$, qui est un polynome de degré 2ν. La solution est fondée sur la formule remarquable suivante :

$$F(x) = \frac{(x-1)^{2\nu}}{L}\left[1 - a_1\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + a_2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4 - \ldots\right]$$
$$[L = (1+i)^{3\nu} i^{\mathrm{ind}(1+i)}].$$

Les calculs sont possibles jusqu'à $p = 53$. De la formule précédente se déduit incidemment une démonstration de la loi de réciprocité pour les résidus biquadratiques.

Mais la vraie solution du problème consiste à chercher la valeur prise par le premier membre $\varphi(z)$ de l'équation de division pour les diverses racines d'une autre équation de division (pour laquelle le nombre p est premier). Ce calcul s'effectue par l'intermédiaire d'une résolvante en ω, dont l'étude fournit les propriétés essentielles de l'équation de division. Il en résulte une méthode pour déduire, par voie de récurrence, chaque équation de division d'autres plus simples : ce qui conduit à une infinité de relations entre les divers polynomes $\varphi(z)$.

De nombreux exemples numériques terminent le Mémoire.

Hensel (*K.*). — Contribution à la théorie des formes linéaires. (241-245).

Solution générale du problème suivant :

Étant données m formes linéaires des indéterminées $u_1, u_2, \ldots, u_n$, dont les coefficients sont des nombres rationnels d'une variable x, déterminer pour les $u_1, \ldots, u_n$ des valeurs entières (nombres entiers, ou polynomes entiers en x, respectivement) de manière que les formes données prennent aussi des valeurs entières.

Le problème est ramené à la résolution, en valeurs entières, d'un système de m congruences linéaires en $u_1, \ldots, u_n$, à coefficients entiers. La solution donnée par l'auteur consiste à le ramener à un système semblable, relatif à un module plus petit.

Pochhammer (*L.*). — Sur une intégrale multiple, réductible aux intégrales eulériennes. (246-253).

Par un développement en série et une intégration terme à terme, l'auteur obtient la formule

$$\int_0^\infty s^{-a}\,ds \int_0^1 e^{-st} t^b (1-t)^{c-1}\,dt = \Gamma(1-a)\,\mathrm{E}(a+b, c).$$

Il généralise ensuite, de proche en proche, et obtient

$$\int_0^\infty s^{-a}\,ds \int_0^1 \mathrm{S}_1\,ds_1 \int_0^1 \mathrm{S}_2\,ds_2 \ldots \int_0^1 \mathrm{S}_{m-1}\,ds_{m-1} \int_0^1 e^{-s(s_1 s_2 \ldots s_m)} \mathrm{S}_m\,ds_m$$
$$= \Gamma(1-a)\,\mathrm{E}(a+b_1, c_1)\,\mathrm{E}(a+b_2, c_2)\ldots\mathrm{E}(a+b_m, c_m)$$
$$[\mathrm{S}_\mu = s_\mu^{b_\mu}(1-s_\mu)^{c_\mu - 1}].$$

Il montre que la formule obtenue peut se généraliser en prenant pour l'une des intégrations un chemin d'intégration fermé à l'infini, au lieu du chemin réel de o à ∞.

Kronecker (*L.*). — Application des systèmes de modules à des questions de la théorie des déterminants. (254-261).

Les relations entre un déterminant et le déterminant adjoint (ou réciproque) sont une conséquence de l'équivalence des six systèmes de modules suivants :

$$\left.\begin{array}{ll} \left(\sum_i u_{gi} v_{ih} - \delta_{hg}\right), & \left(\sum_i v_{gi} u_{ih} - \delta_{gh}\right) \\ (\mathrm{UV}-1,\ v_{gh} - \mathrm{VU}_{gh}), & (\mathrm{UV}-1,\ u_{gh} - \mathrm{UV}_{gh}) \\ (\mathrm{UV}-1,\ \mathrm{U}_{gh} - v_{gh}\mathrm{U}), & (\mathrm{UV}-1,\ \mathrm{V}_{gh} - u_{gh}\mathrm{V}) \end{array}\right\} \quad (g, h, i = 1, 2, \ldots, n),$$

U et V sont les déterminants dont les u_{ik} et v_{ik} sont respectivement les élé-

ments; U_{ik} et V_{ik} désignent les éléments des systèmes adjoints; enfin δ_{gh} est égal à zéro ou à un, suivant que g et h sont différents ou égaux.

Cayley (*A.*). — Sur quelques problèmes d'orthomorphose. (262-277).

L'auteur compare diverses formules donnant la représentation conforme d'un carré sur un cercle : l'une due à Schwarz, l'autre provenant de la combinaison de résultats de Schwarz, une troisième déjà considérée par l'auteur (*Cambr. Phil. Transact.*, t. XIV, p. 484 à 494).

L'auteur montre ensuite que la formule

$$z_1 = \frac{\varphi(z)}{z^m \bar{\varphi}\left(\frac{1}{z}\right)},$$

où m est un entier, $\varphi(z)$ une fonction arbitraire et $\bar{\varphi}(z)$ la fonction conjuguée, donne la transformation conforme d'un cercle en un cercle. Mais elle n'est pas, en général, biuniforme.

Minkowski (*Hermann*). — Sur les formes quadratiques positives et les algorithmes analogues à celui des fractions continues. (*A suivre*). (278-297).

Soit f une forme définie positive des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, à discriminant non nul. Supposons la décomposée en carrés de fonctions linéaires à coefficients réels

$$\left.\begin{aligned} f &= \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 \\ \xi_a &= \pi_{a,1} x_1 + \pi_{a,2} x_2 + \ldots + \pi_{a,n} x_n \end{aligned}\right\} \quad (a = 1, 2, \ldots, n).$$

Et représentons par le point P, qui a pour coordonnées rectangulaires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, le système des valeurs de ces n formes linéaires, pour des valeurs quelconques attribuées aux x_i : la valeur correspondante de f, étant le carré de la distance $\overline{OP}$, est représentée par le même point. On considère tous les points P ainsi obtenus, quand on donne aux x_i tous les systèmes de valeurs entières possibles. On peut les grouper de la manière suivante : on imagine d'abord les points $P_1, P_2, \ldots, P_n$ obtenus en donnant à tous les x_i moins un la valeur zéro, et au dernier la valeur un, et l'on construit le parallélépipède sur les segments $OP_1, OP_2, \ldots, OP_n$; on imagine les parallélépipèdes égaux ayant une face commune avec le premier ; on opère de même pour ceux-là, et ainsi de suite. Le système de parallélépipèdes ainsi obtenu, dont les sommets sont les points P précédemment définis, constitue la représentation géométrique fondamentale de la forme f. Si l'on change la décomposition en carrés employée, cela ne fait que changer l'orientation dans l'espace du système des parallélépipèdes, mais non sa forme. Enfin les formes équivalentes à f sont représentées par les diverses manières de grouper les points P considérés en systèmes parallélépipédiques tels que celui qui vient d'être défini.

Soit M la plus petite distance de deux points P du système considéré, c'est-à-dire le *minimum* de f. L'auteur imagine que de chaque point du système

comme centre on décrive une sphère de rayon $\frac{1}{2}\sqrt{M}$, et déduit de la considération de toutes ces sphères, extérieures les unes aux autres, cette conséquence que le volume de chacune est inférieur à celui du parallélépipède fondamental, c'est-à-dire à $\sqrt{\Delta}$, Δ étant le discriminant de la forme f. De là résulte l'inégalité importante

$$M < \frac{2n}{\pi e}\sqrt[n]{n\pi e^{\frac{1}{3n}}\Delta} < n\sqrt[n]{\Delta}.$$

M. Minkowski en fait une application importante à la théorie des nombres algébriques. Soit $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ une base des nombres entiers d'un *corps* de nombres algébriques du $n^{\text{ième}}$ degré; les valeurs conjuguées des ω_k étant désignées par $\omega_k^{(h)}$, et le carré de leur déterminant par D, l'auteur considère la forme quadratique

$$f = \sum_{h=1}^{n} \lambda_h |\omega_1^{(h)} x_1 + \omega_2^{(h)} x_2 + \ldots + \omega_n^{(h)} x_n|^2,$$

où les λ_h sont des constantes positives. De l'inégalité obtenue en lui appliquant le résultat précédent résulte que pour chaque *idéal* il existe au moins un multiplicateur (relativement à la formation d'un *idéal principal*), dont la norme est inférieure à $\sqrt{D}$. On en conclut aussi que tout discriminant D contient en facteurs des nombres premiers, propriété fondamentale énoncée par Kronecker, mais non démontrée encore.

Günther (*Paul*). — Sur la détermination des équations fondamentales dans la théorie des équations différentielles linéaires. (298-318).

Comme il l'avait déjà fait dans un précédent Mémoire (*Journal für Mathematik*, t. 106, p. 330 et suivantes), l'auteur se sert des développements en séries partout convergentes donnés par Fuchs dans les *Annali di Matematica* (t. IV, p. 36 à 49) pour les intégrales des équations linéaires, en vue d'obtenir des expressions pour les coefficients de l'équation fondamentale relative à un point singulier. La nouvelle méthode qu'il donne ici est exposée en détail pour l'équation du second ordre; et l'auteur montre qu'on peut l'appliquer au cas général, en prenant pour inconnues auxiliaires les sommes des puissances semblables des racines de l'équation fondamentale.

M. Günther en conclut ce théorème de Poincaré :

Pour l'equation

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\frac{d^{n-k}J}{dx^{n-k}} = 0, \qquad p_0(x) = 1, \qquad p_k(x) = \sum_{h,\,i} \frac{A_{hki}}{(x-a_i)^h},$$

les coefficients des équations fondamentales sont des fonctions transcendantes entières des quantités A_{hki}. *Il le complète par diverses remarques sur les coefficients des séries représentant ces fonctions entières.*

Une autre application de la méthode exposée concerne la généralisation d'un théorème donné par Bruns pour une équation de la théorie des perturbations.

Stäckel. — Sur les équations différentielles de la Dynamique, et la notion de l'équivalence analytique des problèmes dynamiques. (319-348).

Sous le nom de *problèmes dynamiques*, l'auteur considère ceux qui se rapportent à des systèmes matériels dont l'état au temps t est défini par un nombre fini de paramètres : les liaisons et les forces agissantes ne dépendent que de la configuration du système, et non des vitesses, et il y a une fonction des forces.

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les paramètres, et soient

$$2T = \sum a_{kl} \frac{dp_k}{dt} \frac{dp_l}{dt} \qquad (a_{kl} = a_{lk}); \qquad U' = \sum_k P_k \, \delta p_k,$$

la force vive et le travail virtuel du système. Le mouvement est défini par les équations de Lagrange : l'auteur les résout par rapport aux dérivées secondes, ce qui lui donne le système

$$(S) \qquad \frac{d^2 p_i}{dt^2} = -\sum_{k,l} \left\{ \begin{matrix} k & l \\ & i \end{matrix} \right\}_a \frac{dp_k}{dt} \frac{dp_l}{dt} + \sum_j P_j a'_{ji} \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Les quantités a'_{ji} sont les éléments du déterminant réciproque de celui des a_{ji}; et les $\left\{ \begin{matrix} k & l \\ & i \end{matrix} \right\}$ sont les expressions introduites par Christoffel, Lipschitz, Weingarten

$$\left\{ \begin{matrix} k & l \\ & i \end{matrix} \right\}_a = \sum_j a'_{ji} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial p_l} + \frac{\partial a_{lj}}{\partial p_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial p_j} \right).$$

Deux systèmes dynamiques sont dits *analytiquement equivalents*, s'ils dépendent du même nombre de paramètres, et si l'on peut choisir ces paramètres de manière que les systèmes différentiels (S) correspondants soient les mêmes.

De là le problème suivant :

Connaissant T *et* U', *determiner de la manière la plus générale*

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} w_{kl} \frac{dp_k}{dt} \frac{dp_l}{dt} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{V}' = \sum_k V_k \, \delta p_k,$$

de manière que l'on ait les relations

$$\left\{ \begin{matrix} k & l \\ & i \end{matrix} \right\}_w = \left\{ \begin{matrix} k & l \\ & i \end{matrix} \right\}_a, \qquad \sum_j V_j w'_{ji} = \sum_j P_j a'_{ji} \qquad (k, l, i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les équations du deuxième groupe déterminent les V_j, *quand on a calculé les* w_{kl}. *Tout revient à determiner ceux-ci au moyen du premier groupe d'equations.*

L'auteur montre que, tant que T ne satisfait pas à certaines équations aux dérivées partielles, il n'y a que la seule solution

$$\tilde{\mathrm{T}} = c\mathrm{T} \qquad (c = \text{constante arbitraire})$$

qui entraîne

$$\tilde{\mathrm{U}}' = c\mathrm{U}'.$$

Elle correspond à la *similitude mécanique* (Newton, J. Bertrand). On peut faire disparaître la constante arbitraire, par un choix convenable des unités de longueur, masse, force et temps. On est donc en droit d'affirmer que, dans le cas général, la condition nécessaire et suffisante de l'équivalence analytique de deux problèmes dynamiques est que les expressions correspondantes de la force vive et du travail virtuel se transforment l'une dans l'autre (respectivement) par une même transformation effectuée sur les paramètres. Les problèmes dynamiques sont ainsi répartis en classes, et dans chacune d'elles on peut considérer comme problème normal celui qui concerne le mouvement d'un point matériel de masse un dans un espace à n dimensions d'élément linéaire déterminé.

Les résultats généraux obtenus sont appliqués au cas $n = 2$, et au mouvement d'une droite rigide, en particulier dans une congruence et sur une surface réglée.

Kronecker (*L.*). — Sur un passage de l'article de Jacobi : *Observatiunculæ ad theoriam æquationum pertinentes.* (Extrait d'une Lettre à M. Weierstrass). (349-352).

Dans ce passage, Jacobi caractérise une fonction rationnelle de cinq lettres comme étant invariable par deux substitutions dont l'une résulte de l'autre par permutation circulaire des lettres, et par suite semble inutile. Et, en fait, elle a été supprimée dans le Tome III des *Œuvres complètes* de Jacobi. Cayley remarque que cependant Jacobi paraît avoir pensé à une fonction semi-métacyclique, et non à une fonction cyclique : il propose en conséquence de changer la seconde substitution. L'auteur préférerait l'addition de deux mots dans le texte primitif, ce qui rétablirait aussi la pensée de Jacobi.

M. Kronecker généralise de plus le raisonnement de Jacobi pour le cas d'un nombre impair quelconque de lettres.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO. In-8°. Torino, C. Clausen.

Tome XXXIV; 1898-1899.

Picard (*Ém.*). — [H3*b*]. Sur la résolution de certains problèmes de Mécanique par des approximations successives. (Extrait d'une lettre à M. Volterra). (6-10).

A propos des Articles de M. Volterra sur une classe d'équations de la Dyna-

2me Partie.

mique, M. Picard rappelle une Note publiée par lui-même dans les *Comptes rendus* (février 1897), qui a quelques analogies avec le sujet traité par M. Volterra.

Soit le système d'équations différentielles

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

les fonctions réelles f des variables réelles x, y_i étant finies et déterminées pour x compris dans un certain intervalle I, et les $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ étant toujours inférieures à un nombre fixe N, pendant que ces y varient entre $-\infty$ et $+\infty$ et que x reste comprise dans I. Alors tout système d'intégrales qui pour $x = x_0$ prend des valeurs finies $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ est fini et bien déterminé, et peut être obtenu par séries, par des approximations successives (PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III). M. Picard applique cette remarque au problème du mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe, en montrant qu'on peut obtenir les p, q, r, γ, γ', γ'' par des séries convergentes pour toute valeur du temps.

Observations analogues pour les équations

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

et pour les équations canoniques

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}, \\[2ex] \dfrac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}. \end{cases}$$

Pour ces dernières, par exemple, l'auteur complète les équations suivantes, où le variable τ remplace le t,

$$\frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\dfrac{\partial H}{\partial q_i}}{H},$$
$$\frac{dq_i}{d\tau} = \frac{\dfrac{\partial H}{\partial p_i}}{H},$$

qui, en supposant H continue et positive, et les dérivées des seconds membres inférieures à un nombre fixe, permettent d'exprimer les p et les q par séries pour toute valeur de τ. Entre τ et t, il y a une relation linéaire

$$\tau = \alpha t + \beta,$$

à cause de l'intégrale H = const. qui appartient aux (1) aussi bien qu'aux (2).

Lauricella (*Jos.*). — [T2*a*]. Sur les développements en série de solutions exceptionnelles de l'élasticité. (11-24).

Développements des déplacements initiaux et des vitesses initiales en série de solutions exceptionnelles des équations des vibrations élastiques, par une méthode analogue à celle suivie par le même auteur dans sa Note sur la propagation de la chaleur (ces *Atti*, 1897-1898, p. 969).

Peano (*Jos.*). — [I I]. La numération binaire appliquée à la sténographie. (47-55).

En faisant correspondre les rayons d'une étoile octogone (la direction de ces rayons étant fixée) aux huit premières unités du système binaire, c'est-à-dire aux nombres 2^i ($i = 0, 1, \ldots, 8$), on a le moyen d'écrire les 256 premiers nombres (représentés dans le système binaire) par des figures qui ne soient que des combinaisons de ces rayons. En établissant, d'après certaines règles et avec un certain ordre, une correspondance entre ces 256 figures et les sons d'une langue, qui sont à peu près dans ce nombre, on a un système de sténographie applicable aussi à des machines à écrire.

Chini (*Mineo*). — [H 4*g*]. Sur certaines équations différentielles. (56-66).

Recherche inverse de celle de la Note : *Sur l'équation différentielle du deuxième ordre linéaire homogène* (ces *Atti*, 1897-1898, p. 737). Quels doivent être les coefficients d'une équation différentielle d'ordre $m+1$, équivalente à son adjointe, afin qu'elle soit vérifiée par toute forme de degré m de deux solutions d'une équation du deuxième ordre linéaire homogène?

Almansi (*Émile*). — [H 10*e*]. Sur l'intégration de l'équation différentielle $\Delta_2 \Delta_2 = 0$. (92-110).

Le problème se réduit à la résolution d'un système d'un nombre infini d'équations avec un nombre infini d'inconnues, et l'auteur établit ce système en s'appuyant sur un théorème qui subsiste pour des contours satisfaisant à certaines conditions, et qui est le suivant :

Soit s le contour de l'aire σ considérée, et s_1 une ligne fermée extérieure à ce contour. Si l'équation

$$\int_s \lambda \frac{\partial w}{\partial \nu} ds = 0$$

est satisfaite pour une fonction quelconque w, harmonique dans s_1, et si l'on a aussi

$$\int_s \lambda \, ds = 0,$$

on aura $\lambda = 0$ en tout point où λ est continue.

Porro (*Franç.*). — [U]. Sur l'éclipse totale de lune du 27 décembre 1898. (186-191).

Volterra (*V.*). — [R8*e*]. Sur une classe de mouvements permanents stables. (247-255).

Certaines propriétés relatives à la stabilité des rotations de systèmes ayant des mouvements intérieurs stationnaires (même auteur, *Annali di Matematica*, t. XXIII) sont étendues ici à un cas général de mouvements à caractéristiques indépendantes (ces *Atti*, 1897-1898; *Sur une classe d'équations dynamiques*). Le cas considéré est celui des mouvements permanents, c'est-à-dire pour lesquels les caractéristiques p_ν sont constantes, et la *stabilité* d'un mouvement permanent consiste en ceci, que, σ étant un nombre arbitraire, on peut trouver un nombre ε tel qu'une perturbation du mouvement produisant dans les caractéristiques une variation $< \varepsilon$ ait pour conséquence que dans le mouvement perturbé les caractéristiques diffèrent en chaque instant de moins de σ des valeurs correspondantes qu'elles ont dans le mouvement permanent.

Les p sont supposées choisies de manière à avoir

$$T = \tfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_\nu^2),$$
$$F = \tfrac{1}{2}(\lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2 + \ldots + \lambda_\nu p_\nu^2) + q_1 p_1 + q_2 p_2 + \ldots + q_\nu p_\nu.$$

On a alors la proposition suivante :

Aux maxima et minima effectifs de F (*de* T), *la condition* T = const. (F = const.) *étant satisfaite, correspondent des mouvements permanents stables.*

L'auteur démontre qu'il y a toujours des mouvements stables, et en étudie les petites perturbations en démontrant qu'elles sont périodiques.

Daniele (*Herménégilde*). — [R4*b*α]. Quelques observations préliminaires sur la théorie du mouvement des surfaces. (256-272).

Expression des forces que l'on doit ajouter aux points d'une surface et à ceux de son contour, pour la maintenir en équilibre, dans l'hypothèse que la surface étant d'abord flexible et inextensible, et en équilibre, elle devienne extensible, exception faite le long des lignes u et v, en se réduisant ainsi à un tissu. L'auteur ajoute quelques considérations sur le cas où l'on ne modifie pas les forces appliquées à la surface, et où par conséquent la surface, en perdant son inextensibilité, prend un mouvement. *Voir* ci-dessous la modification à cette Note (ces *Atti*, même Tome, p. 515).

Giudice (*Franç.*). — [K6*a*]. Angle de deux droites et de deux plans. Perpendicularité et parallélisme en coordonnées homogènes. (277-291).

Severini (*Ch.*). — [D1*b*ε]. Sur la représentation analytique des fonctions réelles discontinues d'une variable réelle. (325-345).

Cette représentation approchée au moyen d'un polynome rationnel (ces *Atti*,

1897-1898; SEVERINI, même titre, p. 1002), semblable à celle que Weierstrass a donnée pour les fonctions continues, présente des cas où, en faisant diminuer l'erreur, les coefficients du polynome tendent à l'infini. L'auteur, après avoir donné des exemples de cet inconvénient, expose une méthode qui peut servir à l'éviter.

Segre (*Corrade*). — [V9]. Sophus Lie. Notice. (363-366).

Volterra (*Vito*). — [R5*a*]. Sur le flux d'énergie mécanique. (366-375).

Le flux unitaire a pour composantes

$$E_x = \frac{U}{4\pi} X' + \rho\left(\frac{V^2}{2} - U\right) u + \tau_x V,$$

$$E_y = \frac{U}{4\pi} Y' + \rho\left(\frac{V^2}{2} - U\right) v + \tau_y V,$$

$$E_z = \frac{U}{4\pi} Z' + \rho\left(\frac{V^2}{2} - U\right) w + \tau_z V,$$

étant

X', Y', Z' les dérivées des composantes de la force newtonnienne unitaire au point considéré;
u, v, w les composantes de la vitesse;
τ_x, τ_y, τ_z celles de la tension élastique unitaire exercée sur l'élément normal à la direction de la vitesse;
U la fonction potentielle newtonnienne;
ρ la densité;
V la grandeur de la vitesse de la matière.

Dans une région dépourvue de matière on a

$$E_x = \frac{U}{4\pi} X',$$

$$E_y = \frac{U}{4\pi} Y',$$

$$E_z = \frac{U}{4\pi} Z'.$$

Pour une surface de niveau extérieure aux masses du système on a que la quantité totale d'énergie qui entre à chaque instant à travers cette surface est égale à celle qui sort dans le même instant.

Guidi (*Camille*). — [T2]. Sur un problème d'élasticité. (376-377).

Étant η le maximum du déplacement d'un point d'un système élastique, dû à l'action d'un poids P qui tombe d'une hauteur h (déplacement dynamique),

et y étant le déplacement produit par la charge P, appliquée sans chute, on a

$$\tau_1 = y\left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{h}{y}}\right).$$

Fano (*G.*). — [H4*d*]. Sur les équations différentielles linéaires qui appartiennent à la même espèce que leurs adjointes. (388-409).

On dit qu'une équation différentielle linéaire homogène

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0$$

appartient à la même espèce qu'une autre équation semblable

$$q_0 z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + \ldots + q_n z = 0,$$

lorsqu'on peut obtenir l'une de l'autre par une substitution

$$z = a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_{n-1} y^{(n-1)},$$

les a_i étant des fonctions appartenant au champ de rationalité défini par les p_i.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation (1) soit de même espèce que son adjointe

$$z^{(n)} - (p_1 z)^{(n-1)} + (p_2 z)^{(n-2)} - \ldots + (-1)^n p_n z = 0,$$

est que son groupe de rationalité soit composé de substitutions qui transforment en elle-même une forme bilinéaire à déterminant $\geqq 0$. Une telle forme bilinéaire doit s'annuler identiquement en substituant à ses deux séries de variables les solutions y_i et z_i des deux équations, ou bien leurs dérivées d'ordres p, q, étant $p + q \leqq n - 2$. Cette condition se modifie, relativement aux ordres de ces dérivées, lorsqu'on veut que la substitution, par laquelle on passe d'une équation à son adjointe, ne contienne les dérivées de la fonction que jusqu'à un certain ordre $< n - 1$. De ces conditions l'auteur donne aussi une interprétation géométrique dans l'espace S_{n-1}. Les solutions y_i peuvent être considérées comme coordonnées d'un point de S_{n-1}, qui, pour les diverses valeurs de x, décrit une courbe appelée *courbe intégrale* de l'équation (courbe *attachée,* suivant Halphen). Les considérations géométriques mentionnées consistent principalement dans l'usage de ces courbes et dans l'interprétation des substitutions

$$z_i = a_0 y_i + \ldots + a_{n-1} y_i^{(n-1)},$$

comme étant des collinéations dans l'espace S_{n-1}.

Enfin l'auteur considère le cas où une équation coïncide avec sa propre adjointe.

Fano (*Gino*). — [H4*g*]. Sur les équations différentielles linéaires du cinquième et du sixième ordre, dont les courbes intégrales sont sur une quadrique. (415-445).

Les courbes intégrales (*voir* ci-dessus FANO, ces *Atti*, même Tome, p. 388) sont sur une quadrique de S_5 (pour le sixième ordre), lorsque, entre les six solutions z_i, il y a une relation quadratique à déterminant $\gtrless 0$, que l'on peut supposer de la forme

$$z_1 z_2 + z_3 z_4 + z_5 z_6 = 0.$$

On peut aussi, à la suite de cette relation, considérer les z_i comme coordonnées d'une droite dans l'espace S_3; alors, au lieu d'une courbe intégrale, on a une surface réglée intégrale, qui devient une développable lorsqu'on a aussi

$$z'_1 z'_2 + z'_3 z'_4 + z'_5 z'_6 = 0,$$

z'_i étant la dérivée de z_i par rapport à x. A l'aide des propriétés géométriques de ces surfaces, l'auteur démontre, autant pour le sixième que pour le cinquième ordre, que l'intégration de l'équation se ramène à celle d'une équation linéaire du quatrième ordre.

Marre (*Aristide*). — [V]. Des noms de nombres en usage dans Madagascar, aux Philippines, dans la Malaisie et dans la Polynésie. (447-458).

En français.

Mittag-Leffler (*Gustave*). — [D4]. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. (481-491).

Étant donnée une fonction analytique par un de ses éléments, trouver une expression arithmétique qui représente cette fonction, ou plutôt une branche uniforme de cette fonction, dans le champ le plus grand possible.

Voilà le problème.

La continuation analytique peut bien servir à la définition de la fonction, mais, comme l'observe l'auteur, ne serait qu'un moyen très compliqué de représentation. Sur le problème indiqué, on avait déjà des travaux remarquables de Runge (*Acta mathematica*, t. VI; 1885), Painlevé (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXVI; 1898), Hilbert (*Nachrichten de Gottingue;* 1897), Borel (*Journal de Mathem.*, 2e série, t. II; 1896, et *Leçons sur la théorie des fonctions*. Paris, 1898), chez lesquels toutefois tantôt le champ n'était pas le plus grand possible, tantôt la représentation, déduite de la formule de Cauchy en transformant l'intégrale en une somme d'un nombre infini de fonctions rationnelles, exigeait la connaissance des valeurs de la fonction en un nombre infini de points.

La solution de Mittag-Leffler est complète et ne dépend que de l'élément donné

$$P(x|a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(\mu)} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu},$$

ou, ce qui revient au même, des valeurs de la fonction et de toutes ses dérivées,

en un point. Une notion capitale dans cette solution est celle d'*étoile*, introduite pour la première fois par l'auteur. En considérant sur un rayon quelconque, issu du point donné a, les continuations analytiques de $P(x|a)$, il peut arriver que tout point du rayon appartienne au cercle de convergence de quelqu'une de ces continuations, ou bien que l'on rencontre un point qui n'appartienne plus à aucun de ces cercles; en tel cas on exclut du plan toute la partie du rayon qui est entre ce point et l'infini. On fait de même pour tous les rayons partant de a, et l'ensemble de ces rayons, ainsi coupé s'il y a lieu, est ce que l'auteur appelle *étoile* A appartenant aux éléments $F^{(\mu)}(a)$. Cela posé, on a le théorème suivant :

On peut toujours trouver un nombre N *tel que, pour* $n > N$, *on ait pour la fonction donnée* $F(x)$ *dans tout champ fini intérieur à l'étoile*

$$|F(x) - g_n(x)| < \sigma,$$

étant σ *un nombre positif arbitraire et* $g_n(x)$ *un polynome donné par*

$$g_n(x) = \sum_{(\nu)} c_\nu^{(n)} F^{\nu}(a)(x-a)^\nu,$$

où les $c_\nu^{(n)}$ *sont données* a priori *indépendamment des données du problème.*

On déduit de là que la fonction $F(x)$ est aussi donnée par une série

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x),$$

de polynomes

$$G_\mu(x) = \sum_{(\nu)} \varepsilon_\nu^\mu F^{\nu}(a)(x-a)^\nu,$$

les ε_ν^μ ne dépendant que de μ, ν, et étant

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x) = \lim_{\mu=\infty} g_\mu(x).$$

Volterra (V.). — [D4 ref. R8*e*]. Sur quelques applications de la représentation analytique des fonctions de M. le professeur Mittag-Leffler. (492-494).

L'auteur observe l'application que l'on peut faire des développements de M. Mittag-Leffler à certains problèmes mécaniques, en supposant que les éléments inconnus soient des fonctions analytiques du temps, considéré comme une variable complexe. Lorsqu'on peut s'assurer que l'axe réel des temps est intérieur aux *étoiles* (*voir* la Note précédente de Mittag-Leffler) qui appartiennent à ces fonctions, et dont le centre est l'origine des temps, on peut avoir les inconnues développées suivant la méthode de Mittag-Leffler.

Comme questions qui se prêtent à cette application, l'auteur cite : la classe

de questions dynamiques conduisant à des équations du type

$$p'_s = \sum_1^{\nu}{}_r \sum_1^{\nu}{}_k a_{sk}^{(r)} p_k p_r \qquad (a_{sk}^{(r)} + a_{ks}^{(r)} = 0);$$

le cas d'un point attiré par plusieurs centres newtonniens en ligne droite; et celui de n points se repoussant suivant la loi newtonnienne.

Cazzaniga (*Titus*). — [B1*e*]. Sur les réciproques des déterminants normaux. (495-514).

Un déterminant d'ordre infini $D = [a_{ik}]$ est normal lorsque la série double des éléments non principaux et le produit infini des éléments principaux sont convergents. Définition et quelques propriétés des mineurs. Le réciproque d'un normal est aussi normal, et il a certaines propriétés analogues à celles des réciproques des déterminants finis. Quelques observations sur les transformations linéaires dans un espace d'un nombre infini de dimensions.

Daniele (*Herménégilde*). — [R4*b*α]. A propos de ma Note : *Quelques observations préliminaires sur la théorie du mouvement des surfaces*. (515-517).

Modification à apporter dans certaines formules de cette note (*voir* ci-dessus), dans laquelle il n'avait pas considéré la densité de l'élément superficiel, qui vient à changer lorsque la surface perd son inextensibilité.

Severini (*Charles*). — [D1*b*]. Sur la représentation analytique des fonctions réelles discontinues d'une variable réelle. (518-534).

Étant $f(x)$ une fonction généralement continue et n'ayant que des discontinuités de première espèce, on peut construire, d'une infinité de manières, une série de fonctions représentant $f(x)$ aux points de continuité, et donnant la moyenne arithmétique des deux limites, aux points de discontinuité.

Bemporad (*Azeglio*). — [N'1*i*]. Complexes du deuxième degré constitués par les normales à une série de courbes planes. (535-546).

Ces normales forment en général un complexe dont le degré est égal à l'ordre de la podaire d'un point du plan par rapport à la série. L'auteur cherche donc les séries dont la podaire est une conique, et trouve que ce sont en général les trajectoires orthogonales des trajectoires d'un groupe projectif engendré par une transformation infinitésimale. Le complexe est toujours tétraédral.

Young (*Grace Chisholm*). — [Q2 ref. K20*f*]. Sur la variété

2nd Partie.

rationnelle normale M_3^4 de S_6 représentant la trigonométrie sphérique. (587-596).

Les M_3^4 de l'espace S_6 peuvent être de deux espèces : Ou composées de simples séries rationnelles de plans, ou bien des cônes coupés par un S_5 suivant une surface du quatrième ordre de Véronèse.

L'auteur démontre que l'M_3^4 que l'on obtient en prenant

$$\rho x_1 = \cot\frac{\alpha_2}{2}\cot\frac{\alpha_3}{2},$$

$$\rho x_2 = \cot\frac{\alpha_3}{2}\cot\frac{\alpha_1}{2},$$

$$\rho x_3 = \cot\frac{\alpha_1}{2}\cot\frac{\alpha_2}{2},$$

$$\rho x_4 = \cot\frac{\alpha_2}{2}\cot\frac{\alpha_3}{2},$$

$$\rho x_5 = \cot\frac{\alpha_3}{2}\cot\frac{\alpha_1}{2},$$

$$\rho x_6 = \cot\frac{\alpha_1}{2}\cot\frac{\alpha_2}{2},$$

$$\rho x_7 = 1,$$

et dont les points représentent les triangles sphériques, appartient à la première espèce; et il en trouve aussi la série de plans, la réglée directrice minima qui est une quadrique, et les courbes directrices minima qui sont les droites d'un système de cette quadrique. Les ∞^2 triangles représentés par les points de la quadrique sont infinitésimaux, c'est-à-dire qu'ils ont tous leurs éléments $\equiv 0 \pmod{2\pi}$, et la classe de ces triangles a des relations remarquables avec celle des triangles minima, dont les trois sommets coïncident, et avec celle des triangles maxima dont les trois côtés sont sur un même grand cercle.

Young (*W.-H.*). — [Q2 réf. K6*b*]. Sur les syzygies qui lient les relations quadratiques entre les coordonnées d'une droite en S_4. (596-599).

Entre les dix coordonnées il y a cinq relations quadratiques, entre ces relations il y a cinq syzygies, et une autre (syzygie double) lie ces dernières. L'auteur trouve ces relations et indique l'application qu'on en peut faire à la détermination de la fonction caractéristique de Hilbert $\chi(R)$ qui représente le nombre des constantes essentielles dans l'équation d'un complexe général d'ordre R.

Gabba (*Louis*). — [U]. Éphémérides du Soleil et de la Lune pour l'horizon de Turin et pour 1900. (630-648).

Carrera (*Louis*). — [U]. Les heures de Soleil relevées à Turin

à l'aide de l'héliophanomètre dans la période 1896-1898. (649-665).

Aimonetti (*César*). — [R5]. Détermination de la gravité relative dans le Piémont. (714-725).

Levi (*Beppo*). — [Q2]. Sur l'intersection de deux variétés renfermées dans une variété simplement infinie d'espaces. (745-760).

Volterra (*Vito*). — [R5*a*]. Sur une application des lois du flux d'énergie mécanique au mouvement de corps qui s'attirent suivant la loi de Newton. (805-817).

Cas de *n* sphères. Cas de deux sphères qui tombent l'une sur l'autre. Cas du mouvement non perturbé, l'excentricité de l'orbite étant négligeable.

Pour les *n* sphères, l'auteur trouve le théorème suivant :

Les lignes de flux de l'énergie mécanique dans l'espace extérieur aux masses données coïncident avec les lignes de force magnétique que l'on aurait en plaçant au centre de chaque sphère un élément magnétique dont le moment soit égal et contraire à la quantité de mouvement de la sphère.

Il en déduit cet autre qui donne une représentation même plus claire du flux d'énergie :

Substituons à chacune des sphères données une sphère infinitésimale concentrique, dont le volume soit proportionnel à la masse de la première, et supposons que l'espace soit à chaque instant rempli d'un fluide incompressible, sans tourbillons et en repos à l'infini, ayant la densité égale à la fonction potentielle des sphères données. Le flux d'énergie sera proportionnel et opposé au flux produit dans le fluide par le mouvement des sphères infinitésimales.

Pour les deux sphères tombant l'une sur l'autre, l'auteur donne les équations et la construction des lignes de flux. Enfin, le flux étant un infiniment petit du cinquième ordre, il trouve les parties du cinquième ordre de ses composantes.

Jadanza (*Nicodème*). — [J2*e*]. Errata relatif à la Note intitulée : *Quelques observations sur le calcul de l'erreur moyenne d'un angle dans la méthode des combinaisons binaires,* insérée aux *Atti dell' Accademia*, Vol. XXXIII, p. 883; années 1897-1898. (966-967).

Pizzetti (*Paul*). — [J2*e*]. Sur le calcul de l'erreur moyenne

d'un angle dans la méthode des combinaisons binaires. (1013-1019).

Observations sur la Note de M. Jadanza (t. XXXIII, 1897-1898, p. 883).

Tedone (*Horace*). — [T2]. Sur les équations de l'élasticité en coordonnées curvilignes. (1054-1061).

RENDICONTI DEL R. ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE.
Série II^a. Gr. in-8°. Milano, tip. di Gius. Bernardoni.

Tome IX; 1876.

Bardelli (*Jos.*). — [B2$c\alpha$]. Quelques propriétés des coefficients d'une substitution orthogonale. (167-174).

Relations entre les coefficients a_{rs} et leurs dérivées premières et secondes a'_{rs}, a''_{rs} par rapport à un paramètre dont ils sont supposés être des fonctions. Le déterminant des a'_{rs} est zéro pour n impair, et pour n pair est un carré. Dans ces recherches jouent un rôle remarquable les quantités

$$p_{rs} = a_{r1}a'_{s1} + \ldots + a_{rn}a'_{sn}.$$

Saint-Robert (*Paul de*). — [S4a]. Sur la chaleur qui doit se produire dans l'expérience imaginée par Galilée pour mesurer la force de percussion. (174-179).

Aschieri (*F.*). — [L^{2}7a]. Sur les surfaces gauches du 2e degré, représentées en coordonnées homogènes de droites. (222-227).

Jung (*Jos.*). — [R4d]. Sur le problème inverse des moments d'inertie d'une figure plane; solution graphique générale. (388-398).

Étant donnée une figure plane F', construire une figure F homothétique à F' et telle que son rayon d'inertie par rapport à un axe donné soit égal à un segment donné, et que le centre de gravité soit en un point donné.

Voir ce même Tome, page 597.

Pincherle (*S.*). — [O6*h*]. Sur quelques problèmes relatifs aux surfaces minima. (444-456).

Applications des méthodes générales, avec quelques simplifications, à certains cas du problème de déterminer une surface minima passant par une courbe donnée et dont les normales sur cette courbe sont assignées. Les cas traités ici sont ceux où les normales :

1° Sont parallèles à un plan donné ;

2° Font un angle constant avec une droite fixe.

Jung (*Jos.*). — [R4*d*]. Sur le problème inverse des moments de résistance d'une section plane; solution graphique générale. (514-518).

Casorati (*Félix*). — [H8*e*]. Sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles. (522-533).

Équations du premier ordre algébriques, dont l'intégrale complète est aussi algébrique rationnelle et entière par rapport à x, y, z et aux deux constantes arbitraires ξ, η. Étant

$$f(x, y, z, \zeta, \eta) = 0$$

l'intégrale, et

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0$$

l'équation différentielle donnée, l'élimination de ζ, η entre $f = 0$ et ses dérivées donne lieu à une relation

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

et l'on peut avoir

$$F = \theta\varphi,$$

θ étant une fonction rationnelle entière de x, y, z. Tout facteur de θ donne une solution impropre. Pour avoir les solutions singulières, il faut considérer le discriminant de f par rapport à ξ, η et celui de φ par rapport à p, q. Étant m le degré de f en ξ, η, pour $m = 1$ on n'a pas de solutions singulières, pour $m = 2$ l'auteur examine les cas où F est du 2e, 3e ou 4e degré en p, q.

Colombo (*Jos.*). — [R9*d*]. Sur les distributions à boîte. (589-597).

Jung (*Jos.*). — [R4*d*]. Sur le problème inverse des moments d'inertie et de résistance d'une section plane. Note III. (597-600).

Voir ce même Tome, p. 388 et 514.

Jung (*Jos.*). — [R4*a*]. Représentations graphiques des moments de résistance d'une section plane. (600-606).

Voir le complément, p. 647.

Sayno (*Ant.*). — [T2*b*]. Sur la poussée oblique des sections planes des prismes. (606-616).

Jung (*Jos.*). — [R4*d*]. Complément à la Note : Représentations graphiques des moments de résistance d'une section plane. (647-652).

La Note est à la page 600. Ici l'auteur relève certaines relations entre ses résultats et ceux de M. Sayno (p. 606) et de M. Ritter (*Civilingenieur*, Cahiers III et IV; 1876).

Beltrami (*Eug.*). — [R5*a*]. Considérations sur une loi potentielle. (725-733).

Étant $\varphi(r)$ la fonction potentielle élémentaire d'une action à distance, et $\psi(r)$ une fonction définie par

$$\psi'(r) = r\varphi(r),$$

la fonction potentielle d'une surface sphérique, dont a est le rayon, est donnée par

$$v_e = \frac{2\pi a}{r}[\psi(r+a) - \psi(r-a)],$$

$$v_i = \frac{2\pi a}{r}[\psi(a+r) - \psi(a-a)]:$$

celle de la masse sphérique par

$$V_e = \frac{2\pi}{r}\int_0^a k(s)[\psi(r+s) - \psi(r-s)]\,ds,$$

$$V_i = \frac{2\pi}{r}\left[\int_0^a k(s)\psi(r+s)\,ds - \int_0^r k(s)\psi(r-s)\,ds - \int_r^a k(s)\psi(s-r)\,ds\right],$$

où

$$k(r) = rh(r),$$

$h(r)$ étant la densité.

En supposant que $\varphi(r)$ et $h(r)$, définies pour les seules valeurs positives de r, soient des branches de fonctions paires, on peut les continuer pour r négatif au moyen des relations

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi(-r) = \varphi(r), \\ h(-r) = h(r). \end{cases}$$

Alors l'expression

$$v = \frac{2\pi a}{r}[\psi(r+a) - \psi(r-a)]$$

sert pour tous les points intérieurs et extérieurs à la surface donnée. Dans le

cas de la masse, on trouve d'une manière analogue l'expression

$$V = \frac{2\pi}{r}\int_{-a}^{a} k(s)\,\psi(r+s)\,ds.$$

Cette simplification de forme est possible lorsque la loi potentielle et la densité sont données par des fonctions ayant les propriétés (1). Un cas remarquable admettant cette réduction est celui où

$$\varphi(r) = e^{-\mu r^2} \qquad \text{et} \qquad h = 1;$$

dans ce cas on a, pour $a = \infty$,

$$V = \frac{\pi}{\mu}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu(r+s)^2}\,ds = \left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}},$$

d'où l'on déduit que cette matière distribuée dans tout l'espace et agissant sur elle-même avec la loi $e^{-\mu r^2}$ est en équilibre.

Dans la même hypothèse de $\varphi(r) = e^{-\mu r^2}$, la fonction potentielle d'une droite est $\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\,e^{-\mu r^2}$, celle d'un plan $\frac{\pi}{\mu}\,e^{-\mu r^2}$.

Après, l'auteur suppose $h(r) = \frac{c}{r}$. Dans ce cas, en prenant des points de plus en plus éloignés de l'origine (centre de condensation), la fonction potentielle tend rapidement vers la fonction potentielle newtonienne d'une masse concentrée à l'origine.

La fonction

$$V = \int h\,e^{-\mu r^2}\,dS$$

satisfait à une équation analogue à celle du mouvement de la chaleur dans les corps isotropes, et l'on en déduit que la température variable dans un corps isotrope peut être considérée comme une fonction potentielle d'actions mutuelles entre les points du corps.

Sayno (*Ant.*). — [T2*b*]. Sur une relation existant entre le noyau central et la résistance spécifique de cohésion permanente des sections normales des prismes soumis à la flexion. (733-737).

Brioschi (*Franç.*). — [H5*f*]. Sur certaines équations différentielles à intégrale algébrique. (786-794).

Étant v_1, v_2 deux intégrales particulières de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} + p\frac{dv}{dx} + qv = 0,$$

et z_1, z_2 deux fonctions linéaires de ces intégrales, il y a une équation du 3e ordre

$$(2) \qquad \frac{d^2\log\frac{dz}{dx}}{dx^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\log\frac{dz}{dx}}{dx}\right)^2 = 2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx},$$

satisfaite par $\frac{z_1}{z_2}$, dont on trouve des intégrales algébriques par la considération des covariants h et θ d'une forme binaire f d'ordre n qui se réduit à une constante K en y substituant z_1, z_2 au lieu des variables. On a, C étant une constante,

$$h = \frac{K^2}{(n-1)C^2} q e^{2\int p dx},$$

$$\theta = -\frac{K^3}{(n-1)(n-2)C^3}\left(\frac{dq}{dx} + 2pq\right)e^{3\int p dx}.$$

Pour les covariants p_r associés à la forme f, on a en général

$$p_r = (-1)^r \frac{K^r}{C^r} e^{r\int p dx} F_r(x),$$

étant

$$F_1(x) = \frac{\partial f}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{dz_2}{dx} = f_1\frac{dz_1}{dx} + f_2\frac{dz_2}{dx},$$

$$F_2(x) = f_{11}\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2 + 2f_{12}\frac{dz_1}{dx}\frac{dz_2}{dx} + f_{22}\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^2,$$

et (symboliquement)

$$F_r(x) = \left(f_1\frac{dz_1}{dx} + f_2\frac{dz_2}{dx}\right)^r.$$

En supposant que p et q aient les valeurs par lesquelles la (1) devient l'équation hypergéométrique, l'auteur, pour certaines valeurs des constantes renfermées en p et q, et au moyen de la forme f et de ses covariants, trouve des intégrales algébriques de l'équation (2). *Voir* la suite au Tome X, p. 48.

Cantor (*M.*). — [V3, V4*a*]. Études gréco-indiennes. (818-842).

Priorité des Indiens sur les Grecs dans l'Arithmétique et l'Algèbre, des Grecs sur les Indiens dans l'Astrologie, l'Astronomie et la Géométrie.

Tome X; 1877.
Milano, tip. Bernardoni; U. Hoepli, éditeur.

Casorati (*Félix*). — [K6*b*]. Sur les coordonnées des points et des droites dans le plan, des points et des droites dans l'espace. (11-17), (40-45).

Brioschi (*Franç.*). — [H5*f*]. Sur certaines équations différentielles à intégrales algébriques. (48-57).

Suite de la Note insérée au Tome IX; 1876, p. 786. Ici l'auteur, après avoir trouvé une relation récurrente entre trois covariants associés consécutifs de la forme f, examine les cas où f est du deuxième ou du troisième degré, en trou-

vant des intégrales algébriques des équations (1) et (2). Enfin, il suppose que $f(z_1, z_2)$, au lieu d'être une constante, soit égale à une fonction algébrique $\varphi(x)$ (racine d'une fonction rationnelle en x).

Secchi (Le P. *A.*). — [U]. Sur la divisibilité des comètes en petites parties et sur une tache obscure trouvée dans la voie lactée. Extrait d'une lettre à M. G.-V. Schiaparelli. (97-99).

Schiaparelli (*G.-V.*). — [U]. Observations de la comète récemment découverte par M. Borelli à Marseille la nuit du 8 au 9 février 1877. (120-122).

Secchi (Le P. *A.*). — [U]. Sur la comète découverte le 8 février 1877 par M. Borelli. Extrait d'une lettre à M. G.-V. Schiaparelli. (122-123).

Grassi (*G.*). — [U10]. Nouvelle formule barométrique pour la mesure des altitudes et pour la réduction des hauteurs barométriques au niveau de la mer. (130-134).

Padelletti (*Dino*). — [R1*a*]. Méthode générale pour obtenir les diagrammes du mouvement d'un point. (134-143).

Pincherle (*S.*). — [H2*c*β]. Sur les équations algébrico-différentielles du premier ordre et du premier degré à intégrale générale algébrique. (143-151).

Équation différentielle du premier ordre, dont l'intégrale générale est l'équation d'un faisceau de courbes de l'ordre n.

L'auteur commence par démontrer quelques propriétés du faisceau

$$G - \lambda H = 0 \tag{1}$$

au moyen de l'équation obtenue par l'élimination de λ entre (1) et ses dérivées, équation qui est la suivante

$$A\,dx + B\,dy = 0,$$

avec

$$A = G\frac{\partial H}{\partial x} - H\frac{\partial G}{\partial x}, \qquad B = G\frac{\partial H}{\partial y} - H\frac{\partial G}{\partial y},$$

les courbes $A = 0$, $B = 0$, qui sont de l'ordre $2n - 1$ et passent par les points bases du faisceau, ont aussi en commun $2n - 2$ points à l'infini. Les autres $3(n-1)^2$ points communs à ces courbes sont les points doubles du faisceau.

Puis il suppose qu'étant donnée l'équation différentielle, on sache qu'elle a pour intégrale l'équation d'un faisceau, et montre comment on peut la trouver.

On peut exprimer par A et par ses dérivées les binomes

$$(r, s) = \frac{\partial^r G}{\partial x^r}\frac{\partial^s H}{\partial x^s} - \frac{\partial^r H}{\partial x^r}\frac{\partial^s G}{\partial x^s},$$

entre lesquels il y a le binome (o, n) qui est une courbe du faisceau, et partant une intégrale particulière. On peut semblablement en avoir une autre au moyen de B et de ses dérivées, et le problème est résolu. Il y a toutefois un cas d'exception, lorsque ces deux intégrales particulières coïncident. Alors on peut avoir une autre intégrale H en prenant

$$H = G\int \frac{B}{G^2}\,dy,$$

G étant celle que l'on avait précédemment trouvée.

Beltrami (*Eug.*). — [T5*a*]. Sur certaines questions d'Électrostatique. (171-185).

Induction produite sur un disque circulaire conducteur par des actions données, symétriques autour de l'axe. La méthode suivie par l'auteur pour l'étude de cette question est fondée sur un théorème de M. Dini, relatif à la fonction potentielle d'un disque elliptique (*Mém. des Lincei,* 2e série, t. II; 1875).

La fonction potentielle du disque circulaire de rayon a est

$$V = 2\pi a\int_\lambda^\infty \frac{f(s)\,d\lambda}{a^2+\lambda^2},$$

étant

$$s = 1 - \frac{u^2}{a^2+\lambda^2} - \frac{z^2}{\lambda^2},$$

$$u = \sqrt{x^2+y^2},$$

λ la racine positive de $s = 0$, et la densité superficielle étant

$$k = \frac{f(0)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{f'(\tau)\,d\lambda}{\sqrt{t-\tau}},$$

avec

$$t = 1 - \frac{u^2}{a^2}.$$

Les lignes de force en chaque plan passant par l'axe du disque sont données par

$$W = 2\pi a^2 z\int_\lambda^\infty \frac{f(s)\,d\lambda}{\lambda^2} = \text{const.}$$

On peut déterminer la fonction $f(s)$ de manière que la fonction potentielle prenne les valeurs d'une fonction donnée $\varphi(u)$ aux points du disque; par le théorème de l'inversion des intégrales définies, on trouve qu'il suffit de prendre

pour cela

$$\pi^2 a f(t) = \varphi(0) + u \int_0^u \frac{d\varphi(\theta)}{\sqrt{u^2 - \theta^2}}.$$

Par les formules ainsi établies, l'auteur donne la résolution complète du problème et trouve la fonction potentielle des forces électriques provenant du disque, en le supposant en communication avec la terre et influencé par des forces électriques données, de potentiel $P(z, u)$ symétrique autour de l'axe. Il trouve aussi la densité électrique à la surface du disque, et la quantité totale d'électricité, autant pour le cas que le disque soit en communication avec la terre, que pour celui où il est isolé et possède une charge donnée. Enfin il fait l'application des résultats obtenus au cas où l'action inductrice provient d'un seul point.

Brusotti (*Ferd.*). — [S5*b*]. La vitesse moléculaire des gaz et la vitesse correspondante du son. (209-224).

Klein (*F.*). — [A4*dα*]. Sur l'équation de l'icosaèdre dans la résolution des équations du cinquième degré. Extrait d'une lettre adressée à M. Brioschi. (253-255).

Coïncidence de la méthode d'Hermite avec celle de Kronecker pour la résolution des équations du cinquième degré par les fonctions elliptiques.

Schiaparelli (*G.-V.*). — [U]. Autres notices et observations sur les comètes de 1877. (256-261).

Ferrini (*R.*). — [T7]. Sur la composition la plus convenable de l'électromoteur capable d'un effet donné. (347-352).

Brioschi (*Franç.*). — [F5*bδ*]. Sur une nouvelle équation différentielle dans la théorie des fonctions elliptiques. (417-421).

Équation du quatrième ordre entre le module et le multiplicateur, ayant lieu quel que soit l'ordre de la transformation.

Casorati (*Félix*). — [H2*cβ*]. Note sur les équations différentielles. (422-423).

Autre manière d'établir les propriétés démontrées dans les *Atti dei Lincei*, t. I, p. 185; mai 1877. Ici l'auteur prouve aussi que la condition pour qu'une expression ternaire différentielle de degré m, $\psi(dx, dy, dz)$ se transforme en binaire $\varphi(du, dv)$ par la substitution $u = \frac{x}{z}$, $v = \frac{y}{z}$, est que ψ et ses dérivées par rapport à dx, dy, dz, jusqu'à l'ordre $m - 1$ inclusivement, s'annulent identiquement en y posant x, y, z au lieu de dx, dy, dz.

Genocchi (*Angelo*). — [F5*b*δ]. Sur l'équation différentielle du multiplicateur. (553-555).

Casorati (*Félix*). — [H2*c*β]. Sur les conditions auxquelles doit satisfaire une équation afin que le degré de l'équation différentielle correspondante par rapport aux variables soit moindre que le degré normal. (770-775).

L'élimination de la constante ω entre l'équation

$$f(\omega) = a\omega^m + b\omega^{m-1} + \ldots + s\omega + t = 0$$

et sa différentielle

$$d f(\omega) = 0$$

donne lieu à une équation différentielle $F = 0$ relative aux deux variables u, v, que l'on suppose renfermées dans les fonctions rationnelles et entières $a, b, \ldots, t$.

Étant n le degré de ces fonctions, celui de F est en général $l = m(2n-1)$; mais, sous certaines conditions, ce degré de F en u, v peut s'abaisser, tout en restant le même le degré m de F par rapport à du, dv. L'auteur, en laissant de côté le cas où cette réduction pourrait avoir lieu par effet de facteurs rationnels communs aux coefficients de F, s'occupe exclusivement de celui où un ou plusieurs des groupes de termes des plus hautes dimensions sont identiquement nuls. En indiquant par

$$\overset{l}{F},\ \overset{l-1}{F},\ \ldots,\ \overset{0}{F}$$

les parties de F, dont le degré en u, v est respectivement l, $l-1$, ..., 0, les conditions cherchées sont :

Pour l'abaissement d'une unité..... $\overset{l}{F} = 0$,

Pour l'abaissement de deux unités... $\overset{l}{F} = 0$, $\overset{l-1}{F} = 0$,

...., ...

On a ainsi des équations différentielles, dont toutefois l'intégration peut être évitée de la manière suivante :

Si, en adoptant une notation analogue à la précédente, on a

$$a = \overset{n}{a} + \overset{n-1}{a} + \ldots + \overset{0}{a},$$
$$b = \overset{n}{b} + \overset{n-1}{b} + \ldots + \overset{0}{b},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

posons

$$a_y = \overset{n}{a} + y\overset{n-1}{a} + \ldots + y^n\overset{0}{a},$$
$$b_y = \overset{n}{b} + y\overset{n-1}{b} + \ldots + y^n\overset{0}{b},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_y(\omega) = a_y\omega^m + b_y\omega^{m-1} + \ldots + s_y\omega + t_y.$$

y étant tout à fait indépendant des variables u, v. L'élimination de ω entre $f_y(\omega) = 0$ et sa différentielle (par rapport à u, v) donne

$$F_y = \overset{l}{F} + y \overset{l-1}{F} + \ldots + y^l \overset{0}{F} = 0.$$

Si $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ sont les racines de $f_y(x) = 0$, on a

$$F_y = a_y^m \prod_{\mu=1}^{\mu=m} d f_y(\rho_\mu) = a_y^m \prod_{\mu=1}^{\mu=m} \left[d \overset{n}{f}(\rho_\mu) + y\, d \overset{n-1}{f}(\rho_\mu) + \ldots + y^{n-1} d \overset{1}{f}(\rho_\mu) \right],$$

et afin que les r premières des expressions

$$\overset{l}{F}, \quad \overset{l-1}{F}, \quad \ldots, \quad \overset{0}{F}$$

soient identiquement nulles, il faut et il suffit que dans $\prod$ la puissance de y la moins élevée soit y^r. Soient $P_1, P_2, \ldots, P_m$ les racines de $\overset{n}{f}_y(x) = 0$, que l'on suppose racines simples. Si l'une de ces racines, soit P_1, est constante,

$$\overset{n}{f}(P_1) = 0$$

est l'intégrale complète de $F = 0$, et l'on a l'abaissement d'une unité; si P_1 est racine commune de

$$\overset{n}{f}(x) = 0, \qquad \overset{n-1}{f}(x) = 0,$$

l'abaissement est de deux unités, et ainsi de suite. Le degré de F peut encore s'abaisser si une autre racine P_2 est constante, etc. Toutefois, aucune des P ne peut être racine commune de *toutes* les équations

$$\overset{n}{f} = 0, \quad \overset{n-1}{f} = 0, \quad \ldots, \quad \overset{0}{f} = 0,$$

ce qui entraînerait l'évanouissement identique de F.

Dans le cas de racines multiples de $\overset{n}{f} = 0$, on a les solutions singulières, qui sont données par

$$\overset{h}{g} = 0, \qquad \overset{h-1}{g} = 0, \qquad \ldots, \qquad \overset{0}{g} = 0,$$

étant

$$g_y = \overset{h}{g} + y \overset{h-1}{g} + \ldots + y^h \overset{0}{g}$$

le discriminant de $f_y(x) = 0$.

Tome XI; 1878.

Beltrami (*Eug.*). — [R5*a*]. Sur certaines propositions de Clausius dans la théorie du potentiel. (13-27).

Examen de quelques formules de transformation et procédés de démonstra-

tion, fondés sur les deux formules :

$$\int \frac{\partial F}{\partial u} d\tau = \int F \frac{\partial u}{\partial n} d\omega,$$

$$\int \frac{\partial F}{\partial r} \frac{d\tau}{r^2} = -\int F \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\omega - \sigma F_0.$$

Beltrami (*Eug.*). — [S2*e*]. Sur un cas de mouvement à deux coordonnées. (199-210).

Mouvement d'une calotte sphérique dans un voile fluide appartenant à la même sphère.

La vitesse des points du fluide suit les lois suivantes :

1° Suivant un même parallèle, la valeur absolue de la vitesse est constante; cette valeur absolue varie en raison inverse du carré de la distance du point au centre de la calotte solide;

2° Suivant un même méridien, la direction de la vitesse fait un angle constant avec le méridien.

Les trajectoires des points du fluide sont complètement étudiées par l'auteur. Le temps employé par les points à parcourir leurs trajectoires peut s'exprimer par une intégrale elliptique.

Bardelli (*Jos.*). — [R1*c*]. Sur la cinématique d'un corps solide. (219-233).

Belgiojoso (*Ch.*). — [V9]. Le Père A. Secchi. Commémoration. (256-257).

Pincherle (*S.*). — [D4*a*]. Relations entre les coefficients et les racines d'une fonction entière transcendante. (391-398).

Ferrini (*R.*). — [V9]. Commémoration du Professeur G. Codazza. (503-516).

Clericetti (*C.*). — [T2*b*]. Théorie des systèmes composés en général et spécialement des ponts suspendus américains. Influence des charges accidentelles. (538-544).

Aschieri (*Ferd.*). — [N'1*b*]. Diverses générations d'un complexe particulier du deuxième degré, déterminé par un système focal et par un système plan polaire. (612-620).

Beltrami (*Eug.*). — [R5*aα*]. Sur les fonctions potentielles de systèmes symétriques autour d'un axe. (668-680).

La fonction potentielle V d'un système symétrique par rapport à un axe, et la fonction W qui, égalée à une constante arbitraire, représente les lignes de force, sont appelées *fonctions associées,* et liées entre elles par les deux équations

$$(1) \qquad \frac{\partial W}{\partial u} = u\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = -u\frac{\partial V}{\partial u},$$

étant $u = \sqrt{x^2 + y^2}$. En interprétant ces équations comme conditions d'intégrabilité, on peut poser autant

$$(2) \qquad V = \frac{\partial V_1}{\partial z}, \qquad W = -u\frac{\partial V_1}{\partial u},$$

que

$$(2)' \qquad V = \frac{1}{u}\frac{\partial W_1}{\partial u}, \qquad W = \frac{\partial W_1}{\partial z},$$

et exprimer ainsi les V, W par les dérivées d'une seule fonction V_1 ou W_1. Ces dernières sont de nouveau deux fonctions associées. Tout cela peut être aussi généralisé, en se proposant d'exprimer V et W en fonctions linéaires des dérivées d'une même fonction U. Ces expressions se déduisent de

$$V\,dw + W\,dv = dU,$$

étant v, w deux solutions particulières simultanées des équations (1). Les (2) s'obtiennent d'ici comme cas particulier en prenant

$$v = \log\frac{1}{u}, \qquad w = z;$$

les (2)′ en prenant

$$v = z, \qquad w = \frac{u^2}{2}.$$

Les v, w peuvent être prises pour variables indépendantes, et alors on trouve que u satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 \log u^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial w^2} = 0.$$

On peut choisir le couple v, w de variables associées de manière que u soit le produit de deux facteurs dont l'un est de la forme $\varphi(v)$, l'autre de la forme $\psi(w)$.

Les résultats précédents sont enfin appliqués aux cas des coordonnées polaires.

Casorati (*Félix*). — [H2$c\beta$]. Sur l'intégration des équations algébrico-différentielles du premier ordre et du premier degré au moyen de fonctions linéaires. (804-808).

Afin que l'équation

$$\alpha(x, y)\,dx + \beta(x, y)\,dy = 0,$$

où les fonctions $\alpha(x, y)$ et $\beta(x, y)$ sont supposées rationnelles entières de degré n, ait une intégrale

$$\psi = x + \lambda y + \mu = 0,$$

on doit avoir

$$\alpha\lambda - \beta = (x + \lambda y + \mu)\varphi,$$

φ étant du degré $n - 1$. En égalant les coefficients des groupes les plus élevés dans les deux membres, on a $n + 1$ relations, desquelles on déduit une équation en λ du degré $n + 1$. Les égalités entre les autres coefficients donnent le moyen de calculer en fonction de λ la quantité μ et les coefficients de φ, et $n - 1$ relations en plus. Si l'on veut que ψ soit une intégrale pour chacune des $n + 1$ valeurs de λ, il y a donc $(n - 1)(n + 1)$ conditions à satisfaire.

Tome XII; 1879.

Klein (*F.*). — [F5*b*δ, A4*a*]. Sur les équations modulaires. (21-24).

Beltrami (*Eug.*). — [M²3*c*]. Sur l'équation pentaédrale des surfaces du troisième ordre. (24-36).

Étant

$$[\lambda] = p\lambda^3 + q\lambda^2 + r\lambda + s$$

une fonction rationnelle entière de troisième degré en λ, et $F(\lambda) = 0$ une équation rationnelle entière du onzième degré, dont les racines soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_{11}$, nous avons

$$\sum_{k=1}^{k=11} \frac{[\lambda_k]^3}{F'(\lambda_k)} = 0;$$

en prenant $F(\lambda) = \varphi(\lambda)\psi(\lambda)$, avec

$$\varphi(\lambda) = a(\lambda - a_1)\ldots(\lambda - a_5),$$
$$\psi(\lambda) = b(\lambda - b_1)\ldots(\lambda - b_6),$$

il est

$$(1) \qquad \sum_1^5 \alpha_m [a_m]^3 + \sum_1^6 \beta_n [b_n]^3 = 0,$$

où

$$\alpha_m = \frac{1}{\varphi'(a_m)\psi(a_m)}, \qquad \beta_n = \frac{1}{\varphi(b_n)\psi'(b_n)}.$$

En supposant que p, q, r, s soient des fonctions linéaires des coordonnées d'un point de l'espace, on peut toujours les déterminer de façon que $[\lambda] = 0$ représente, pour six valeurs distinctes de λ, six plans donnés arbitrairement.

En les déterminant de manière que les équations

$$[b_n] = 0$$

représentent les six faces d'un hexaèdre de Cremona, l'équation

$$\sum_1^6 \beta_n [b_n] = 0$$

est celle d'une surface du troisième ordre. L'identité (1) donne le moyen d'obtenir l'équation pentaédrale de la même surface

$$\sum_1^5 \alpha_m [a_m]^3 = 0,$$

les a_m étant déterminées comme racines de l'équation du cinquième degré

$$\sum_1^6 \frac{1}{\beta_n [\psi'(b_n)]^2} \frac{1}{\lambda - b_n} = 0.$$

Pour mieux reconnaître les relations entre les hexaèdres, qui sont en nombre infini, l'auteur part de l'équation pentaédrale

$$\sum_1^5 A_m u_m^3 = 0,$$

avec $\sum_1^5 u_m = 0$, et prend

$$[\lambda] = (\lambda - a_1)\ldots(\lambda - a_5) \sum_1^5 \frac{u_m}{\lambda - a_m};$$

ainsi on déduit les équations hexaédrales

$$\sum_1^6 \beta_n [b_n]^3 = 0,$$

en prenant pour b_n les racines de l'équation du sixième degré

$$g\lambda + h + \sum_1^5 \frac{\varphi'(a_m)}{A_m(\lambda - a_m)} = 0,$$

g et h étant constantes arbitraires, et $\varphi(\lambda) = (\lambda - a_1)\ldots(\lambda - a_5)$; puis prenant

$$\psi(\lambda) = (\lambda - b_1)\ldots(\lambda - b_6),$$

$$\beta_n = \frac{1}{\varphi(b_n)\psi'(b_n)}.$$

2e Partie.

Tous ces hexaèdres sont inscrits dans la hessienne et les sommets opposés de chacun sont des pôles réciproques de cette surface.

Suivent d'autres propriétés relatives aux quadriques polaires et obtenues par la même méthode.

Casorati (*Félix*). — [O2*b*]. Nouvelle et meilleure forme des équations des asymptotes d'une ligne plane algébrique. (117-122).

Si

$$u(x, y) = 0$$

est une courbe algébrique de l'ordre n, et si l'on indique par u_r le groupe de termes d'ordre r, l'équation

$$x\frac{\partial u_n}{\partial \lambda} + y\frac{\partial u_n}{\partial \mu} + u_{n-1}(\lambda, \mu) = 0$$

donne successivement toutes les asymptotes en y mettant pour $\lambda : \mu$ les n valeurs données par

$$u_n(\lambda, \mu) = 0.$$

Celoria (*G.*). — [U10]. Détermination des différences de longitude entre l'Observatoire de Milan et ceux de Padoue, de Munich et de Vienne. (124-127).

Jung (*Jos.*). — [P2*a*]. Recherches sur les systèmes polaires. (169-179). Note II. (218-228).

Voir les additions à la page 535.

Ascoli (*G.*). — [C2]. Un théorème de Calcul intégral. (215-218).

Aschieri (*Ferd.*). — [P6 ref. N]. Sur la représentation de l'espace de rayons par un système de coniques dans un plan. (265-268).

Le système de coniques est celui des coniques circonscrites aux triangles circonscrits à une conique fixe. Cette représentation avait été indiquée par M. Cremona dans une lettre à Beltrami (*Giornale di Battaglini*, t. XI). Ici sont exposés quelques résultats sans démonstrations. *Voir* la suite à la page 341.

Clericetti (*C.*). — [T2*b*]. Ponts suspendus rigides. (274-290).

Bardelli (*Jos.*). — [O8*a*]. Sur l'aire décrite par une ligne invariable se mouvant dans un plan avec une loi déterminée. (290-298).

Crotti (*Franç.*). — [S4*a*]. Démonstration mécanique du deuxième principe de Thermodynamique. (333-337).

Ascoli (*G.*). — [C2]. Sur les fonctions dont la dérivée première appartient à la classe zéro. (337-341).

Aschieri (*Ferd.*). — [P6 ref. N]. Représentation plane des complexes linéaires et de leurs intersections. (341-347).

Suite de la Note insérée à la page 265.

Cremona (*Louis*). — [M³5]. Sur les surfaces et les courbes passant par les sommets d'un nombre infini de polyèdres formés par les plans osculateurs d'une cubique gauche. (347-352).

Soient

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad \ldots, \quad t_{n+2} = 0$$

les équations de $n+2$ plans osculateurs d'une cubique gauche, l'équation

$$\sum \frac{k_{rs}}{t_r t_s} = 0$$

représente une surface d'ordre n passant par les $\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$ sommets du polyèdre complet formé par ces plans. Si cette surface passe par trois sommets d'un tétraèdre circonscrit à la cubique, elle passera aussi par le quatrième. Cette propriété peut aussi être étendue à l'espace de m dimensions. Suit l'indication d'une correspondance entre les points de l'espace ordinaire et les groupes de trois plans osculateurs, par laquelle on fait correspondre à un point les trois plans osculateurs passant par lui, et dont les formules sont

$$x : y : z : w = \omega_1\omega_2\omega_3 : \omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_1 + \omega_1\omega_2 : \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 : 1.$$

Ascoli (*G.*). — [C2*h*]. Sur le produit de plusieurs fonctions intégrables et finies. (372-374).

Aschieri (*Ferd.*). — [N¹1*c*]. Sur les systèmes de rayons. (409-412).

Beltrami (*Eug.*). — [D6*f*]. Sur une formule intégrale. (421-426).

$$\int_0^\pi (z - \cos\zeta\sqrt{z^2-1})^n \, d\zeta = \int_0^\pi \frac{d\zeta}{(z + \cos\zeta\sqrt{z^2-1})^{n+1}}.$$

Aschieri (*Ferd.*). — [N¹1*h*]. Sur les complexes tétraédraux. (426-433).

Bardelli (*Jos.*). — [R4*a*]. Sur le centre des forces dans le plan. (456-463).

Brioschi (*Franç.*). — [J4*a*]. Un théorème dans la théorie des substitutions. (483-485).

Une substitution entre les éléments

$$z_0, \quad z_1, \quad \ldots, \quad z_{n-1}$$

peut être représentée par

$$\begin{bmatrix} z_r \\ z_{\varphi(r)} \end{bmatrix},$$

ou même par $\varphi(r)$, et la fonction $\varphi(r)$ peut se réduire à la forme

$$\varphi(r) \equiv \alpha\theta(r+p) + \beta \qquad (\operatorname{mod} n),$$

où $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$, et p, β peuvent prendre les valeurs $1, 2, \ldots, n-1$. La *forme réduite* $\theta(r)$ est un polynome de degré non supérieur à $n-2$, dont le coefficient du premier terme est l'unité, et celui du deuxième est zéro. L'auteur démontre que la forme réduite

$$\theta(r) \equiv r^{n-2} + ar^{\frac{n-1}{2}} + br \qquad (\operatorname{mod} n)$$

ne peut avoir lieu que pour $n = 7$, et alors $b \equiv 3a^2 (\operatorname{mod} 7)$.

Jung (*Jos.*). — [P2*a*]. Additions aux Notes précédentes sur les systèmes polaires. (535-536).

Voir les Notes aux pages 169 et 218.

Pincherle (*S.*). — [H11*b*]. Sur les fonctions monodromes ayant une équation caractéristique. (536-542).

Une fonction monodrome est supposée assujettie à la condition suivante : que si la variable x prend trois valeurs x_1, x_2, x_3 liées par la relation

$$a_0x_1x_2x_3 + a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3 + a_3x_1x_2 + a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 + a'_0 = 0,$$

les valeurs correspondantes y_1, y_2, y_3 de la fonction soient liées par une équation algébrique

$$F(y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Les fonctions ayant cette propriété, en ne considérant pas les fonctions rationnelles, peuvent se réduire, par une transformation linéaire de la variable, ou à des fonctions périodiques ou à des fonctions satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$\varphi(z) = \varphi(\alpha z).$$

Schiaparelli (*G.-V.*). — [U]. Observations de la comète de Swift faites à l'Observatoire royal de Brera. (595-596).

Klein (*F.*). — [F5]. Sur la transformation du 11e ordre des fonctions elliptiques. (629-632).

Tome XIII; 1880.

Grassi (*G.*). — [T4*c*]. Sur la transmission de la chaleur entre deux fluides en mouvement, séparés par une paroi solide. (47-52).

Bardelli (*Jos.*). — [O3]. Sur certaines relations géométriques et mécaniques concernant les courbes gauches. (52-58).

Nouvelle démonstration de quelques propriétés établies par Siacci [*Sur le mouvement par une courbe gauche* (*Atti de Turin*, t. XIV, 1879)]. Ces démonstrations sont fondées sur les relations qui passent entre les coefficients d'une substitution orthogonale et leurs dérivées par rapport à un paramètre. (*Voir* Bardelli, *Rend. d. Ist. Lomb.*, t. IX, 1876.)

Casorati (*Félix*). — [*H4a*]. Sur l'équation fondamentale dans la théorie des équations différentielles linéaires. (176-182).

Cette Note se rattache aux recherches de Fuchs (*Journ. de Borchardt*, t. 66). Soit

$$(1)\qquad y^{(m)} + p_1 y^{(m-1)} + \ldots + p_{m-1} y' + p_m y = 0$$

l'équation donnée, où les p_i sont des fonctions de x, finies, continues et monotropes dans un anneau circulaire ayant pour centre l'un quelconque x_1 des points singuliers de l'équation. Soit θy la valeur que prend la fonction y après un tour positif enveloppant le point x_1. Soit $y_1, y_2, \ldots, y_m$ un système fondamental d'intégrales de (1), l'équation

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \theta y_1 - \omega y_1, & \ldots, & \theta y_m - \omega y_m \\ \theta y'_1 - \omega y'_1 - \omega' y_1, & \ldots, & \theta y'_m - \omega y'_m - \omega' y_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta y_1^{(m-1)} - \omega y_1^{(m-1)} - \ldots - \omega^{(m-1)} y_1, & \ldots, & \theta y_m^{(m-1)} - \omega y_m^{(m-1)} - \ldots - \omega^{(m-1)} y_m \end{vmatrix} = 0$$

a pour intégrale générale

$$\omega = \frac{c_1 \theta y_1 + \ldots + c_m \theta y_m}{c_1 y_1 + \ldots + c_m y_m}.$$

En observant que l'équation (2) est satisfaite pour des valeurs constantes

de ω, on en déduit l'équation fondamentale en y faisant

$$\omega' = \omega'' = \ldots = \omega^{(m-1)} = 0.$$

Cette équation est du degré m en ω et ses racines sont indépendantes de x. Le produit des racines est

$$\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_m = e^{-2\pi i b_1},$$

b_1 étant le coefficient de $\frac{1}{x - x_1}$ dans le développement de p_1 suivant les puissances de $x - x_1$.

Une autre manière de déduire l'équation fondamentale est la suivante. L'équation (1) étant décomposée dans le produit symbolique

$$(D + \varphi_m)(D + \varphi_{m-1}) \ldots (D + \varphi_1) y = 0,$$

où D est le symbole de dérivation et les φ sont monotropes dans l'anneau circulaire, l'équation fondamentale cherchée est le produit des équations fondamentales des équations du premier ordre

$$(D + \varphi_m) y = 0, \quad \ldots, \quad (D + \varphi_1) y = 0.$$

Aschieri (*Ferd.*). — [P4 ref. N° 1 *h*, *j*]. Représentation sur l'espace de points de quelques formes de troisième espèce composées de rayons. (182-191).

Représentation des complexes formés par les rayons qui s'appuient aux rayons correspondants de deux formes projectives de première espèce, en supposant que ces dernières soient :

1° Deux faisceaux non situés dans un même plan;
2° Un faisceau et une série réglée;
3° Deux séries réglées;

ce qui donne naissance respectivement au complexe tétraédral, à un complexe cubique, et à un complexe biquadratique.

Paci (*P.*). — [S2*a*]. Sur une transformation des équations fondamentales de l'Hydrodynamique. (209-217).

L'auteur prend pour axe des z la tangente à la ligne de mouvement dans le point considéré, pour axes des x et des y les tangentes aux lignes de courbure de la surface de déplacement, c'est-à-dire de la surface normale à la direction du mouvement. Ensuite il applique les équations ainsi transformées au problème de la propagation du son dans un tuyau vertical, et à celui de la propagation dans l'atmosphère du son produit par les vibrations d'un point.

Jung (*Jos.*). — [R4*d*α ref. J2*e*]. Solution géomécanique de quelques problèmes d'interpolation. (226-238).

Jung (*Jos.*). — [R4*d*α ref. J2*e*]. Compensation des erreurs proportionnelles pour un système donné d'observations directes. (239-242).

Formenti (*C.*). — [R7*c*]. Sur le problème des tautochrones. (266-280).

Les expressions générales de la force tangentielle p et de l'arc s en fonction de la vitesse v au temps t et de la vitesse v_0 au point d'arrivée, sont

$$p = \frac{v}{\psi\left(\frac{v}{v_0}\right) + v\,\varphi(v, v_0)},$$

$$s = \int_v^{v_0} \left[\psi\left(\frac{v}{v_0}\right) + v\,\varphi(v, v_0)\right] dv.$$

Ferrini (*R.*). — [T3*a*]. Sur l'aberration de sphéricité dans les lentilles d'épaisseur et d'ouverture ordinaires, et dans les systèmes dioptriques centrés. (283-294), (361-374).

Beltrami (*Eug.*). — [C2*h* ref. D1*bδ*]. Sur un théorème d'Abel et sur quelques-unes de ses applications. (327-337).

De la relation

$$\int_0^{\pi} \varphi(r \sin\theta)\, d\theta = \psi(r)$$

on déduit l'autre

$$\int_0^{r} \varphi(r)\, dr = \frac{r}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi(r \sin\theta) \sin\theta\, d\theta,$$

et réciproquement. C'est en cela que consiste la vraie signification d'un théorème donné par Abel (*Œuvres*, t. I, p. 27) et que Beltrami a ainsi présenté sous une forme plus convenable à certaines applications. Il l'applique à la résolution d'un problème concernant les fonctions cylindriques, et qui peut être regardé comme réciproque d'un autre résolu par Schlömilch. Ce dernier, au moyen des formules

$$(1) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta)\, d\theta = \pi I_0(x), \\ \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x \sin\theta) \sin\theta\, d\theta = \pi I_1(x), \end{cases}$$

et du théorème d'Abel, a obtenu le développement d'une fonction en série de fonctions cylindriques; l'auteur, au moyen de la proposition précédente, déduit

des équations (1) les formules

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_0(x\sin\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{\sin x}{x}, \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_1(x\sin\theta)\, d\theta = \frac{1-\cos x}{x}, \end{cases}$$

et par ces formules il obtient le développement d'une fonction en série trigonométrique avec les arguments

$$v_1 x,\quad v_2 x,\quad v_3 x,\quad \ldots,$$

$v_1, v_2, v_3, \ldots$ étant les racines positives d'une des équations transcendantes

$$I_0(x) = 0,\qquad I_0'(x) = 0,\qquad I_0''(x) = 0.$$

Maggi (*J.-Ant.*). — [T5*a*]. Sur un problème d'Électrostatique. (384-390).

Beltrami (*Eug.*). — [D1*b*δ]. Sur certaines séries trigonométriques. (402-413).

Suite de la Note précédente. Ici l'auteur détermine les multiplicateurs par lesquels on peut séparer les coefficients des développements trigonométriques considérés.

Bertini (*Eug.*). — [P4*f*]. Sur les transformations planes uniponctuelles et en particulier sur les transformations involutives. (443-451).

Propriétés relatives à la multiplicité des points fondamentaux pour les courbes fondamentales dans une transformation uniponctuelle. Pour les transformations involutives, l'auteur obtient le résultat suivant :

Une transformation involutive, dont les points fondamentaux sont à des distances finies, peut toujours se réduire à un ordre inférieur par une transformation quadratique, excepté les cas suivants :

1° Homologie harmonique;

2° Transformation involutive de Jonquières d'ordre $p+2$ ayant une courbe de points unis d'ordre $p+2$ et de genre p;

3° Transformation involutive du huitième ordre avec sept points triples;

4° Transformation involutive du dix-septième ordre avec huit points sextuples.

Aschieri (*Ferd.*). — [P4*g*]. Sur une correspondance particu-

lière univoque entre les éléments d'espaces à trois dimensions. (531-539).

Représentation sur l'espace ordinaire de points, du complexe quadratique intersection de deux faisceaux projectifs de complexes linéaires.

S. R.

CATALOGUE INTERNATIONAL DE LA LITTÉRATURE SCIENTIFIQUE [1].

A. MATHÉMATIQUES PURES.

0000 Philosophie.
0010 Histoire. Biographie.
0020 Périodiques. Rapports d'Institutions, de Sociétés, de Congrès, etc.
0030 Traités généraux, Manuels, Dictionnaires, Bibliographies, Tables.
0040 Discours, Leçons et Conférences.
0050 Enseignement.
0060 Institutions. Applications pratiques.
0070 Nomenclature.
0080 Instruments, Modèles.
0090 Appareils pour les calculs. Procédés graphiques.

NOTIONS FONDAMENTALES.

Bases de l'Arithmétique.

0400 Généralités.
0410 Nombres rationnels. Opérations arithmétiques.
0420 Existence des nombres irrationnels et transcendants. Procédés infinis se rapportant aux nombres rationnels.
0430 Ensembles.

[1] Nous croyons devoir reproduire ici la partie de ce Catalogue qui se rapporte aux Mathématiques pures et à la Mécanique, d'autant que nous comptons utiliser à l'occasion le mode de classification qui s'y trouve défini.

Algèbre générale.

0800 Généralités.
0810 Calcul des opérations.
0820 Théorie générale des nombres complexes.
0830 Quaternions.
0840 Ausdehnungslehre (théorie de l'extension de Grassmann); analyse vectorielle (*voir* aussi 6430).
0850 Matrices.
0860 Autres genres spéciaux de nombres complexes.
0870 Algèbre de la logique.

Théorie des groupes.

1200 Généralités.
1210 Groupes discrets d'ordre fini (y compris les groupes de permutations) (*voir* aussi 2450).
1220 Groupes discrets d'ordre infini (*voir* aussi 4440).
1230 Groupes continus d'ordre fini (*voir* aussi 5240).
1240 Groupes continus d'ordre infini (*voir* aussi 5240).

ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES.

Éléments de l'Algèbre.

1600 Généralités.
1610 Polynomes rationnels; divisibilité; réductibilité.
1620 Permutations; combinaisons; partitions; distributions.
1630 Probabilités (y comprises les combinaisons des observations).
1640 Calcul des différences; interpolation.

Substitutions linéaires.

2000 Généralités.
2010 Déterminants.
2020 Discriminants et résultants.
2030 Propriétés caractéristiques des substitutions linéaires; types de substitutions linéaires.
2040 Théorie générale des quantiques (formes).
2050 Formes binaires.
2060 Formes ternaires.
2070 Cas particuliers se rapportant aux formes de plus de trois variables.

Théorie des équations algébriques.

2400 Généralités.
2410 Éléments de la théorie; existence de racines; fonctions symétriques; fractions rationnelles.

2420 Réalité, multiplicité et séparation des racines.
2430 Équations de troisième et de quatrième ordre; autres équations particulières.
2440 Résolution numérique des équations.
2450 Résolution générale des équations; théorie de Galois (*voir* aussi 1210).
2460 Équations simultanées.

Théorie des nombres.

2800 Généralités.
2810 Divisibilité; congruences linéaires.
2820 Résidus quadratiques.
2830 Formes binaires quadratiques.
2840 Formes quadratiques à trois ou un plus grand nombre de variables; formes bilinéaires.
2850 Congruences non linéaires; résidus cubiques et d'ordre supérieur.
2860 Formes d'un degré supérieur qu'on ne peut pas considérer comme produits de facteurs linéaires.
2870 Formes d'un degré supérieur qui peuvent être considérées comme produits de facteurs linéaires; nombres algébriques idéaux.
2880 Application des fonctions trigonométriques à l'Arithmétique; cyclotomie.
2890 Application d'autres fonctions transcendantes à l'Arithmétique.
2900 Distribution des nombres premiers.
2910 Fonctions numériques spéciales.
2920 Irrationnalité et transcendance de nombres particuliers tels que e et π.
(Pour applications des fonctions arithmétiques aux fonctions algébriques, *voir* 4010.)

ANALYSE.

Bases de l'Analyse.

3200 Généralités.
3210 Théories des fonctions de variables réelles.
3220 Séries; produits infinis et autres procédés infinis (*voir* 5610-5620).
3230 Principes et éléments du Calcul différentiel.
3240 Séries de Taylor; maxima et minima; autres applications analytiques du Calcul différentiel.
3250 Principes et éléments du Calcul intégral.
3260 Intégrales définies (simples).
3270 Intégrales multiples.
3280 Calcul des variations.

Théorie des fonctions de variables complexes.

3600 Généralités.
3610 Fonctions uniformes d'une variable.
3620 Fonctions multiformes d'une variable. Surfaces de Riemann.

3630 Développements en série procédant suivant des fonctions autres que les puissances de la variable.
3640 Fonctions de plusieurs variables.

Fonctions algébriques et leurs intégrales.

4000 Généralités.
4010 Fonctions algébriques d'une variable.
4020 Fonctions algébriques de plusieurs variables.
4030 Fonctions logarithmiques, circulaires, exponentielles.
4040 Propriétés générales des fonctions elliptiques et des fonctions thêta d'une variable; théorèmes d'addition (*voir* aussi 8050, 8060).
4050 Multiplication, division, transformation des fonctions elliptiques; fonctions modulaires (*voir* aussi 4410).
4060 Intégrales abéliennes (*voir* aussi 8050, 8060).
4070 Fonctions périodiques et fonctions thêta de plusieurs variables.

Autres fonctions spéciales.

4400 Généralités.
4410 Fonctions eulériennes.
4420 Fonctions de Legendre; fonctions de Bessel; fonctions hypergéométriques.
4430 Autres fonctions qui peuvent être définies par des intégrales définies (*voir* 4860).
4440 Fonctions automorphes (fonctions fuchsiennes et kleinéennes) (*voir* aussi 1220, 4050).
4450 Autres fonctions qui peuvent être définies par des équations différentielles linéaires.
4460 Autres fonctions qui peuvent être définies par des équations fonctionnelles (*voir* aussi 6030).

Équations différentielles.

4800 Généralités.
4810 Théorèmes d'existence pour les équations différentielles ordinaires et partielles.
4820 Méthodes de résolution et de réduction des équations différentielles ordinaires.
4830 Méthodes de résolution et de réduction des équations différentielles partielles de premier ordre (y compris les équations différentielles de la Dynamique théorique).
4840 Méthodes de résolution et de réduction des équations différentielles partielles de second ordre et d'ordres supérieurs.
4850 Théorie générale des équations ordinaires linéaires (*voir* aussi 4450).
4860 Intégration des équations ordinaires linéaires par les intégrales définies (*voir* aussi 4430).
4870 Théorie générale des équations ordinaires non linéaires du premier ordre.
4880 Théorie générale des équations ordinaires non linéaires d'ordre supérieur au premier.

Formes différentielles et invariants différentiels.

5200 Généralités.
5210 Formes linéaires différentielles; Pfaffiens.
5220 Formes différentielles de second ordre et d'ordres supérieurs.
5230 Transformation des formes différentielles, y compris les transformations tangentielles.
5240 Invariants différentiels (*voir* aussi 1230, 1240).

Méthodes analytiques se rapportant aux problèmes physiques.

5600 Généralités (*voir* aussi B 2000-2100, 3220).
5610 Analyse harmonique; séries de Fourier (*voir* aussi 3220).
5620 Analyse harmonique; séries autres que celles de Fourier (*voir* aussi 3220).
5630 Généralités sur les équations différentielles de la Physique mathématique (*voir* aussi B 2020).
5640 Intégration des équations différentielles de la Physique mathématique par séries.
5650 Intégration des équations différentielles de la Physique mathématique par les intégrales définies.
5660 Problème de Dirichlet et problèmes analogues dépendant des conditions aux limites (Randwerthaufgaben).

Équations de différence et équations fonctionnelles.

6000 Généralités.
6010 Séries récurrentes.
6020 Solution des équations aux différences finies.
6030 Solution des équations fonctionnelles (*voir* aussi 4460).

GÉOMÉTRIE.

Principes.

6400 Généralités.
6410 Principes de la Géométrie; Géométrie non-euclidienne; hyperespace.
6420 Topologie de l'espace et de l'hyperespace (Analysis situs).
6430 Méthodes de la Géométrie analytique (*voir* aussi 0840).

Géométrie élémentaire.

6800 Généralités.
6810 Planimétrie; lignes droites et circulaires.
6820 Stéréométrie; lignes droites; surfaces et sphères.
6830 Trigonométrie.
6840 Géométrie descriptive; perspective.

Géométrie des coniques et des quadriques.

7200 Généralités.
7210 Propriétés métriques des coniques.
7220 Propriétés projectives des coniques.
7230 Systèmes de coniques (*voir* aussi 8070).
7240 Propriétés métriques des surfaces quadriques.
7250 Propriétés projectives des surfaces quadriques.
7260 Systèmes de surfaces quadriques (*voir* aussi 8070).

Courbes algébriques et surfaces de degré supérieur au second.

7600 Généralités.
7610 Propriétés métriques des courbes planes algébriques de degré supérieur au second.
7620 Propriétés projectives des courbes planes algébriques de degré supérieur au second.
7630 Courbes planes algébriques spéciales.
7640 Surfaces algébriques de degré supérieur au second (*voir* aussi 8040).
7650 Surfaces algébriques spéciales.
7660 Courbes algébriques gauches (*voir* aussi 8030).

Transformations et méthodes générales concernant les configurations algébriques.

8000 Généralités.
8010 Collinéation; dualité.
8020 Autres transformations algébriques.
8030 Groupes de points sur une courbe algébrique; genre des courbes; principes de correspondance (*voir* aussi 7620, 7660).
8040 Groupes de courbes et de points sur une surface algébrique; genres des surfaces (*voir* aussi 7640).
8050 Application des fonctions transcendantes aux courbes algébriques (*voir* aussi 4040-4060).
8060 Application des fonctions transcendantes aux surfaces algébriques (*voir* aussi 4040-4060).
8070 Géométrie énumérative (*voir* aussi 7230-7260).
8080 Connexes; complexes; congruences; éléments supérieurs de l'espace.
8090 Systèmes (linéaires et non-linéaires) de courbes et de surfaces.
8100 Configurations algébriques dans l'hyperespace.

Géométrie infinitésimale; applications du Calcul différentiel et du Calcul intégral à la Géométrie.

8400 Généralités.
8410 Principes de la Géométrie infinitésimale.
8420 Géométrie cinématique.
8430 Courbure des courbes planes; autres applications du Calcul différentiel aux courbes planes.

8440 Courbure des courbes gauches; autres applications du Calcul différentiel aux courbes gauches.
8450 Courbure des surfaces; coordonnées curvilignes et autres applications du Calcul différentiel aux surfaces.
8460 Rectification et quadrature des courbes; aires et volumes des surfaces.
8470 Courbes transcendantes spéciales.
8480 Surfaces transcendantes spéciales.
8490 Configurations dans l'hyperespace et éléments supérieurs de l'hyperespace.

Géométrie différentielle; application des équations différentielles à la Géométrie.

8800 Généralités.
8810 Détermination des courbes sur les surfaces.
8820 Surfaces minima.
8830 Surfaces déterminées par des relations de courbure et par d'autres propriétés différentielles.
8840 Représentations conformes et autres des surfaces les unes sur les autres (renvoi à la *Géographie mathématique,* J 70-95).
8850 Déformation des surfaces.
8860 Surfaces orthogonales et isothermes.
8870 Configuration dans l'hyperespace et éléments supérieurs de l'hyperespace.

B. MÉCANIQUE.

0000 Philosophie.
0010 Histoire. Biographie.
0020 Périodiques. Rapports d'Institutions, de Sociétés, de Congrès, etc.
0030 Traités généraux, Manuels, Dictionnaires, Bibliographies, Tables.
0040 Discours, Cours et Conférences.
0050 Enseignement.
0060 Institutions, Musées, Collections. Applications pratiques.
0070 Nomenclature.

Mesure des quantités dynamiques.

0100 Généralités.
0110 Unités et dimensions.
0120 Mesure des longueurs, des aires, des volumes, des angles.
0130 Mesure des masses et de la densité.
0140 Valeur numérique des densités (*voir* aussi D 7100).
0150 Mesure du temps; chronomètres (*voir* aussi E 2100).
0160 Mesure de la vitesse, de l'accélération, de l'énergie du mouvement visible.
0170 Mesure des forces; balance à ressort dynamométrique; balance de torsion, etc. (*voir* aussi E 5100).
0180 Constante de la gravitation (*voir* aussi E 1050, 5100; J 10).

Géométrie et cinématique des points matériels et des corps solides.

0400 Généralités.
0410 Géométrie des masses; moments d'inertie.
0420 Cinématique pure, y comprise la composition des mouvements et des déplacements; mouvements relatifs, axes mobiles; théorie des vis (screws).
0430 Cinématique des machines.
0440 Analyse des déformations, infinitésimales et finies.

Principes de Mécanique rationnelle.

0800 Généralités.
0810 Espace; temps; mouvement relatif; discussions critiques.
0820 Lois et principes dynamiques (lois du mouvement, du travail virtuel, de la moindre action, etc.).

Statique des points matériels, des corps rigides, etc.

1200 Généralités.
1210 Composition et décomposition des forces appliquées à un point.
1220 Attractions. Théorie du potentiel.
1230 Attractions de systèmes spéciaux. Ellipsoïdes, etc.
1240 Statique d'un corps rigide et d'un système de corps rigides; systèmes astatiques.
1250 Statique des charpentes; Statique graphique.
1260 Statique des fils et surfaces flexibles.
1270 Stabilité de l'équilibre.

Dynamique des points matériels, des corps rigides, etc.

1600 Généralités.
1610 Dynamique des points matériels; orbite; mouvement contraint (liaison); milieux résistants.
1620 Dynamique des corps rigides (y compris percussion, mouvements initiaux produits par la suppression brusque d'une liaison).
1630 Dynamique des fils et surfaces flexibles.
1640 Systèmes spéciaux; pendule; toupie, gyroscope, bicyclette, appareils directeurs.
1650 Balistique (*voir* aussi 2860).

Mécanique analytique générale.

(*voir* aussi A 5600-5650).

2000 Généralités.
2010 Énergie cinétique et potentielle.
2020 Forme des équations différentielles (y compris les systèmes dissipatifs) (*voir* aussi A 5630).

2030 Applications de la première variation des intégrales; équations aux dérivées partielles.
2040 Équivalence des problèmes dynamiques; analogies dynamiques; modèles.
2050 Systèmes cycliques; auto-équivalence (self-équivalence).
2060 Propriétés des intégrales; relations réciproques; solutions périodiques.
2070 Méthode pour la détermination effective des intégrales exactes.
2080 Méthodes approchées.
2090 Oscillations et mouvements initiaux autour d'un état d'équilibre.
2100 Oscillations autour d'un état de mouvement; stabilité et instabilité; foyers cinétiques (kinetic foci).

Statique et dynamique des fluides.

2400 Généralités.
2410 Statique des fluides.
2420 Stabilité des corps flottants. Oscillations des corps flottants.
2430 Cinématique des fluides; mouvement irrotationnel; sources et points d'absorption.
2440 Mouvement des corps solides dans les fluides parfaits.
2450 Mouvement tourbillonnaire; tourbillons (*voir* aussi C 0500).
2460 Surfaces libres et surfaces de discontinuité; veines.
2470 Rotation d'une masse fluide soumise à la gravitation (*voir* aussi E 1600).
2480 Vagues sur les liquides.
2490 Mouvement des fluides visqueux.
2500 Mouvement des solides dans les fluides visqueux.
2510 Flux régulier des fluides visqueux dans les tubes, etc.
2520 Stabilité et instabilité du mouvement des fluides parfaits et visqueux; mouvements irréguliers.
2530 Mesure de la pression d'un fluide; mesure de la vitesse d'un fluide.
2540 Mesure de la viscosité (*voir* aussi D 7150).

Hydraulique et résistance des fluides.

2800 Écoulement des fluides dans les tuyaux.
2810 Mouvement de l'eau dans les canaux et dans les cours d'eau. Jaugeage.
2820 Moteurs hydrauliques; propulseurs; pompes.
2830 Mouvement du vent; moulins à vent (*voir* aussi F 1360).
2840 Énergie du vent; aéroplanes; vol; élan initial.
2850 Résistance des carènes; navigation.
2860 Mouvement à travers l'air; ballons; boulet; etc. (*voir* aussi 1650).

Élasticité.

3200 Généralités.
3210 Tensions et déformations, leurs relations. Énergie de déformation. Anisotropie. Cristaux (*voir* aussi *Cristallographie* et C 0400).
3220 Équations de déformation et de mouvement élastique; solutions générales; solutions spéciales; vibrations (*voir* aussi C 9100).
3230 Torsion et flexion des prismes.
3240 Tiges et fils élastiques; ressorts.

3250 Plaques et cloches élastiques.
3260 Choc et résistance dynamique; charges mobiles.
3270 Stabilité des systèmes élastiques.
3280 Principes de construction, y comprises les formules approchées pour la résistance des matériaux.
3290 Détermination expérimentale des constantes élastiques.

Résistance des matériaux, dureté, frottement, viscosité, lubrification.

3600 Généralités.
3610 Élasticité imparfaite; limites de l'élasticité.
3620 Déformation; conditions de rupture.
3630 Déformation permanente (after-strain). Fatigue de l'élasticité.
3640 Dureté. Frottement entre solides; abrasion.
3650 Viscosité; plasticité; ductilité; malléabilité; etc.
3660 Poussées des terres et du sable.
3670 Lubrification.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, par MM. les Secrétaires perpétuels.

Tome CXXXII; 1901.

Picard (*É.*). — Sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables. (18-19).

A 4020 8060

Minkowski (*H.*). — Sur les surfaces fermées. (21-24).

A 3280 8460

Duport (*H.*). — Sur le théorème des forces vives. (24-26).

B 0820

Schlesinger (*L.*). — Sur les équations linéaires à points d'indétermination. (27-28).

A 4850

Zaremba (*S.*). — Sur la théorie des équations de la Physique mathématique. (29-30).

A 5660

Humbert (*G.*). — Sur les fonctions quadruplement périodiques. (72-74).

A 4070 8060

Egorov (*D.-Th.*). — Sur les systèmes orthogonaux admettant un groupe de transformations de Combescure. (74-77).

A 8860

Jordan (*C.*). — Notice sur M. Ch. Hermite. (101-105).

A 0010

Duhem (*P.*). — Sur la condition supplémentaire en Hydrodynamique. (117-120).

B 2400 C 2450

Kantor (*S.*). — Sur une généralisation d'un théorème de M. Picard. (124-126).

A 8040 8100

Liapounoff. — Sur un théorème du Calcul des probabilités. (126-128).

A 1630

Frémont (*Ch.*). — Positions diverses de la fibre neutre dans les corps rompus par flexion; raison de la fragilité. (202-203).

B 3620

Duhem (*P.*). — Sur la stabilité isentropique d'un fluide. (244-246).

B 2400 C 2450

Enriques (*F.*). — Remarque au sujet d'une Note de M. S. Kantor. (248-249).

A 8040 8100

Guichard (*C.*). — Sur les réseaux qui, par la méthode de Laplace, se transforment des deux côtés en réseaux orthogonaux. (249-251).

A 8810 8870

Boutroux (*P.*). — Sur la densité des zéros et le module maximum d'une fonction entière. (251-254).

A 3610

Egorov (*D.-Th.*). — Une classe nouvelle de surfaces algébriques qui admettent une déformation continue en restant algébriques. (302-304).

A 8850

Clairin. — Sur certaines transformations de Bäcklund. (305-307).

A 5230

Coulon (*J.*). — Sur le théorème d'Hugoniot et la théorie des surfaces caractéristiques. (307-310).

B 2400 A 4830

Adhémar (*R. d'*). — Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre. (310-312).

A 4840

Buhl (*A.*). — Sur les formes linéaires aux dérivées partielles d'une intégrale d'un système d'équations différentielles simultanées qui sont aussi des intégrales de ce système. (313-315).

A 4830

Ribière. — Sur les voûtes en arc de cercle encastrées aux naissances. (315-317).

B 3270

Poincaré (*H.*). — Sur une forme nouvelle des équations de la Mécanique. (369-371).

A 4830 5230 B 0820

Duhem (*P.*). — De la propagation des ondes dans les fluides visqueux. (393-396).

B 2490

Guichard (*C.*). — Sur la déformation du paraboloïde quelconque. (398-401).

A 8850

Hurwitz (*A.*). — Sur le problème des isopérimètres. (401-403).

A 3280 5610

Alezais (*R.*). — Sur des fonctions de deux variables analogues aux fonctions modulaires. (403-405).

A 4070

Maillet (*E.*). — Sur une certaine catégorie de fonctions transcendantes. (460-462).

A 3220

Vasseur. — Traces superficielles laissées par les outils dans le travail du sciage des métaux. (462-465).

B 3640

Egorov (*D.-Th.*). — Sur une certaine surface du troisième ordre. (538-540).

A 7650 8850

Maillet (*E.*). — Sur les systèmes complets d'équations aux dérivées partielles. (540-542).

A 4830

Duhem (*P.*). — Sur les ondes du second ordre, par rapport aux vitesses, que peut présenter un fluide visqueux. (607-610).

B 2490

Darboux (*G.*). — Notice sur la vie et les travaux de M. Th. Moutard. (614-616).

A 0010

Maillet (*E.*). — Sur une certaine catégorie de fonctions transcendantes. (622-624).

A 3220

Autonne. — Sur les groupes quaternaires réguliers d'ordre fini. (624-627).

A 1230 8080

Duhem (*P.*). — De la propagation des discontinuités dans un liquide visqueux. (658-662).

B 2490

Duport (*H.*). — Sur la loi de l'attraction universelle. (662-663).

B 0820

Cousin (*P.*). — Sur les zéros des fonctions entières de n variables. (667-668).

A 3640

Ribière. — Sur les vibrations des poutres encastrées. (668-670).

B 3220

Jouguet (*E.*). — Sur la propagation des discontinuités dans les fluides. (673-676).

B 2400 C 2450

Jonquières (*de*). — Au sujet d'une précédente Communication. (750).

A 2830

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur une formule de M. Fredholm. (751-753).

A 3630

Padé (*H.*). — Sur l'expression générale de la fraction continue approchée de $(1+x)^m$. (754-756).

A 3220 4120

Liapounoff. — Une proposition générale du Calcul des probabilités. (814-815).

A 1630

Servant. — Sur la déformation du paraboloïde général. (816-818).

A 8850

Ocagne (*M. d'*). — Sur la somme des angles d'un polygone à connexion multiple. (818-820).

A 6420

Lippmann (*G.*). — Sur la puissance représentative d'une portion finie de courbe continue. (904-905).

A 0430 5610

Borel (*E.*). — Sur la décomposition des fonctions méromorphes en éléments simples. (906-908).

A 3610

Maillet (*E.*). — Sur les racines des équations transcendantes. (908-910).

A 3210

Padé (*H.*). — Sur la fraction continue de Stieltjes. (911-912).

A 3220

Miller (*G.-A.*). — Sur les groupes d'opérations. (912-914).

A 1220

Picard (*É.*). — Sur les résidus et les périodes des intégrales doubles de fonctions rationnelles. (929-931).

A 4020 8060

Duhem (*P.*). — De la propagation des discontinuités dans un liquide visqueux. (944-946).

B 2490

Bricard (*R.*). — Sur une question relative au déplacement d'une figure invariable. (947-950).

B 0420

Borel (*E.*). — Sur les fonctions entières de plusieurs variables et les modes de croissance. (950-952).

A 3640

Duhem (*P.*). — Sur la stabilité d'un système animé d'un mouvement de rotation. (1021-1023).

B 2520

Lebesgue (*H.*). — Sur une généralisation de l'intégrale définie. (1025-1028).

A 3200 3260

Dulac (*H.*). — Sur les intégrales analytiques des équations différentielles du premier ordre dans le voisinage de conditions initiales singulières. (1028-1030).

A 4810

Séguier (*de*). — Sur les équations de certains groupes. (1030-1033).

A 1210

Maillet (*E.*). — Sur les lois des montées de Belgrand et les formules du débit d'un cours d'eau. (1033-1034).

B 2810

Demoulin (*A.*). — Sur une classe particulière de surfaces réglées. (1097-1100).

A 7650

Tzitzéica (*G.*). — Sur la déformation continue des surfaces. (1100-1102).

A 8850

Desaint (*L.*). — Sur les séries de Taylor et les étoiles correspondantes. (1102-1105).

A 3240

Guillaume (*C.*). — Procédé pratique pour la correction de l'erreur secondaire des chronomètres. (1105-1108).

B 0150

Duhem (*P.*). — Sur les théorèmes d'Hugoniot, les lemmes de M. Hadamard et la propagation des ondes dans les fluides visqueux. (1163-1167).

B 2460 2490

Dulac (*H.*). — Sur les intégrales réelles des équations différentielles du premier ordre dans le voisinage d'un point singulier. (1169-1172).

A 4810

Lelieuvre (*M.*). — Sur certaines relations involutives. (1172-1174).

A 2410 8030

Siacci (*F.*). — Sur un problème de d'Alembert. (1175-1178).

B 1610 1650

Autonne (*L.*). — Sur les groupes réguliers d'ordre fini. (1216-1218).

A 1230

Marey. — Changements de direction et de vitesse d'un courant d'air qui rencontre des corps de formes diverses. (1291-1296).

A 2830

Duhem (*P.*). — Sur les ondes longitudinales et transversales dans les fluides parfaits. (1303-1306).

B 2480

Hele-Schaw (*H.-S.*). — Contribution à l'étude théorique et expérimentale des veines liquides déformées par des obstacles et à la détermination des lignes d'induction d'un champ magnétique. (1306-1312).

B 2490 C 5430

Raffy (*L.*). — Détermination des surfaces qui sont à la fois des surfaces de Joachimsthal et des surfaces de Weingarten. (1312-1315).

A 8830

2e Partie.

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur la série de Bernoulli. (1388-1391).

A 3630

Vallier (*E.*). — Sur les intégrales eulériennes incomplètes de deuxième espèce et les intégrales indéfinies des fonctions précédentes. (1391-1395).

A 4410

Phragmèn (*E.*). — Sur le domaine de convergence de l'intégrale infinie $\int_0^\infty F(ax)e^{-a}\,da$. (1396-1399).

A 4430

Rabut. — Sur un invariant remarquable de certaines transformations réalisées par des *appareils enregistreurs*. (1399-1401).

A 0080

Rabut. — Équations et propriétés fondamentales des figures autopolaires réciproques dans le plan et dans l'espace. (1470-1472).

A 8010 8430 8830

Hurwitz (*A.*). — Sur les séries de Fourier. (1473-1475).

A 5610

Mesnager. — Sur l'application de la théorie de l'élasticité au calcul des pièces rectangulaires fléchies. (1475-1478).

B 3270

Dumont. — Théorie des surfaces du troisième ordre. (1541).

A 7640

Egorov (*D.-Th.*). — Sur la déformation continue des surfaces. (1545-1547).

A 8850

Dickson (*L.-E.*). — Théorie des groupes linéaires dans un domaine arbitraire de rationalité. (1547-1548).

A 1240

Zaremba (*S.*). — Sur l'intégration de l'équation $\Delta w - \mu^2 w = 0$. (1549-1550).

A 5650

Tome CXXXIII.

Seligmann-Lui (*A.*). — Sur une interprétation mécanique des principes de la Thermodynamique. (30-33).

B 2010 C 2400

Demartres. — Sur les réseaux conjugués de courbes orthogonales isothermes. (92-94).

A 8450

Kœnigs (*G.*). — Sur un nouveau joint à angle variable. (139-142).

B 0430

Coulon (*J.*). — Sur l'extension de la méthode d'intégration de Riemann. (142-145).

A 4840

Cosserat (*E.*) et *Cosserat* (*F.*). — Sur la solution des équations de l'élasticité, dans le cas où les valeurs des inconnues à la frontière sont données. (145-147).

B 3220

Décombe (*L.*). — Sur le mouvement du pendule en milieu résistant. (147-149).

B 1640 2860

Vallier (*E.*). — Sur la loi des pressions dans les bouches à feu. (203-206).

B 1650

Autonne (*L.*). — Sur l'hermitien. (209-210).

A 2030

Cosserat (*E.*) et *Cosserat* (*F.*). — Sur une application des fonctions potentielles de la théorie de l'élasticité. (210-213).

A 5660 B 3220

Boussinesq (*J.*). — Sur le pouvoir refroidissant d'un courant liquide ou gazeux. (257-262).

C 2040

Demoulin (*A.*). — Sur les surfaces susceptibles d'une déformation continue avec conservation d'un système conjugué. (265-268).

A 8850

Dulac (*H.*). — Sur les intégrales analytiques des équations différentielles du premier ordre et de degré quelconque dans le voisinage de certaines valeurs singulières. (268-270).

A 4880

Cosserat (*E.*) et *Cosserat* (*F.*). — Sur la déformation infiniment petite d'un corps élastique. (271-273).

A 5660 B 3220

Chèneveau (*C.*) et *Cartaud* (*G.*). — Sur les vibrations de nappes liquides de formes déterminées. (273-276).

B 2460

Appell (*P.*). — Sur le théorème de Poisson et un théorème récent de M. Buhl. (317-319).

A 4830 B 2030

Vallier (*E.*). — Loi des pressions dans les bouches à feu. Recherche de l'exposant de lenteur. (319-321).

B 1650

Cosserat (*E.*) et *Cosserat* (*F.*). — Sur la déformation infiniment petite d'une enveloppe sphérique élastique. (326-329).

A 5660 B 3220

Gravaris (*G.*). — Sur une relation qui existe probablement entre l'angle caractéristique de la déformation des cristaux et le coefficient newtonien de restitution. (329-330).

B 3210

Kœnigs (*G.*). — Étude critique sur la théorie générale des mécanismes. (330-333).

B 0430

Mittag-Leffler (*G.*). — Un critère pour reconnaître les points singuliers de la branche uniforme d'une fonction monogène. (357-361).

A 3200

Cosserat (*E.*) et *Cosserat* (*F.*). — Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoïde élastique soumis à des efforts donnés sur la frontière. (361-364).

A 5660 B 3220

Gravaris (*G.*). — Vérification de la relation qui existe entre l'angle caractéristique de la déformation des métaux et le coefficient de restitution de leur élasticité. (364-366).

B 3210

Siacci (*F.*). — Sur un problème de d'Alembert. (381-382).

B 1650

Cosserat (*E.*) et *Cosserat* (*F.*). — Sur un point critique particulier de la solution des équations de l'élasticité, dans le cas où les efforts sur la frontière sont donnés. (382-384).

B 3220

Kœnigs (*G.*). — Sur les principes généraux des mécanismes. (385-387).

B 0430

Sarrau (*E.*). — Sur l'application du principe de l'énergie aux

phénomènes électrodynamiques et électromagnétiques. (402-407).

B 2010 C 6400 6600

Petot (*A.*). — Sur le mode de fonctionnement des freins dans les automobiles. (410-412).

B 3640

Sarrau (*E.*). — Sur l'application des équations de Lagrange aux phénomènes électrodynamiques et électromagnétiques. (421-425).

B 2020 C 6400 6600

Humbert (*G.*). — Sur la transformation quadratique des fonctions abéliennes. (425-429).

A 4070 8060

Tzitzéica (*G.*). — Sur la déformation continue des surfaces. (431-432).

A 8850

Kœnigs (*G.*). — Esquisse d'une théorie générale des mécanismes. (432-434).

B 0430

Liouville (*R.*). — Sur l'équilibre des corps élastiques. (434-437).

B 3200

Frémont (*C.*). — Évaluation de la résistance à la traction de l'acier déduite de la résistance au cisaillement. (437-439).

B 3620

Stekloff (*W.*). — Sur l'existence des fonctions fondamentales. (450-453).

A 5660

Donder (*Th. de*). — Sur les invariants intégraux. (453-455).

A 5210 5240

Poisson (*G.*). — Sur la voûte élastique. (470-472).

B 3280

Kœnigs (*G.*). — Les systèmes binaires et les couples d'éléments cinématiques. (483-486).

B 0430

Boussinesq (*J.*). — Problème de la dissipation, en tous sens, de la chaleur, dans un mur épais à face rayonnante. (497-502).

C 2050

Suchar (*P.*). — Sur les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients algébriques. (508-510).

A 4850 4060

Bohlin (*K.*). — Sur l'extension d'une formule d'Euler et sur le calcul des moments d'inertie principaux d'un système de points matériels. (530-532).

A 2010

Kœnigs (*G.*). — Propriétés générales des couples d'éléments cinématiques. (533-535).

B 0430

Duhem (*P.*). — Des ondes qui peuvent persister en un fluide visqueux. (579-580).

B 2490

Davidoglou (*A.*). — Sur les intégrales périodiques des équations différentielles binomes. (582-584).

A 4850 5630

Kœnigs (*G.*). — Sur les chaînes secondaires. (621-624).

B 0430

Miller (*G.-A.*). — Sur les groupes de substitutions. (624-625).

A 1210

Suchar (*P.*). — Sur les équations différentielles linéaires de

second ordre à coefficients algébriques de deuxième et troisième espèce. (626-628).

A 4850

Demoulin (*A.*). — Sur deux classes particulières de congruences de Ribaucour. (628-630).

A 8080

Chessin (*A.*). — Sur la toupie de Foucault. (676-679).

B 1640

Poincaré (*H.*). — Sur l'*Analysis situs*. (707-709).

A 6420 1210

Poincaré (*H.*). — Rapport sur les papiers laissés par Halphen. (722-724).

A 0020

Raffy (*L.*). — Sur les réseaux conjugués persistants. (729-732).

A 8850

Maillet (*E.*). — Sur les équations différentielles rationnelles. (782-784).

A 4810 3630

Davidoglou (*A.*). — Sur le nombre de racines communes à plusieurs équations. (784-786).

A 3270

Picard (*É.*). — Sur les périodes des intégrales doubles dans la théorie des fonctions algébriques de deux variables. (795-800).

A 4020 3270 8060

Davidoglou (*A.*). — Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations. (860-863).

A 3260 2420

Armengaud (*J.*). — Méthode graphique permettant d'étudier

les circonstances de la marche d'un aérostat dirigeable, par l'examen de la projection de sa trajectoire sur le sol. (900-903).

B 2860

Painlevé (*P.*). — Sur les singularités essentielles des équations différentielles. (910-913).

A 4880

Raffy (*L.*). — Sur la déformation des surfaces et, en particulier, des quadriques. (915-917).

A 8850

Pellet (*A.*). — Calcul des racines réelles d'une équation. (917-918).

A 2420

Tzitzéica (*G.*). — Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations. (918-920).

A 2420 3260 3270

Carvallo (*E.*). — Sur l'application des équations de Lagrange aux phénomènes électrodynamiques. (924-927).

B 2020 C 6410

Poincaré (*H.*). — Sur la connexion des surfaces algébriques. (970-973).

A 8100 6420 1220

Demoulin (*A.*). — Sur les systèmes conjugués persistants. (986-989).

A 8450

Maillet (*E.*). — Sur les équations et les nombres transcendants. (989-990).

A 3240 2440 2920

Deslandres (*H.*). — Méthode permettant de déterminer la vitesse

propre des aérostats dirigeables. Application aux expériences de M. Santos-Dumont. (993-996).

B 2860

Armengaud (*J.*). — Note complétant celle du 25 novembre dernier et donnant par un tracé, avec une approximation de $\frac{1}{20}$ au moins, la trajectoire sur le sol de l'aérostat dirigeable de M. Santos-Dumont dans l'épreuve du 19 octobre. (996-999).

B 2860

Picard (*E.*). — Sur les périodes des intégrales doubles. (1171-1173).

A 4020 8060 6420

Pellet (*A.*). — Calcul des racines réelles des équations. (1186-1187).

A 2440

Riquier. — Sur le calcul par cheminement des intégrales de certains systèmes différentiels. (1187-1189).

A 4840

Perrin (*R.*). — Sur la séparation et le calcul des racines réelles des équations. (1189-1191).

A 2440

Maillet (*E.*). — Sur les nombres e et π et les équations transcendantes. (1191-1192).

A 2920

Saussure (*R. de*). — Sur le mouvement le plus général d'un corps solide qui possède deux degrés de liberté autour d'un point fixe. (1193-1195).

A 8420

Niels Nielsen. — Sur les séries de factorielles. (1273-1275).

A 3630

Lœwy (*A.*). — Sur les équations différentielles linéaires qui sont de la même espèce. (1276-1278).

A 4850

Lindelöf (*E.*). — Quelques théorèmes nouveaux sur les fonctions entières. (1279-1281).

A 3610

Guldberg (*A.*). — Sur les invariants intégraux et les paramètres différentiels. (1282-1283).

A 5240 1240

Saussure (*R. de*). — Sur le mouvement d'une droite qui possède trois degrés de liberté. (1283-1285).

A 8420

Mesnager. — Tensions intérieurs produites par deux forces égales et directement opposées agissant sur un solide indéfini. (1285-1287).

B 3210

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK [1].

Tome 108 (4 Cahiers). Berlin; 1891.

Rosenow (*H.*). — Sur les systèmes d'invariants qui servent à caractériser les différentes classes de formes bilinéaires. (1-24).

Kronecker a montré comment on peut, par une transformation congruente, ramener une forme bilinéaire à un nombre quelconque de couples de variables, à une somme de « formes élémentaires »; chaque classe de formes bilinéaires équivalentes est caractérisée par un système d'invariants qui ne sont autres que les entiers indiquant les nombres de couples de variables qui entrent dans ces diverses formes élémentaires. L'auteur établit les différentes formes réduites pour $n = 1, 2, 3, 4$ couples de variables, en partant des systèmes d'invariants de Kronecker. Il établit ensuite pour $n = 3$ une autre méthode de classification reposant sur certains invariants, fonctions entières des coefficients de la forme bilinéaire.

Guido Hauck. — Théorie des correspondances trilinéaires de

[1] Voir *Bulletin*, t. XXVI_2, p. 5.

systèmes plans. Quatrième article : La relation trilinéaire entre trois formes fondamentales d'une dimension (avec une planche). (25-49).

Dans un article précédent, l'auteur a considéré une correspondance entre les points des trois axes principaux de trois systèmes plans en relation projective trilinéaire; on a ainsi, dans un plan, trois ponctuelles rectilignes dont les points correspondants peuvent être regardés comme les projections d'un même point variable du plan vu de trois centres de projection fixes. Il existe, entre deux systèmes de points correspondants x, x', x'' et y, y', y'', une relation aux rapports anharmoniques

$$(pqxy)(p'q'x'y')(p''q''x''y'') = 1,$$

où les p et les q sont les points doubles, et qui, d'après les recherches de M. Schubert, montre que cette correspondance est la plus générale des correspondances trilinéaires entre trois ponctuelles. Après avoir introduit la constante caractéristique C, il indique des constructions de ponctuelles trilinéaires avec des éléments donnés (points doubles, caractéristique, systèmes de points correspondants). Il étend la théorie aux faisceaux de rayons et aux faisceaux de plans et étudie le cas particulier dans lequel chaque ponctuelle ne contient qu'un point double. Enfin, revenant à la considération des systèmes plans en correspondance projective trilinéaire, l'auteur montre que trois faisceaux de rayons correspondants sont en relation trilinéaire.

Pochhammer (*L.*). — Sur une équation différentielle linéaire d'ordre n avec un point singulier à distance finie. (50-87).

L'équation différentielle dont il s'agit, et qui a été introduite par M. Goursat dans son Mémoire *sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur*, peut être regardée comme un cas limite de l'équation différentielle hypergéométrique générale et admet comme solution particulière la fonction entière

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}; \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}; x) \\ &= 1 + \frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}}{1.\rho_1\rho_2\ldots\rho_{n-1}}x + \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\alpha_2(\alpha_2+1)\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_{n-1}+1)}{1.2.\rho_1(\rho_1+1)\rho_2(\rho_2+1)\ldots\rho_{n-1}(\rho_{n-1}+1)}x^2 + \ldots \end{aligned}\right.$$

Cette série peut être représentée, comme M. Goursat l'a montré pour $n = 3$, par un produit d'intégrales eulériennes et d'une intégrale multiple définie d'ordre $n - 1$. Dans son Mémoire, l'auteur s'occupe de l'intégration de l'équation différentielle au moyen d'intégrales définies de cette nature. Il y arrive par la méthode qu'il a déjà appliquée dans un Mémoire précédent (même Journal, t. 102). Les intégrales multiples obtenues ont toutes la même fonction d'intégration, mais, pour obtenir un système complet d'intégrales, il faut utiliser certains contours d'intégration fermés. En se servant de contours parcourus deux fois, on peut faire en sorte que les intégrales particulières ainsi trouvées soient toutes convergentes, sous la seule condition toutefois qu'aucune des quantités ρ_ν, $\rho_\mu - \rho_\nu$ ne soit entière.

Les deux premiers paragraphes exposent la théorie pour $n = 3$; dans le n° 3, l'auteur montre comment on peut réduire l'intégration de l'équation d'ordre n

à celle d'une équation analogue d'ordre $n-1$. Dans le n° 4, il établit le système des intégrales multiples qui satisfont à l'équation donnée et leur relation avec les séries de puissances qu'on en peut déduire.

Kowalewsky (*Sophie von*). — Courte notice nécrologique par Kronecker. (88).

Reye (*Th.*). — Sur les systèmes linéaires de faisceaux de plans projectifs et de réseaux ou d'espaces collinéaires, V, VI. (89-124).

V. L'auteur poursuit les recherches exposées au t. 107, p. 162, du même Journal, et s'occupe d'abord du système linéaire $|\Sigma_4|$ de ∞^4 espaces collinéaires et du système associé $|\varepsilon_{4,3}|$ de ∞^3 systèmes collinéaires $|\varepsilon_4|$ formés de ∞^4 plans homologues des espaces de $|\Sigma_4|$. A ce système $|\Sigma_4|$ est attaché une courbe gauche C^{10} qui le caractérise complètement et qui est contenue dans les ∞^4 surfaces doubles du quatrième ordre K_4 de $|\Sigma_4|$. C'est aussi le lieu des points doubles des ∞^1 espaces singuliers du système; de plus, il existe vingt espaces doublement singuliers dont les axes coupent C^{10} en quatre points.

VI. Dans cette dernière Partie, l'auteur s'occupe d'abord, toujours par la même méthode synthétique du système linéaire $|\Sigma_5|$ de ∞^5 espaces collinéaires. A ce système sont attachés vingt points fondamentaux par lesquels passent toutes les courbes C^{10} et toutes les surfaces K_4. Chacun d'eux est le point double de ∞^2 espaces singuliers de $|\Sigma_5|$. Le système contient ∞^1 espaces doublement singuliers, le lieu de leurs axes est une surface du vingtième ordre qui admet les vingt points fondamentaux pour points sextuples.

L'auteur termine par l'étude analytique du cas général qui le conduit à une réciprocité remarquable entre les systèmes $|\Sigma_n|$ et $|\Sigma_{14-n}|$ qui dépendent d'ailleurs du même nombre de paramètres, et donne quelques indications sur le système $|\Sigma_6|$.

Meyer (*A.*). — Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies. (125-139).

Eisenstein a, le premier, attiré l'attention sur l'existence d'une seule classe de formes quadratiques ternaires indéfinies, pour un déterminant inférieur à 20 et sans diviseur carré, et pour un genre donné. L'auteur, dans sa dissertation inaugurale, a démontré qu'il en était encore ainsi lorsque les deux invariants Ω et Δ sont impairs et premiers entre eux. Il s'occupe dans le présent Mémoire du cas des invariants pairs. Il montre que, sous certaines conditions, deux formes ternaires indéfinies primitives aux invariants Ω et Δ et de même genre sont équivalentes. En particulier, il en est ainsi si les invariants ne sont pas divisibles par 4 et n'admettent aucun diviseur commun impair. La démonstration repose sur certaines propriétés de l'équation de Pell.

Hensel (*K.*). — Application de la théorie des systèmes de modules à un problème d'Optique. (140-143).

On sait que le potentiel des forces élastiques, dans la théorie de l'élasticité des corps solides homogènes, est une forme quadratique de six arguments ξ_{11}, ξ_{22}, ξ_{33}, ξ_{23}, ξ_{31}, ξ_{12} dépendant dans le cas général de 21 constantes. Les conditions pour que cette forme puisse convenir à l'éther lumineux sont établies d'une manière très rapide; elle doit se réduire à un carré parfait de ξ_{11}, ξ_{22}, ξ_{33} par rapport au système de modules

$$\xi_{ik}^2 - 4\xi_{ii}\xi_{kk}, \quad \xi_{ik}\xi_{il} - 2\xi_{ii}\xi_{kl},$$

ce qui conduit immédiatement au résultat connu.

Netto (*E.*). — Application des systèmes de modules à une question de la théorie des déterminants. (144-146).

Si l'on considère les deux systèmes réciproques

$$M_{gh} = \sum_i u_{gi} v_{ih} - \delta_{gh}, \qquad \overline{M}_{gh} = \sum_i v_{gi} u_{ih} - \delta_{gh} \qquad (i, g, h = 1, 2, \ldots, n),$$

où u, v désignent des variables, δ_{gh} étant égal à 1 ou à 0 suivant que les indices g, h sont égaux ou non, Kronecker est arrivé à représenter les $\overline{M}_{gh}$ comme fonctions linéaires homogènes des M_{gh}, les coefficients étant des fonctions entières des u, v de degré $2n$. L'auteur montre qu'on peut trouver une représentation pour laquelle le degré des coefficients ne dépasse pas $2n - 2$.

Schottky (*F.*). — Théorie des fonctions elliptiques-hyperelliptiques de quatre arguments. (147-178, 193-255).

Si l'on considère les relations qui existent entre les 4^2 fonctions thêta de ρ arguments, l'auteur appelle *solution particulière de ces relations* un ensemble de fonctions algébriques d'une ou plusieurs variables qui, mises à la place des fonctions thêta, vérifient toutes ces relations. Alors, au moins pour des valeurs limitées des arguments, les fonctions thêta sont proportionnelles à des expressions algébriques. Les arguments eux-mêmes deviennent alors des intégrales et, par application du théorème d'addition, on peut passer de la solution particulière à la solution générale. Le but du Mémoire est l'application de cette méthode à l'étude de ce qu'il appelle les *fonctions elliptiques-hyperelliptiques de quatre arguments*, caractérisées par la condition que deux fonctions thêta paires s'annulent lorsque leurs arguments sont nuls; si, en outre, on ajoutait une certaine relation entre les paramètres $J = 0$, on aurait le cas des fonctions hyperelliptiques précédemment traité par l'auteur.

Dans les n°s 1 et 2 de la première Partie, il est montré comment la méthode s'applique aux cas de $\rho = 2$ et 3; dans ce dernier cas, si l'on annule deux des fonctions Θ, les 62 autres sont proportionnelles aux racines carrées de 62 fonctions elliptiques du sixième ordre d'un argument ω. A partir du n° 3, l'auteur s'occupe du cas $\rho = 4$ et cherche les relations entre les constantes c, valeurs initiales des fonctions Θ paires, en supposant, comme il a été dit plus haut, que deux de ces constantes sont nulles. Le théorème fondamental qui lui sert de point de départ est l'existence d'une relation linéaire à coefficients constants entre chaque série de six produits azygétiques de fonctions Θ paires; ces coef-

ficients sont, au signe près, des produits des constantes c, ce qui, en faisant dans ces relations tous les arguments nuls et tenant compte de ce que deux des constantes c sont nulles, fournit des relations à deux termes qui permettent d'exprimer les constantes au moyen de fonctions Θ elliptiques d'un certain nombre de paramètres (nos 3-8).

La deuxième Partie est consacrée d'abord aux fonctions Θ elles-mêmes. Il cherche une solution particulière en annulant les deux fonctions Θ paires dont les valeurs initiales sont nulles. Un certain nombre de quotients de fonctions Θ peuvent d'abord s'exprimer en fonctions elliptiques d'un paramètre u (nos 9-11). Puis tous les quotients de fonctions Θ s'expriment en fonctions elliptiques de deux arguments w, w' dont la somme est u, ou peuvent s'exprimer algébriquement par de telles fonctions. Il introduit une certaine courbe algébrique pour laquelle les coordonnées x, y d'un point sont respectivement une fonction elliptique du second ordre et la racine carrée d'une fonction elliptique du seizième ordre qui contient x^4 en facteur; à chacun des arguments w, w' correspond un point de cette courbe (nos 12-20).

Enfin, dans la troisième Partie, l'auteur montre d'abord qu'en supposant toujours les arguments des fonctions Θ tels que les deux fonctions Θ paires dont il a été question s'annulent, ces arguments sont des sommes d'intégrales de fonctions rationnelles des points (x, y), (x', y') (no 21); puis il applique le théorème d'addition pour passer de la solution particulière à la solution générale; si l'on prend pour les arguments des sommes d'intégrales de quatre points de la courbe, les fonctions abéliennes qu'on peut former au moyen des fonctions Θ deviennent des fonctions rationnelles symétriques de ces quatre points qui ne changent pas si, aux arguments w de deux de ces points, on ajoute une certaine demi-période des fonctions elliptiques qui ont servi à définir la courbe.

Sujets de concours pour les prix de l'Académie Jablonowski de Leipzig pour les années 1893 et 1894. (179-180).

Fuchs (*L.*). — Sur une représentation conforme au moyen d'une fonction rationnelle. (181-192).

L'auteur reprend une question qu'il avait déjà traitée (*Journal für Mathematik*, t. 106), et relative à la représentation conforme définie par la relation

$$(\alpha) \qquad z = F(w) = \frac{f(w)}{w.g(w)},$$

où $f(w)$ et $g(w)$ sont des fonctions rationnelles entières ne s'annulant pas pour $w = 0$. Si, dans le plan de la variable w, on considère un cercle décrit de l'origine comme centre et de rayon suffisamment petit, à deux points w différents pris à l'intérieur de ce cercle correspondent toujours deux points z différents; le plus grand rayon qui satisfasse à cette condition est donné par le module de celle des racines de l'équation

$$(\beta) \qquad F'(w) = 0$$

qui a le plus petit module; sinon, dans le cas où les équations

$$(\gamma) \qquad \psi(w, w_1) = \frac{F(w_1) - F(w)}{w_1 - w} = 0,$$

$$(\delta) \qquad w F'(w) + w_1 F'(w_1) = 0$$

ont une solution (w, w_1) pour laquelle les modules de w, w_1 sont égaux et où ce module commun est inférieur aux modules de racines de (β), il donne le rayon limite.

L'auteur donne une nouvelle démonstration de ce théorème et il en fait une application à un problème de représentation conforme faisant correspondre à des points w, situés au sommet d'un polygone régulier ayant pour centre l'origine, des points z donnés arbitrairement.

Günther (*Paul*). — Contribution à la théorie des fonctions elliptiques. (256-265).

Entre deux fonctions elliptiques aux mêmes périodes, il existe une relation algébrique et l'on peut se proposer de résoudre, d'une manière purement algébrique, les trois problèmes suivants :

a. Décider *a priori* si cette relation est de genre 0 ou 1.

b. Dans le premier cas, trouver une troisième fonction elliptique en fonctions rationnelles de laquelle les deux premières puissent s'exprimer.

c. Établir la relation elle-même entre les deux fonctions données.

Après avoir démontré d'une manière simple le théorème de M. Humbert sur le genre de la relation, l'auteur établit d'abord, par une méthode algébrique, cette relation

$$f(x, y) = 0;$$

il démontre ensuite que le premier membre est réductible ou irréductible, suivant que la courbe qu'elle définit est de genre 0 ou 1, ce qui lui permet de résoudre les problèmes *a* et *b*.

Hurwitz (*A.*). — Sur la comparaison de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique. (266-268).

L'auteur représente la différence entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de n quantités comme une somme de formes qui sont positives pour toutes les valeurs positives de ces quantités.

Schrœter (*H.*). — La configuration de Hesse (12_4, 16_3). (269-312).

Cette configuration, dans laquelle 12 points sont situés trois à trois sur 16 droites, chaque point étant situé sur quatre d'entre elles, s'est présentée à Hesse dans l'étude des cubiques (*Journal für Mathematik*, t. 36, p. 153). L'auteur se propose de l'étudier indépendamment des cubiques et en ne supposant connus que les théorèmes de Desargues, de Pascal et de Brianchon.

On peut obtenir cette configuration en partant de six points situés deux à deux sur trois droites concourantes; ils forment de quatre manières différentes deux triangles homologiques, ce qui conduit, d'après un théorème connu, à quatre droites contenant trois à trois six nouveaux points qui complètent la configuration (n° 1). Il correspond à cette configuration une configuration conjuguée dont les 12 points sont chacun le point de concours de trois droites joignant deux à deux six des premiers points. Les 12 points de la configuration sont, de 24 manières différentes, les sommets de deux hexagones dont chacun est à la fois inscrit et circonscrit à l'autre (n° 3). Ils se partagent aussi en trois groupes de quatre points constituant trois quadrangles complets; ces quadrangles sont en position desmique, c'est-à-dire que deux quelconques d'entre eux sont en perspective de quatre manières différentes, les centres de perspective étant les sommets du troisième quadrangle. Les 18 côtés de ces quadrangles coïncident avec les 18 côtés analogues de la configuration conjuguée, de manière à former sur chaque double côté une division harmonique (n° 4). Ces 18 côtés se groupent huit par huit, à savoir quatre d'un quadrangle avec quatre d'un autre, comme tangentes d'une même conique, et il y a 8 de ces coniques (n° 5). Chacun des trois quadrangles complets donne 3 points diagonaux et ces 9 points sont situés trois à trois sur six droites (n° 6). De plus, ils forment les sommets de trois triangles deux à deux homologiques, les trois centres d'homologie formant avec les neuf points diagonaux une nouvelle configuration $(12_4, 16_3)$ (n° 7). Les 72 autres points non encore considérés d'intersection des côtés des trois quadrangles sont situés six à six sur 12 droites et aussi six à six sur 24 coniques (n° 8). Après avoir montré qu'on peut dériver de la configuration en question un certain nombre d'autres configurations étudiées par de Vries et Cayley (n° 9), l'auteur montre que les 12 points sont situés sur une même cubique; cette cubique et celle qui correspond à la configuration conjuguée se coupent aux 9 points diagonaux; enfin les sommets de chacun des trois quadrangles ont même point tangentiel qui est l'un des centres d'homologie des triangles formés par les points diagonaux (n° 10). On retombe ainsi sur la définition primitive de Hesse.

L'auteur montre ensuite que, à part cette configuration, il n'y a qu'une autre configuration $(12_4, 16_3)$, et il en donne une construction élémentaire; les n points forment aussi les sommets de trois quadrangles en position desmique (n°s 11-12). Ils sont également situés sur une même cubique; les quatre sommets de chaque quadrangle se partagent en deux couples, les deux points de chaque couple ayant même point tangentiel en ligne droite avec les deux points de l'autre couple (n° 13). Enfin, dans un cas particulier, on retombe sur une figure considérée par Hurwitz (n° 14).

Schur (*Friedrich*). — Sur les systèmes dits complets d'équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes du premier ordre. (313-324).

Après avoir ramené un système complet à la forme de Jacobi :

$$\frac{\partial z}{\partial x_\alpha} - \sum_{\beta=q+1}^{n} \xi_\beta^\alpha(x) \frac{\partial z}{\partial x_\beta} \equiv Z_\alpha z = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, q),$$

l'auteur établit directement l'existence d'une solution se réduisant pour

$x_1 = x_2 = \ldots = x_q = 0$ à une série de puissances donnée $\varphi(x_{q+1}, \ldots, x_n)$, en se servant de la méthode des fonctions majorantes. Puis il ramène l'intégration du système par un système d'équations différentielles ordinaires à son vrai principe, qui est l'existence d'un groupe de transformations associé au système; si l'on n'y gagne aucune nouvelle méthode d'intégration, du moins on évite toute élimination après l'intégration du système d'équations différentielles.

« On intègre les équations

$$\frac{dx'_1}{dt} = -a_1, \quad \ldots, \quad \frac{dx'_q}{dt} = -a_q, \quad \frac{dx'_\alpha}{dt} = \sum_{\beta=1}^{q} \xi_\alpha^\beta(x')a_\beta \quad (\alpha = q+1, \ldots, n),$$

sous la condition que x'_α se réduise à x_α pour $t = 0$; si

$$x'_1 = x_1 - a_1 t, \quad \ldots, \quad x'_q = x_q - a_q t, \quad x'_\alpha = f_\alpha(x_1, \ldots, x_n, a_1 t, \ldots, a_q t)$$

sont les fonctions ainsi obtenues, les expressions

$$z_\alpha = f_\alpha(x_1, \ldots, x_n; x_1, \ldots, x_q) \quad (\alpha = q+1, \ldots, n)$$

sont les solutions du système complet qui se réduisent respectivement à x_α pour $x_1 = \ldots = x_q = 0$ et qui conservent leur forme par toutes les transformations du groupe

$$x'_1 = x_1 - u_1, \quad \ldots, \quad x'_q = x_q - u_q, \quad x'_\alpha = f_\alpha(x, u). \text{ »}$$

Kronecker (*L.*). — Quand et comment ont été introduites les formules thêta de Jacobi. (325-334).

La découverte de la relation qui existe entre quatre séries thêta a été fondamentale pour le développement ultérieur de la théorie des fonctions elliptiques. Jacobi aurait été conduit à cette découverte par la présence, dans les exponentielles d'un produit de quatre fonctions thêta, de sommes de quatre carrés qui, comme on sait, sont susceptibles d'être représentées d'une autre manière comme des sommes de quatre carrés. C'est de la fin de septembre ou du commencement d'octobre 1835 qu'il faudrait dater cette découverte. L'article se termine par la liste des cours professés par Jacobi.

Thomé (*L.-W.*). — Sur une application de la théorie des équations différentielles linéaires à la détermination du genre d'une fonction algébrique quelconque. (335-341).

Si une fonction algébrique s de x définie par une relation algébrique irréductible, de degré n par rapport à s, le coefficient de s^n étant l'unité, a ses n branches linéairement indépendantes, on peut déterminer directement l'ordre de chaque point de ramification au moyen des racines de l'équation aux exposants de l'équation différentielle linéaire et homogène du $n^{\text{ième}}$ ordre à coefficients rationnels à laquelle satisfait la fonction algébrique; ces racines sont, pour un point à distance finie, n nombres rationnels positifs dont le dénominateur ne dépasse pas n. Le genre de la fonction s'obtient alors facilement au moyen de la formule de Riemann. Si les n branches de la fonction algébrique

ne sont pas linéairement indépendantes, on peut toujours trouver une fonction rationnelle de s et de x qui satisfasse à cette condition et il n'y a qu'à raisonner sur cette nouvelle fonction.

Schottky (*F.*). — Sur la valeur du logarithme d'une fonction elliptique. (342-345).

L'auteur recherche la valeur du logarithme d'une fonction elliptique $\varphi(u)$ lorsqu'on va par un chemin donné d'un point donné u' à un point congruent u''; à part un facteur constant, elle est donnée par la différence entre la somme des distances des zéros et la somme des distances des pôles de $\varphi(u)$ à la droite $u'u''$, ces zéros et ces pôles étant pris à l'intérieur d'un certain parallélogramme des périodes mixtiligne dont l'un des côtés est le chemin donné $u'u''$.

Vahlen (*K.-Th.*). — Remarque sur la représentation complète des courbes gauches algébriques. (346-347).

L'auteur donne l'exemple d'une courbe gauche du cinquième ordre qui ne peut pas être représentée par l'intersection complète de trois surfaces.

Kronecker (*L.*). — Une formule d'Analyse arithmétique. (348).

Cette formule est

$$\frac{2}{\log N}\sum_{\rho}\log 2\sin\rho\pi = \sum_{p}\left[\frac{\log N}{\log p}\right]\frac{\log p}{\log N},$$

où la sommation est étendue, dans le second membre, à tous les nombres premiers p, dans le premier membre à toutes les fractions positives irréductibles ρ dont le dénominateur ne dépasse pas N et qui ne sont pas supérieures à $\frac{1}{2}$.

Tome 109, 4 Cahiers avec une planche. Berlin, 1892.

Hensel (*K.*). — Théorie des fonctions algébriques d'une variable et des intégrales algébriques. Premier Mémoire. (1-42).

Les méthodes usitées dans l'étude de la théorie des fonctions algébriques d'une variable ont, en général, le défaut de ne pouvoir s'appliquer telles quelles aux classes spéciales de formes algébriques. Ce n'est qu'en utilisant des fonctions rationnelles aussi bien par rapport aux coefficients de l'équation algébrique étudiée que par rapport aux variables qu'on arriverait à une théorie satisfaisante. L'auteur satisfait à ces conditions en introduisant les formes algébriques homogènes dont la théorie se ramène à celle des formes entières; on évite ainsi la considération des valeurs infinies des variables.

Après avoir considéré les formes rationnelles homogènes de deux variables x_1 et x_2 (n° I), il arrive aux formes algébriques homogènes; une équation algébrique

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

où les A sont des fonctions entières de x, conduit, en posant

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \qquad \eta = y\, A_0(x_1, x_2),$$

à une forme algébrique η. Les fonctions rationnelles de (x_1, x_2, η) se ramèneront aux formes homogènes et celles-ci aux formes homogènes algébriques entières, analogues aux nombres algébriques entiers (n° II).

Le premier problème qui se pose est la représention des formes homogènes entières de (x_1, x_2, η) au moyen d'un système fondamental. Par une analyse qui repose sur la considération de divisibilité par rapport à des puissances fractionnaires d'une forme rationnelle entière de (x_1, x_2), l'auteur arrive à établir, par des résolutions d'équations linéaires dont les coefficients dépendent rationnellement de ceux de l'équation donnée, un système fondamental

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \ldots, \quad \zeta_n$$

de n formes algébriques entières linéaires indépendantes; il définit alors le genre p de l'équation algébrique donnée par la relation

$$\sum_1^n \mu_i = p + n - 1,$$

où les μ sont les degrés des formes ζ. Il arrive de même plus simplement à un système fondamental de formes entières par rapport à un module donné (n°s III-VII).

L'auteur introduit ensuite ce qu'il appelle les *formes algébriques de première espèce,* qui jouissent de la propriété que leur produit, par une forme rationnelle entière quelconque $P(x_1, x_2)$, s'annule avec P; ces formes admettent aussi un système fondamental

$$\overline{\zeta_1}, \quad \overline{\zeta_2}, \quad \ldots, \quad \overline{\zeta_n}$$

qui se déduit très simplement du premier, les dimensions de ces nouvelles formes étant respectivement égales et de signes contraires à celles des premières (n° III).

Enfin, l'auteur considère les intégrales de première espèce

$$\int \Phi(x_1, x_2, \eta)(x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2),$$

où Φ est de degré -2, et montre qn'on les obtient toutes en prenant pour Φ une forme quelconque de première espèce; un simple dénombrement montre que le nombre de ces intégrales linéairement indépendantes est l'entier p introduit plus haut; la méthode employée montre qu'on peut supposer les coefficients de ces p intégrales particulières rationnels par rapport aux coefficients de l'équation donnée.

Günther (*Paul*). — Contribution à la théorie des fonctions elliptiques (*suite* du Tome 108, p. 256). (43-50).

L'auteur montre que la relation algébrique qui lie deux fonctions elliptiques

données aux mêmes périodes est obtenue immédiatement par la représentation paramétrique de Clebsch

$$x = \varphi(u) = \frac{F_1(p v) + p' v F_0(p v)}{H_1(p v) + p' v H_0(p v)},$$
$$y = \psi(u) = \frac{G_1(p v) + p' v G_0(p v)}{H_1(p v) + p' v H_0(p v)},$$

où v ne diffère de u que par une constante additive convenablement choisie; F_0, G_0, H_0 sont des polynomes de degré $\left[\frac{m-3}{2}\right]$; F_1, G_1, H_1 de degré $\left[\frac{m}{2}\right]$, m étant l'ordre de la courbe.

Il utilise cette représentation pour la recherche des points doubles, des points de rebroussement, de l'équation tangentielle et des points d'inflexion de la courbe.

Kötter (*Fritz*). — Sur le mouvement d'un corps solide dans un fluide. (51-81, 89-111).

Si un corps solide se meut dans un fluide parfait incompressible remplissant un espace simplement connexe s'étendant à l'infini dans toutes les directions, si l'état initial est sans tourbillons et que le fluide soit en repos à l'infini; si, enfin, les forces extérieures qui agissent sur le fluide admettent un potentiel, la forme générale des équations différentielles nécessaires pour déterminer complètement le mouvement du corps solide peut être indiquée sans avoir à résoudre la partie purement hydrodynamique du problème. Il y a, en effet, pour le fluide un potentiel des vitesses qui est une fonction linéaire des composantes u, v, w, p, q, r du mouvement instantané du corps solide, et le principe d'Hamilton peut s'appliquer comme dans l'espace vide; la force vive du système total est une forme quadratique homogène T de u, v, w, p, q, r. Les théorèmes élémentaires de la Mécanique fournissent trois intégrales premières, et Clebsch a montré qu'il en existait une quatrième, homogène et du second degré, lorsque T ne contient pas de rectangles, les coefficients des carrés étant liés par une certaine relation. H. Weber a résolu complètement le problème dans ce cas, en supposant toutefois que le mouvement instantané initial du corps solide peut être obtenu par une seule force de percussion, sans couple. L'auteur résout à son tour le même problème en se débarrassant de cette dernière restriction et arrive à des résultats tout à fait analogues à ceux obtenus par Weber. Il s'introduit des fonctions $\mathfrak{F}$ de deux arguments qui sont eux-mêmes fonctions linéaires du temps.

Les composantes $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$, $\frac{\partial T}{\partial w}$, $\frac{\partial T}{\partial p}$, $\frac{\partial T}{\partial q}$, $\frac{\partial T}{\partial r}$ de la percussion qui produirait à chaque instant le mouvement instantané du corps solide sont des quotients qui ont tous le même dénominateur formé, ainsi que les numérateurs, au moyen des fonctions $\mathfrak{F}$; il en est de même de u, v, w, p, q, r; l'auteur établit aussi les valeurs des neuf cosinus directeurs, des composantes par rapport aux axes fixes du mouvement instantané, les coordonnées de l'origine des axes mobiles; l'une de ces coordonnées contient une fonction additive, linéaire par rapport au temps, les deux autres contiennent des facteurs exponentiels dont les exposants sont également linéaires par rapport au temps.

Mirimanoff (*D.*). — Sur une question de la théorie des nombres. (82-88).

Soient θ une racine primitive de l'équation $x^\lambda - 1 = 0$ (λ étant premier), H le nombre des classes de nombres idéaux formés avec θ, a le premier et b le second facteur de H. Si H est divisible par λ. λ divise a, mais peut très bien ne pas diviser b; d'après M. Kummer, ce cas se présente pour trois valeurs de λ inférieures à 100. L'auteur donne un nouveau critérium de la divisibilité de b par λ.

Posons

$$\lambda = 2\nu + 1, \quad e(\theta) = \frac{(1-\theta^g)(1-\theta^{-g})}{(1-\theta)(1-\theta^{-1})}, \quad e_\varkappa = e(\theta^{g^\varkappa}) \quad (\varkappa = 0, 1, \ldots, \nu - 1),$$

g étant une racine primitive pour le module λ. Le facteur b est divisible par λ s'il existe un système d'exposants entiers $m_0, m_1, \ldots, m_{\nu-2}$ tels que $e_0^{m_0} e_1^{m_1} \ldots e_{\nu-2}^{m_{\nu-2}}$ soit égale à une puissance $\lambda^{\text{ième}}$ sans que tous les m soient divisibles par λ.

Heymann (*W.*). — Contribution à la théorie des équations aux différences. (112-117).

Étant donné un système d'équations aux différences

$$y_i^{x+1} + \sum_k f_{ik} y_k^x = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les f sont des polynomes entiers en x, l'auteur démontre qu'on peut, en général, le transformer de manière que dans chacune des n équations la somme $\sum$ contienne en facteur une expression linéaire en x.

Étant donnée une équation aux différences linéaires du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$y^{x+n} + p_{n-1} y^{x+n-1} + \ldots + p_1 y^{x+1} + p_0 y^x = 0,$$

et un système fondamental y_i^x d'intégrales particulières, on a

$$D^{x+1} = (-1)^n p_0 D^x,$$

D^x désignant le déterminant

$$| y_i^{x+k-1} | \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Enfin, l'auteur démontre un théorème analogue pour les systèmes d'équations aux différences linéaires.

Kœhler (*C.*). — Démonstration d'un théorème de l'*Analysis situs*. (118-120).

La démonstration ordinaire du théorème d'après lequel l'ordre de connexion d'un système de surfaces change d'une unité lorsqu'on trace une coupure, s'appuie sur la proposition de Riemann :

Si une surface n fois connexe est changée respectivement en ρ ou ρ' surfaces

simplement connexes par ν ou ν' coupures, on a toujours

$$\nu' - \rho' = \nu - \rho.$$

L'auteur montre qu'on peut suivre la marche inverse et obtenir ainsi une démonstration très simple de la proposition de Riemann.

Killing (*Wilhelm*). — Sur les fondements de la Géométrie. (121-186).

La Géométrie repose sur un certain nombre de notions ou concepts qui existent préalablement à tout théorème et à toute définition; l'auteur les appelle *concepts fondamentaux* (*Grundbegriffe*); un système de concepts fondamentaux doit satisfaire à trois conditions : en premier lieu, chacun d'eux doit être nécessaire pour toute géométrie; en second lieu, le système ne doit pas pouvoir être ramené à un moindre nombre de concepts; en troisième lieu, ils doivent suffire pour obtenir tous les autres concepts géométriques.

La possibilité de déduire des concepts fondamentaux les autres concepts, au moyen de définitions, suppose l'existence de théorèmes que l'auteur appelle *théorèmes fondamentaux de la Géométrie,* dont la démonstration ne se ramène pas à celle d'autres théorèmes.

Dans le n° 1, l'auteur énumère les concepts fondamentaux qu'il place à la base de la Géométrie et qui sont ceux de corps solide, parties d'un corps, espace, parties d'un espace, temps, repos, mouvement. Dans le n° 2 il énumère les théorèmes fondamentaux qui se rapportent tous aux propriétés des mouvements d'un corps dans l'espace; ces théorèmes sont au nombre de huit. Les six premiers pourraient s'appliquer aux corps liquides ou fluides, le septième établit une liaison entre les parties d'un même corps, et le huitième sert à introduire les concepts de grandeur et de forme. Les n°s 3 à 9 s'occupent des conséquences qui résultent des sept premiers théorèmes fondamentaux; ils introduisent la notion de la dimension au moyen de celles des figures qui limitent deux portions contiguës de l'espace, et ensuite la notion de coordonnées; ils conduisent, enfin, à cette conclusion que cette partie de la Science géométrique déterminée par ces sept théorèmes fondamentaux est identique à à la théorie purement analytique des groupes de transformations finis, continus et transitifs. En négligeant le huitième théorème, on obtient donc une Science que l'auteur appelle *Géométrie généralisée,* et qui s'occupe des « formes d'espace au sens général », en opposition avec les formes d'espace proprement dites qui satisfont au huitième théorème. Il y a néanmoins, entre cette Géométrie généralisée et la théorie des groupes finis et continus transitifs, une différence tenant à ce que cette dernière ne fait aucune différence entre les quantités réelles et les quantités imaginaires; de plus, à un même groupe peuvent correspondre plusieurs formes d'espace.

Dans le n° 9 l'auteur rappelle quelques théorèmes sur les groupes de transformations, et dans le n° 10 il commence l'étude des formes d'espace proprement dites qui satisfont au huitième théorème, auquel il donne l'énoncé suivant :

Lorsqu'un point est en repos dans un espace à n dimensions, il est impossible qu'un second point se meuve de manière à parcourir tout un domaine

à n dimensions; de plus, par le point immobile il ne passe aucune figure qui soit nécessairement en repos ou qui glisse sur elle-même.

Ce théorème conduit à un invariant entre les coordonnées de deux points et l'espace à $\frac{n(n+1)}{2}$ degrés de liberté. En faisant tendre le second point vers le premier, l'invariant devient l'expression donnée par Riemann pour le carré de l'élément d'arc, et c'est une expression différentielle linéaire et homogène du second degré (n° 10). Traitée d'abord par les méthodes de MM. Christoffel et Lipschitz (n° 11), puis par l'application directe de la théorie des groupes (n° 12), cette expression différentielle peut être ramenée à trois formes différentes, auxquelles correspondent trois groupes à $\frac{n(n+1)}{2}$ paramètres et trois géométries proprement dites possibles. Enfin, dans le n° 13, l'auteur s'occupe du cas de l'espace à deux dimensions qu'il avait été obligé de laisser de côté dans le cours des raisonnements, et il prouve l'existence d'une géométrie dans laquelle les cercles sont remplacés par des spirales, et qui peut s'exclure par l'axiome de monodromie de Helmholtz.

Simon (*Max*). — La Trigonométrie dans la Géométrie absolue. (187-198). (Avec une planche.)

Le but de l'auteur est d'établir la Trigonométrie par une méthode purement planimétrique. Cette méthode consiste à partir des formules de la trigonométrie euclidienne appliquées à des figures infiniment petites. Il établit ainsi les relations fondamentales entre les éléments d'un triangle, la longueur d'un arc limite, d'un arc de cercle, l'aire du rectangle des distances, du triangle maximum, du triangle quelconque, du cercle. Il termine par des considérations sur les théorèmes projectifs et les constructions communes aux trois géométries.

Günther (*Paul*). — Sur les fonctions uniformes de deux variables liées par une équation algébrique. (199-212).

Dans un Mémoire publié dans le Tome I des *Acta mathematica,* M. Appell a étudié les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y). On peut arriver plus facilement aux mêmes résultats en se servant des principes algébriques de la théorie des fonctions abéliennes qui sont exposés dans les Leçons de Weierstrass. Ce dernier introduit une certaine fonction rationnelle du point (x, y), d'où l'on peut déduire les intégrales normales des trois espèces, et qui conduit à une fonction transcendante uniforme du point, ne possédant qu'un zéro et un pôle, avec ρ points d'indétermination, si ρ est le genre de la courbe; cette dernière fonction permet de représenter par un produit de facteurs toute fonction rationnelle du point (x, y).

D'une manière analogue, l'auteur introduit, dans l'étude des fonctions uniformes de (x, y), une fonction rationnelle $\mathfrak{G}(x, y; x', y')$ qui admet le pôle simple (x', y') avec un résidu égal à -1 et un seul autre pôle (a, b); de cette fonction il déduit une fonction transcendante uniforme $\mathfrak{S}(x, y; x', y')$ qui n'a qu'un zéro simple (x', y') et un point d'indétermination (a, b); sa norme est une fonction primaire de la variable x. Ces deux fonctions permettent la

décomposition en éléments simples des fonctions uniformes qui n'ont qu'un nombre fini de points singuliers; la généralisation du théorème de Mittag-Leffler; la décomposition en facteurs primaires d'une fonction uniforme n'admettant que le point singulier essentiel (a, b), et, enfin, une généralisation de la formule d'interpolation de Lagrange.

Günther (*Paul*). — Le théorème d'addition des fonctions elliptiques. (213-221).

L'auteur s'occupe d'abord du théorème d'addition de la fonction $\operatorname{sn} u$, obtenu d'après une méthode analogue à celle d'Abel. Une fonction elliptique

$$F(u) = F_0 \operatorname{sn} u + F_1 \operatorname{sn}' u + F_2 \operatorname{sn}^{(2)} u + \ldots + F_m \operatorname{sn}^{(m)} u,$$

où $F_0, \ldots, F_m$ sont des constantes déterminées par la condition que $F(u)$ admette les m zéros $u_1, u_2, \ldots, u_m$, admet un $(m+1)^{\text{ième}}$ zéro qui est

$$-(u_1 + \ldots + u_m) + m K'_i,$$

ce qui conduit à la formule

$$\operatorname{sn}(u_1 + \ldots + u_m + m K'_i) = \frac{(1)^m}{m!\, k^m} \frac{F(0)}{F_m} \frac{1}{\prod_{\alpha=1}^{m} \operatorname{sn} u_\alpha}.$$

Il applique une méthode analogue à la fonction pu, et, dans le cas où les m arguments $u_1, \ldots, u_m$ sont égaux, montre qu'on obtient la formule de Kiepert.

Heffter (*Lothar*). — Remarques sur les intégrales des équations différentielles linéaires. (222-224).

L'auteur, revenant sur une formule de récurrence des intégrales des équations différentielles linéaires et homogènes, dont il s'était précédemment occupé (*Journal für Mathematik*, t. 106, p. 296), montre que, d'après cette formule, les propriétés de l'équation différentielle de Gauss qu'on n'avait étendues, jusqu'à présent, qu'à des classes restreintes d'équations différentielles, appartiennent à toutes celles qui n'ont que des intégrales régulières.

Landsberg (*Georg*). — Sur les mineurs adjoints relatifs. (225-230).

Si, dans un déterminant de degré n, on prend un mineur A de degré m, qu'on le borde d'abord avec μ lignes et μ colonnes, ensuite avec les $n - m - \mu$ lignes et les $n - m - \mu$ colonnes restantes, on obtient deux mineurs de degrés $m + \mu$ et $n - \mu$ que l'auteur appelle *adjoints relatifs à* A. Il jouissent de propriétés analogues à celle des mineurs adjoints ordinaires.

Landsberg (*Georg*). — Sur la théorie des fractions continues périodiques. (231-237).

2me Partie.

Étant donnée une fraction continue périodique simple de forme générale, dont les n numérateurs et les n dénominateurs partiels h_ν et $g_{\nu-1}$ sont des nombres rationnels, si cette fraction est convergente, sa limite est racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels, et l'on peut former facilement une seconde fraction périodique simple dont la limite, si elle existe, soit l'autre racine de cette équation. Si le discriminant est positif ou nul, ces deux fractions convergent en général; s'il est négatif, elles sont divergentes; enfin, l'équation peut se réduire au premier degré : l'une des fractions continues est en général convergente, l'autre est divergente.

Pirondini (*Geminiano*). — Sur la détermination des lignes dont le rapport de la courbure à la torsion est une fonction donnée de l'arc. (238-260).

On peut ramener la recherche des lignes L, dont le rapport $\frac{\rho}{r}$ du rayon de courbure au rayon de torsion est une fonction donnée $\varphi(s)$ de l'arc à celle de la ligne plane Λ_0 à laquelle se réduit l'arête de rebroussement L_0 de la surface rectifiante de L, lorsque cette surface se déroule sur un plan; cette ligne Λ_0 vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dy} = \varphi\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{dy}\right)$$

si l'on prend pour axe des x la droite à laquelle se réduit la ligne L après le développement.

Après avoir donné des applications de ce théorème, l'auteur établit les formules qui donnent les éléments de L_0 en fonction de ceux de L et applique ces formules aux mêmes problèmes. Il montre la relation de cette théorie avec celle des enveloppes des droites tournant dans un plan autour d'un de leurs points pendant que celui-ci se déplace sur une droite fixe.

A une courbe L_0 correspondent une infinité de lignes L géodésiques de la développable Σ dont L_0 est l'arête de rebroussement; si l'on prend toutes celles qui sont parallèles à l'une d'entre elles, elles forment les arêtes de rebroussement d'une famille de surfaces développables parallèles S; l'auteur étudie quelques cas particuliers de ces familles de développables et, entre autres, de celles qui contiennent un cône; Σ se réduit alors à un cône.

Königsberger (*Leo*). — Sur les intégrales des systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque (261-340).

Un système algébrique d'équations aux dérivées partielles, obtenu en égalant à zéro m polynomes entiers par rapport à μ variables indépendantes $z_1, \ldots, z_\mu$, à m fonctions inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_m$ et à leurs dérivées partielles jusqu'à un certain ordre, peut toujours être ramené au premier ordre. En introduisant alors les N racines t_α d'une équation algébrique en t, entière par rapport aux variables indépendantes, aux fonctions inconnues et à leurs dérivées, on peut remplacer le système donné par N systèmes résolus par rapport à $\frac{\partial u_1}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_1}$,

les seconds membres étant des fonctions rationnelles de l'une des racines t_α, des z, des u et des $\frac{\partial u_i}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_i}{\partial z_\mu}$ (n° 1).

L'auteur démontre l'existence, sous certaines conditions, des intégrales de ces systèmes d'équations aux dérivées partielles en appliquant la méthode des fonctions majorantes. L'intégrale générale dépend de m fonctions arbitraires de $\mu - 1$ arguments (n° 2). Puis il montre que les systèmes singuliers d'intégrales, pour lesquels l'équation en t a une racine double, sont déterminés par des systèmes analogues, mais plus simples (n° 3).

L'auteur s'occupe ensuite de l'intégration des systèmes d'équations aux dérivées partielles par la méthode de la variation des constantes. Après avoir rappelé comment cette méthode s'applique dans le cas d'une seule fonction inconnue, il introduit dans le cas général l'intégrale complète qui dépend de $m\mu$ constantes arbitraires. L'intégrale générale s'en déduit par l'intégration d'un nouveau système à $m\mu$ variables dépendantes. Ce nouveau système étant plus compliqué que le premier, l'auteur expose une autre méthode pour passer de l'intégrale complète à l'intégrale générale, et qui conduit au résultat par l'intégration successive de systèmes d'équations aux dérivées partielles à $\mu - 1$ variables indépendantes et contenant respectivement $(m-1)\mu$, $(m-2)\mu, \ldots, 0$ constantes. Malheureusement cette méthode repose sur l'hypothèse implicite que l'intégrale dépend de m fonctions arbitraires de $\mu - 1$ arguments, *mais pas de leurs dérivées* (n° 4).

Schrœter (*H.*). — Construction élémentaire de la figure formée par trois tétraèdres en position desmique. (341-357).

Les systèmes desmiques de trois tétraèdres, c'est-à-dire les figures formées par trois tétraèdres, tels que deux quelconques d'entre eux soient homologiques de quatre manières différentes, les quatre centres d'homologie étant les sommets du troisième tétraèdre, ont été introduits par M. Stéphanos (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1879) et ont fait l'objet de nombreuses recherches. L'auteur donne une construction tout à fait élémentaire de ces systèmes. Il part de cinq points pris d'une manière quelconque dans l'espace, et mène par l'un de ces points les trois droites qui rencontrent les trois couples d'arêtes opposées du tétraèdre formé par les quatre autres points. Les six points d'intersection avec ces arêtes et leurs six conjugués harmoniques par rapport aux sommets du tétraèdre forment les douze sommets de trois tétraèdres en position desmique. De plus, on peut adjoindre, aux cinq points primitifs, sept autres points, de manière à former un nouveau système desmique de trois tétraèdres, les dix-huit arêtes de ces nouveaux tétraèdres coïncidant respectivement avec les dix-huit arêtes des premiers, de manière à former des divisions harmoniques. L'auteur montre ensuite les propriétés dualistiques de ces figures, les quatre plans d'homologie de deux quelconques de trois tétraèdres en position desmique étant les plans des faces du troisième tétraèdre.

Schrœter (*Heinrich*). — Notice nécrologique par R. Sturm. (358-360).

Tome 110 (quatre Cahiers). Berlin, 1892.

Frobenius (*G.*). — Sur les paramètres différentiels qui se présentent dans la *Théorie des surfaces*. (1-36).

Les paramètres différentiels introduits par Beltrami sont des covariants de la forme quadratique de deux différentielles qui représente le carré de l'élément linéaire d'une surface. Si $\varphi = \text{const.}$ est l'équation d'une famille de courbes tracées sur la surface et si δn est l'élément linéaire normal à l'une de ces courbes, le paramètre différentiel du premier ordre est $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2$. Si l'on construit un segment de droite dont la longueur soit $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ et dont la direction soit celle de δn, ses projections sur les axes sont trois paramètres différentiels linéaires que l'auteur désigne par $\Delta_x\varphi$, $\Delta_y\varphi$, $\Delta_z\varphi$. Si l'on considère la représentation sphérique de la surface et qu'au point (x, y, z) corresponde le point (ξ, η, ζ), on a de même trois autres paramètres $\Delta_\xi\varphi$, $\Delta_\eta\varphi$, $\Delta_\zeta\varphi$. Les trois paramètres différentiels bilinéaires qui correspondent aux trois formes

$$\Sigma\, dx^2, \quad \Sigma\, dx\, d\xi, \quad \Sigma\, d\xi^2,$$

peuvent être mis sous la forme

$$\Sigma\, \Delta_x\varphi . \Delta_x\psi, \qquad \Sigma\, \Delta_x\varphi . \Delta_\xi\psi = \Sigma\, \Delta_\xi\varphi . \Delta_x\psi, \qquad \Sigma\, \Delta_\xi\varphi . \Delta_\xi\psi,$$

et ceux du second ordre sous la forme

$$\Sigma\, \Delta_x^2\varphi, \qquad \frac{1}{\sqrt{k}}\Sigma\, \Delta_x\left(\sqrt{k}\, \Delta_\xi\varphi\right) = \sqrt{k}\, \Sigma\, \Delta_\xi\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\, \Delta_x\varphi\right), \qquad \Sigma\, \Delta_\xi^2\varphi,$$

où k désigne la courbure totale. La forme bilinéaire $\Sigma \pm \xi\, dy\, d\xi$ fournit enfin un nouveau paramètre bilinéaire et deux nouveaux paramètres du second ordre. Les relations qui existent entre ces différents paramètres différentiels sont utilisées pour obtenir l'équation du troisième ordre, qui exprime qu'une famille de surfaces fait partie d'un système triple orthogonal, et pour obtenir la condition d'isothermie des lignes de courbure.

Appell (*Paul*). — Sur des transformations de mouvements. (37-41).

L'objet de cette Note est de résumer des recherches qui se rattachent à l'article de M. Stäckel sur le même sujet (*Journal für Mathematik*, t. 108). Étant donnés deux systèmes matériels dont les liaisons sont indépendantes du temps et ayant le même degré de liberté, on peut toujours, par une transformation de forme donnée, faire correspondre à tout mouvement de l'un des systèmes, sous l'action de forces dépendant des positions et des vitesses, un mouvement analogue de l'autre. Si l'on n'admet que des mouvements sous l'action de forces ne dépendant pas des vitesses, le problème n'est pas toujours

possible, et, s'il est possible, la transformation conserve les mouvements géodésiques.

Schwering (*K.*). — Décomposition de l'équation de la division lemniscatique en quatre facteurs. (42-72).

Dans un Mémoire précédent (*Journal für Mathematik*, t. 107, p. 196), l'auteur a indiqué des méthodes permettant d'obtenir les formules de la multiplication de la fonction lemniscatique. Si η est un nombre entier complexe impair de la forme $a + bi$, et si $x = \sin am\, u$, on a

$$\sin am(\eta u) = x \frac{\varphi(x^4)}{\chi(x^4)},$$

où φ et χ sont des polynomes qui fournissent la solution du problème de la multiplication de degré $4\mu = q - 1$, q désignant la norme de η. L'auteur commence par exposer un procédé simple pour ramener le calcul de φ et χ à celui des polynomes analogues correspondant à des valeurs de η de norme inférieure (n° 1). Eisenstein avait indiqué deux manières de décomposer le polynome φ, la première en deux facteurs :

$$\varphi(x^4) = Y^2 - \eta Z^2;$$

la seconde en quatre facteurs de la forme

$$A + B\sqrt{\eta} + C\sqrt[4]{\eta} + D\sqrt[4]{\eta^3}.$$

L'auteur ramène le calcul des coefficients de Y et de Z, ainsi que de ceux de A, B, C, D à la résolution d'une série de congruences par rapport aux modules η, η^2, etc. Il démontre en outre que ces coefficients sont des nombres entiers complexes pour Y et Z, et qu'il en est de même pour A, B, C, D, sauf si q est de la forme $16m + 9$, auquel cas il peut s'introduire le dénominateur $1 + i$ (n° 2). Enfin (n° 3) la substitution dans Y et Z de valeurs particulières de x, telles que $\pm i$ et ± 1, fournit des solutions de plusieurs équations de Pell associées au nombre η, en particulier de l'équation

$$T^2 - \eta U^2 = 1.$$

Krimphoff (*W.*). — Nouvelle représentation géométrique de la fonction lemniscatique. (73-77).

L'auteur expose le principe d'une nouvelle méthode géométrique qui permet de rendre compte des propriétés de la fonction lemniscatique. Elle repose sur la considération de la courbe

$$x + yi = \sin am(m + ni)u,$$
$$x - yi = \sin am(m - ni)u;$$

dans le cas particulier traité par l'auteur $m = 3$, $n = 2$, on a une courbe du vingt-cinquième ordre avec 144 points doubles autres que les points cycliques; les propriétés des points doubles se lient à la théorie de la division des périodes de la fonction lemniscatique.

Thomae (*J.*). — Sur la fonction $W\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, & \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & n\end{pmatrix}$ pour des valeurs singulières de ses paramètres. (78-103).

Dans la théorie de la série de Gauss $F(a, b, c, z)$, il se présente certains cas singuliers pour lesquels certaines combinaisons linéaires des éléments a, b, c, ou bien, en employant la notation de Riemann $P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, & \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & n\end{pmatrix}$, une ou plusieurs des différences $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$ sont des nombres entiers. Certaines branches de la fonction P exigent alors une représentation essentiellement nouvelle, caractérisée par la présence de logarithmes. Les choses se passent d'une manière tout à fait analogue pour la fonction plus générale

$$W\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, & \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & n\end{pmatrix},$$

définie par la relation de récurrence

$$\begin{aligned} 0 = {} & (n+\alpha+1)(n+\alpha'+1)\,W(n) + (n+2-\beta)(n+2-\beta')\,W(n+2) \\ & - [2n^2 + n(\alpha+\alpha'+6-\beta-\beta') \\ & \quad + (\alpha+1)(\alpha'+1) + (2-\beta)(2-\beta') - \gamma\gamma']\,W(n+1), \end{aligned}$$

et dont l'auteur s'est déjà occupé (*Journal für Mathematik*, t. 87, p. 26-73); mais ici ce sont non seulement des différences, mais encore des sommes des paramètres qui donnent lieu à des singularités; de plus, le logarithme est remplacé par la fonction $\Psi(n)$ de Gauss.

L'auteur étudie les cas singuliers dans lesquels une seule des sommes ou différences de paramètres est un nombre entier. Dans l'art. 14, il s'occupe du cas $\alpha' = \alpha$; dans les art. 15-17, du cas $\alpha - \alpha' = \nu$; dans l'art. 18, du cas $\alpha + \beta = \nu$; dans l'art. 19, du cas $\gamma = \gamma'$; dans l'art. 20, du cas $\gamma - \gamma' = \nu$. Enfin, dans l'art. 21, il obtient, par un passage à la limite, les formules qui se rapportent à la série de Gauss ou à la fonction P de Riemann dans le cas où certaines différences d'exposants sont entières, ce qui conduit à la présence de logarithmes.

Hilbert (*David*). — Sur l'irréductibilité des fonctions rationnelles entières à coefficients entiers. (104-129).

Si une fonction rationnelle entière, à coefficients entiers, des variables x, y, ..., w, t, r, ..., q est irréductible, est-il possible de donner à un certain nombre de ces variables t, r, ..., q des valeurs numériques entières telles que la fonction reste irréductible par rapport aux variables restantes? Cette question, dont la solution est importante pour la théorie des équations, est résolue par l'auteur. En s'appuyant sur un lemme arithmétique dont l'énoncé serait trop long à rapporter ici, il montre d'abord qu'il est possible d'une infinité de manières de remplacer, dans une fonction rationnelle entière $f(x, t)$ à coefficients entiers, la variable t par un nombre rationnel entier, de manière que la fonction de x obtenue soit irréductible. Ce théorème est étendu au cas de plusieurs fonctions de x et de t, puis au cas général d'un nombre quelconque de variables. Ce théorème est encore vrai lorsque le domaine de rationalité est un

nombre algébrique quelconque, les valeurs numériques données aux variables paramétriques restant toujours rationnelles entières.

Les applications de ces théorèmes à la théorie des équations sont nombreuses. Étant donnée une équation de degré n en x, les coefficients étant des fonctions rationnelles entières à coefficients entiers de certains paramètres, il est possible, d'une infinité de manières, de donner à ces paramètres des valeurs numériques entières sans changer le groupe de l'équation; par suite, il y a une infinité d'équations de degré n à coefficients entiers dont le groupe est le groupe symétrique; de même pour le groupe alterné. Il en est encore ainsi si le domaine de rationalité est celui d'un nombre algébrique donné. Il existe une infinité de corps numériques de degré n qui ne contiennent d'autres corps de degré moindre que celui des nombres rationnels.

Schlesinger (*Ludwig*). — Sur les formes primaires qui se présentent dans les équations différentielles linéaires du second ordre. (130-157).

Si l'on considère en général une solution d'une équation différentielle linéaire et homogène à coefficients rationnels, les valeurs de la fonction correspondant à une valeur donnée arbitraire de la variable forment un ensemble de points dont l'ensemble dérivé remplit tout le plan, ou du moins une ou plusieurs portions connexes du plan. Dans certains cas particuliers, cet ensemble se compose de points isolés. Pour les équations différentielles du second ordre, il faut et il suffit pour cela que le groupe de l'équation différentielle soit discontinu et que les points où il est improprement discontinu forment tout au plus des lignes. Il en est ainsi, par exemple, lorsque la variable indépendante ξ est une fonction uniforme du quotient η de deux intégrales fondamentales; mais cette condition n'est pas nécessaire. L'auteur se propose d'étudier cette classe d'équations différentielles du second ordre à groupe discontinu qui est la généralisation immédiate des équations à intégrale générale algébrique et de leur étendre la théorie des formes primaires qui, pour ces dernières, joue un si grand rôle dans les travaux de M. Fuchs.

Dans le n° I, l'auteur démontre que, si le groupe d'une équation différentielle du second ordre est discontinu, la dépendance analytique entre ξ et η est définie complètement par un certain nombre de relations uniformes

$$E_\varkappa(\xi) = f_\varkappa(\eta),$$

correspondant chacune à un des domaines L dans lesquels le plan de la variable ξ est partagé d'après la théorie du polyèdre générateur de Poincaré. Les fonctions Θ permettent alors de former une infinité de formes homogènes des deux intégrales fondamentales et qui sont égales à des fonctions uniformes de ξ; l'existence de telles formes entraîne d'ailleurs réciproquement avec elle la discontinuité du groupe.

Dans le n° II, l'auteur, pour étendre la théorie des formes primaires, suppose que le genre du groupe est zéro et que le domaine d'existence L de la fonction fuchsienne ou kleinéenne correspondante est simplement connexe, sans points singuliers essentiels à son intérieur. En introduisant cette fonction x, définie à trois constantes arbitraires près, il est conduit à la notion de forme

uniforme invariante de degré r, qui, par multiplication par $\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{-\frac{r}{2}}$, devient la racine d'une fonction rationnelle de x; ces formes sont *entières* si cette fonction rationnelle ne devient infinie que comme $\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^{\frac{r}{2}}$. Les formes primaires sont les formes entières qui ne s'annulent que pour une valeur de η, et les valeurs homologues. Toute forme uniforme invariante entière est alors un produit de formes primaires : après avoir donné l'expression de ces formes primaires, il passe en revue les différents cas qui peuvent se présenter relativement au degré ν de l'équation différentielle. Dans le n° III, il étend la théorie au cas où le groupe de l'équation contient des substitutions paraboliques, levant ainsi une restriction faite au numéro précédent.

Hamburger (*M.*). — Extension d'un théorème de Pfaff aux équations aux différentielles totales simultanées du premier ordre et intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles simultanées. (158-176).

L'auteur se propose, par l'extension d'un théorème célèbre de Pfaff, d'effectuer sur les premiers membres d'un système de p équations aux différentielles totales à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, une substitution linéaire telle que les p nouvelles expressions différentielles obtenues ne dépendent plus que de $n-1$ fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ des x et de leurs différentielles. Dans le cas où $p+n$ est impair, les y satisfont à p équations aux dérivées partielles linéaires qui doivent, par suite, admettre les mêmes solutions; le problème, pour être possible, exige $(p-1)(n-p-1)$ relations entre les coefficients du système donné. Si $p+n$ est pair, le problème est en général impossible. Une fois les y déterminés, l'utilisation d'un système d'intégrales fondamentales permet d'obtenir la nouvelle forme du système donné sans changement de variables. La théorie s'étend au cas où l'on se donne π relations entre les variables x.

L'intégration d'un système de p équations aux dérivées partielles du premier ordre à p fonctions inconnues de m variables indépendantes se ramène à celle d'un système de p équations aux différentielles totales à $n = p + m + pm$ variables liées par p relations, le cas où la réduction de Pfaff est possible correspond à une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre dont on peut obtenir facilement l'intégrale générale; le système réduit de Pfaff s'intègre immédiatement au moyen de p fonctions arbitraires de $m-1$ arguments et les p équations données permettent d'éliminer les mp dérivées des fonctions inconnues.

Enfin l'auteur donne une nouvelle forme du système à intégrer pour opérer la réduction de Pfaff et qui fournit également le déterminant de la substitution.

Gutzmer (*August*). — Remarque sur la formule thêta de Jacobi. (177-179).

L'auteur démontre la célèbre formule à quatre termes de Jacobi en remar-

quant qu'elle peut être considérée comme une relation entre des fonctions $\mathfrak{F}$ du second ordre; on peut, par suite, l'obtenir presque immédiatement en partant du principe qu'il existe nécessairement une relation linéaire à coefficients constants entre trois fonctions $\mathfrak{F}$ du second ordre aux mêmes périodes.

Hensel (*K.*). — Sur les équations à l'aide desquelles on détermine les perturbations séculaires des planètes. (180-183).

Soient $f(x)$ un polynome entier en x de degré n, à coefficients réels; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de n polynomes linéairement indépendants module $f(x)$; que l'on forme les congruences

$$x.x_i \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \qquad [\operatorname{mod} f(x)] \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles si le système (a_{ik}) est symétrique.

Netto (*Eugen*). — Application des systèmes de modules à un théorème de Géométrie et à la loi d'inertie des formes quadratiques. (184-187).

Le théorème en question, qui ne fait qu'énoncer sous forme géométrique la loi d'inertie des formes quadratiques, est le suivant :

Si l'on considère, dans l'espace à n dimensions, le cône du second ordre

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\alpha^2 - x_{\alpha+1}^2 - x_{\alpha+2}^2 - \ldots - x_n^2 = 0,$$

et un système quelconque de n directions conjuguées, α sont situées d'un côté du cône et $n - \alpha$ de l'autre.

Pochhammer (*L.*). — Sur la réduction de l'équation différentielle de la série $\mathfrak{F}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}; x)$. (188-197).

Il s'agit de la série

$$1 + \frac{x}{1.\rho_1\rho_2\ldots\rho_{n-1}} + \frac{x^2}{1.2.\rho_1(\rho_1+1)\rho_2(\rho_2+1)\ldots\rho_{n-1}(\rho_{n-1}+1)} + \ldots,$$

qui satisfait à une équation différentielle de la forme

$$x^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n} + L_1 x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + L_{n-2}x\frac{d^2y}{dx^2} + L_{n-1}\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

les L étant des constantes. Cette équation admet $n-1$ autres intégrales obtenues en multipliant des séries analogues à la première par des puissances de x et qui constituent avec cette série un système fondamental d'intégrales. L'auteur ramène l'intégration à celle d'une équation de même forme et d'ordre $n-1$,

en prenant pour y une intégrale définie

$$y = \int_g^h e^{\frac{x}{t}} \mathfrak{T}\, dt,$$

les limites g et h étant constantes, $\mathfrak{T}$ étant une fonction de t.

Kötter (*Ernst*). — Sur les polyèdres d'espèce donnée qui, sous un volume donné, possèdent la surface minima (premier Mémoire). (198-229).

Deux polyèdres convexes sont dits *de la même espèce* lorsqu'il existe entre leurs sommets, leurs arêtes et leurs faces les mêmes relations topologiques. Steiner a montré que, pour les pyramides et les doubles pyramides, le polyèdre d'espèce donnée qui, sous un volume donné, possède la surface minima, jouit de la propriété que toutes ses faces touchent une même sphère en leurs centres de gravité. Lindelöf a généralisé ce théorème et l'auteur s'occupera de ce théorème et des restrictions auxquelles il est sujet dans un autre Mémoire. Dans celui-ci, il examine le cas des polyèdres P_n qui se déduisent des doubles pyramides en supposant que les deux sommets B_1, B_2 des deux pyramides sont en ligne droite avec l'un des autres sommets A_0 du polyèdre; P_n a alors $n-3$ angles tétraèdres, deux angles trièdres et deux angles n-èdres. La recherche du polyèdre de surface minima se rattache à la théorie de la division des fonctions elliptiques. Le polyèdre a deux plans de symétrie dont l'un contient B_1B_2 et l'autre lui est perpendiculaire. Il est convexe si $n \leqq 8$, concave le long de B_1B_2 et convexe ailleurs si $n \geqq 14$. Dans le cas de $n = 5$, 6, l'auteur traite la question directement par une méthode purement algébrique.

Schumacher (*Robert*). — Les systèmes de points sur la droite et leur application à la génération des courbes planes algébriques. (230-264).

Le but de ce Mémoire est l'exposition d'une méthode purement géométrique qui permette de traiter toutes les questions se rattachant à la Géométrie de position, en s'affranchissant de tout théorème qui ne peut être démontré que par le calcul. Elle repose sur la considération des systèmes de n points sur une droite, un groupe de n points jouant le même rôle qu'un point d'un espace à n dimensions. Par exemple, pour $n = 2$, deux couples de points déterminent une involution et deux involutions ont un couple de points commun; un couple de points est donc l'analogue d'un point et l'involution d'une droite d'un plan. Cette analogie devient évidente si l'involution est portée sur une conique; à tout point du plan correspond le couple des points de contact des tangentes menées du point à la conique; à toute droite du plan correspond alors une involution.

Des systèmes de deux points on passe aux systèmes de trois points et, d'une manière plus générale, aux systèmes de n points; une série $r_{n\mu}$ est un ensemble de groupes de n points dont chacun est défini lorsqu'on se donne μ de ses points. On arrive aux séries $r_{n,n-1}$ par l'intermédiaire des séries singulières, tous les groupes d'une telle série ayant un point commun, et qui résultent par

suite d'une série de groupes ayant $n-1$ points. Ces séries $r_{n,n-1}$ forment des faisceaux et des gerbes de toutes dimensions; une gerbe à $n-1$ dimensions détermine un groupe de n points réels ou imaginaires; une gerbe de $r_{n,n-1}$ est analogue à un point d'un espace à n dimensions, une série $r_{n,n-1}$ à une multiplicité plane à $n-1$ dimensions de cet espace; les groupes de n points confondus correspondent alors à une courbe normale d'ordre n, les séries singulières $r_{n,n-1}$ aux multiplicités planes à $n-1$ dimensions osculatrices à cette courbe. Enfin, la notion d'homographie et de corrélation le conduit aux bandes (*Band*) et aux chaînes (*Kette*); parmi ces dernières, les chaînes normales jouent le rôle de l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré à deux inconnues (l'une étant ici un paramètre). L'auteur annonce la suite.

Schlesinger (*Ludwig*). — Sur les équations différentielles linéaires et homogènes du second ordre pour lesquelles la fonction d'inversion est d'une multiformité de degré fini. (265-289).

Dans un travail précédent du même Tome, l'auteur a montré l'analogie qui existe entre les équations différentielles du second ordre, à coefficients rationnels et à groupe discontinu, et celles dont l'intégrale générale est algébrique; l'analogie devient plus évidente encore si l'on considère celles des équations différentielles à groupe discontinu pour lesquelles le nombre des valeurs de la variable indépendante ξ qui correspondent à une valeur donnée du quotient η de deux intégrales est fini. L'auteur donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi, en supposant que le groupe de l'équation soit un groupe fuchsien, nécessairement de genre zéro; chaque forme uniforme invariante des intégrales fondamentales est la racine d'une fonction rationnelle de ξ; il en résulte des propriétés pour les racines des équations fondamentales caractéristiques relatives aux points singuliers. L'auteur termine par une généralisation de la génération des fonctions fuchsiennes d'une certaine classe au moyen d'une transformation répétée un nombre infini de fois et qu'il avait indiquée précédemment (*Journal für Mathematik*, t. 105, p. 181).

Vilfredo Pareto. — Sur les fonctions génératrices d'Abel (Lettre adressée à M. L. Kronecker). (290-323).

L'auteur a pour but de préciser et de compléter la théorie des fonctions génératrices d'Abel et de montrer la fécondité de ses applications, spécialement pour les développements en série des fonctions synectiques dans une aire. Abel pose

$$\varphi(x) = \int e^{\nu x} f(\nu)\, d\nu,$$

et il appelle φ la fonction génératrice de f, et f la déterminante de φ. L'auteur s'occupe spécialement du cas où φ est un polynome entier en x; on peut alors prendre pour f un polynome en $\frac{1}{\nu}$, l'intégrale étant étendue à une courbe fermée autour de l'origine; si φ est une fonction entière, il en est encore de même

sous certaines conditions; f est alors représentée par une série convergente pour des valeurs suffisamment grandes de ν.

Lorsque, dans ces conditions, on considère $\varphi(x+a)$, $\varphi'(x)$, $\int_0^x \varphi(x)\,dx$, les déterminantes de ces fonctions s'obtiennent respectivement en multipliant celles de $\varphi(x)$ par $e^{a\nu}$, ν, $\frac{1}{\nu}$; plus généralement, si $\delta_1\varphi(x)$ est une opération linéaire, à coefficients constants sur $\varphi(x)$, $\varphi(x+a)$, leurs dérivées, leurs intégrales, leurs différences, etc., la déterminante de $\delta_1\varphi(x)$ s'obtient en multipliant celle de $\varphi(x)$ par une fonction $\Phi(\nu)$ qu'on appelle la *déterminante* de l'opération δ_1; la déterminante de l'opération $\delta_i\delta_{i-1}\ldots\delta_1$ est alors le produit des déterminantes de $\delta_i, \ldots, \delta_1$. Cela permet, par des développements appropriés de ces déterminantes d'opérations, d'exprimer, sous certaines conditions, certaines opérations au moyen de certaines autres et de retrouver une très grande variété de formules célèbres. Contentons-nous de citer la formule qui donne les dérivées en fonction des différences, le développement de $\varphi(x+a)$ en une série $\sum_\theta A_\theta\varphi^{(\theta)}(x+\theta b)$, certaines formules de sommation dues à M. Kronecker, certaines formules d'interpolation; la méthode employée les déduit, en général, de différents développements de la fonction exponentielle.

Schottky (*F.*). — Sur le théorème d'addition de la cotangente et de la fonction $\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$. (324-337).

La cotangente étant définie par le développement connu en série absolument convergente, l'auteur démontre directement, en l'appuyant sur la règle de multiplication des séries, la formule

$$\cot u \cot v + \cot u \cot w + \cot v \cot w = 1 \qquad \text{pour} \qquad u+v+w=0,$$

et en déduit l'équation différentielle

$$\cot^2 u + 1 + \cot' u = 0.$$

Il procède de même pour la fonction $\zeta(u)$ et démontre ainsi, sans s'appuyer sur le théorème de Liouville, la formule d'addition

$$[\zeta(u)+\zeta(v)+\zeta(w)]^2+\zeta'(u)+\zeta'(v)+\zeta'(w)=0 \quad \text{pour} \quad u+v+w=0,$$

en partant du développement de

$$\zeta(u)\zeta(v)+\zeta(u)\zeta(w)+\zeta(v)\zeta(w).$$

Busche (*E.*). — Sur la fonction $E(x)$ à argument complexe. (338-348).

La fonction $E(x+yi)$ de la quantité complexe $x+yi$ peut se définir comme le nombre entier complexe $a+bi$ satisfaisant aux conditions

$$x-1 < a \leq x, \qquad y-1 < b \leq y,$$

et l'on peut lui associer trois autres fonctions analogues qui n'en diffèrent que si l'une des quantités x ou y est entière. L'auteur démontre l'existence de relations d'identité entre certaines sommes dont les termes sont des expressions E d'arguments complexes; en particulier, il établit une formule qui ramène une telle somme étendue à un domaine à deux dimensions à des sommes se rapportant à des courbes limites.

Netto (*E.*). — Remarques sur l'Article de M. G. Landsberg : *Sur la théorie des fractions continues périodiques,* t. 109, Cahier 3 du *Journal.* (349-352).

L'auteur montre que les résultats obtenus par M. Landsberg peuvent, en se plaçant à un autre point de vue, être déduits facilement des développements exposés par l'auteur dans le Tome XXIX des *Math. Ann.*, p. 141 : *Sur un algorithme servant à la résolution des équations numériques;* il suffit de les appliquer à l'équation

$$x = \frac{ax + b}{\alpha x + \beta}.$$

Le Tome se termine par la Table des Matières contenues dans les Tomes 101-110. (353-362). E. C.

Band 111 (352 pages). Berlin; 1893.

Königsberger (*Leo*). — Sur l'irréductibilité des systèmes d'équations aux dérivées partielles algébriques. (1-25).

L'étude des circonstances qui se présentent pour une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre, et pour un système de deux telles équations, conduit l'auteur à préciser la notion de l'irréductibilité des systèmes différentiels plus généraux de la manière suivante :

Le système sera supposé mis sous la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial G}{\partial t_1}\frac{\partial u_k}{\partial z_1} = G_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

les fonctions $G, G_1, \ldots, G_m$ étant des fonctions entières des variables indépendantes $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$, des variables dépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_m$, des dérivées partielles des u_k par rapport aux variables $z_2, z_3, \ldots, z_\mu$, et de la quantité auxiliaire t_1; cette dernière est racine de l'équation en t

$$(2) \qquad G\left(z_1, \ldots, z_\mu, U_1, \ldots, U_m, \frac{\partial u_1}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial u_m}{\partial z_\mu}, t\right) = 0,$$

qui est supposée algébriquement irréductible. On dira que le système (1) est *de classe m*, et le degré de l'équation (2) en t sera dit le *degré* du système (1).

Cela posé, le système (1) est dit *irréductible* si aucun système de 1, 2, 3

ou $m-1$ fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ appartenant à une solution de (1) n'appartient en même temps à une solution d'un autre système différentiel du premier ou du second ordre auquel M. Königsberger impose certaines conditions précises.

Avec cette définition de l'irréductibilité subsiste le théorème général sur les équations algébriques ou différentielles ordinaires irréductibles :

Si le système irréductible (1) *admet une solution dans laquelle tout ou partie des fonctions* $u_1, \ldots, u_m$ *appartiennent à une solution d'un autre système de même forme, qui soit de classe supérieure à* (1), *ou de même classe mais de degré plus élevé, toutes les solutions de* (1) *satisfont à ce nouveau système.*

Mirimanoff (*D.*). — Sur l'équation $x^{37} + y^{37} + z^{37} = 0$. (26-30).

L'auteur applique les résultats d'un précédent Mémoire à la démonstration de l'impossibilité de la résolution en nombres entiers de l'équation considérée, au sens de Kummer; ce qui est un cas particulier d'un théorème général de Kummer.

Cardinaal (*J.*). — Sur un cas particulier du système linéaire de ∞^3 quadriques et sur l'espace en relation projective avec ce système. (31-43).

La correspondance projective entre les quadriques d'un système linéaire triplement indéterminé et les points de l'espace, étudiée par Reye dans le cas général et dans le cas où les quadriques du système ont une conique en commun, est étudiée en détail par l'auteur dans le cas où les quadriques du système passent par une droite fixe. L'auteur insiste en particulier sur une surface développable du sixième ordre qui correspond aux couples de plans faisant partie du système : les propriétés diverses de la correspondance étudiée sont rattachées à celles de cette surface fondamentale. Puis sont examinées les particularités qui se présentent quand les quadriques considérées ont, en plus de leur droite commune, un, deux ou trois points communs.

Schafheitlin (*Paul*). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. (44-52).

Suite d'un Article publié dans le même Journal, t. 106, p. 285-314.

L'auteur y avait étudié le mode d'existence des intégrales des équations linéaires à coefficients rationnels au moyen d'une *forme normale* donnée à l'équation proposée. Dans le Mémoire actuel, l'auteur simplifie, au moyen de notations mieux appropriées, les résultats qu'il avait obtenus. Il les complète ensuite en traitant le cas où certains éléments de sa forme normale sont des nombres entiers, ou ont pour différences des nombres entiers. Les résultats obtenus sont du reste des cas particuliers de résultats généraux de Fuchs.

Hess (*Edmund*). — Remarques sur le Mémoire de H. Schröter :

La configuration $(12_4, 16_3)$ *de Hesse* (même Journal, t. CVIII, p. 269-312). (53-58).

L'auteur montre que les propriétés de la configuration $(12_4, 16_3)$A résultent de ce qu'on peut la considérer comme une perspective plane d'un système desmique de trois tétraèdres (STEPHANOS, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. III, 1879). Il n'en est pas de même de la configuration $(12_4, 16_3)$B.

L'auteur ajoute quelques remarques sur les relations qu'on peut établir entre les deux configurations.

Heffter (*L.*). — Sur un certain système d'équations linéaires homogènes. (59-63).

Solution du problème suivant, qui intervient dans la théorie des équations différentielles linéaires :

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système

$$\sum_{k=1}^{i} a_{ik} x_k = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

n'entraîne pas la conséquence $x_1 = 0$, *quand on suppose nuls* a_{11} *et un certain nombre d'autres* a_{ii}.

Krazer (*Adolf*). — Sur un problème spécial de la transformation des fonctions thêta. (64-86).

Soit

$$\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a = \sum_{m_1, \ldots, m_p}^{-\infty, \ldots, +\infty} e^{\sum_{\mu\mu'}^{1,2,\ldots,p} a_{\mu\mu'}(m_\mu + g_\mu)(m_{\mu'} + g_{\mu'}) + 2\sum_{\mu}^{1,2,\ldots,p}(m_\mu + g_\mu)(u_\mu + h_\mu \pi i)}$$

la série ϑ la plus générale. Au moyen de la méthode de la composition des transformations, l'auteur obtient des formules simples exprimant la fonction $\vartheta\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}((u))_a$ au moyen de fonctions $\vartheta\begin{bmatrix} g' \\ h' \end{bmatrix}((u))_b$, et inversement, dans le cas où les paramètres $b_{\mu\mu'}$ sont liés aux paramètres $a_{\mu\mu'}$ par des relations

$$b_{\mu\mu'} = a_{\mu\mu'} + e_{\mu\mu'} \frac{\pi i}{n} \qquad (\mu, \mu' = 1, 2, \ldots, p),$$

où n est un entier positif et où les $e_{\mu\mu'}$ sont des entiers tels que $e_{\mu\nu} = e_{\nu\mu}$.

Landsberg (*Georg*). — Sur la détermination d'un nombre et une série qui s'y rapporte. (87-88).

Considérant comme équivalents deux systèmes rectangulaires, à s lignes et t colonnes, d'éléments entiers respectivement congrus deux à deux suivant un module premier p, l'auteur montre que le nombre des systèmes distincts, de

rang r (suivant le module p), est égal à

$$\prod_{k=1}^{r-1}(p^t - p^k)\frac{p^{t-k}-1}{p^{k+1}-1},$$

et rattache à ce résultat une transformation d'un produit infini en série, donnée par Jacobi.

Wallenberg (*G.*). — Sur les équations différentielles linéaires homogènes, dont les intégrales fondamentales sont liées par des relations algébriques. (89-97).

On suppose que m intégrales distinctes de l'équation

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0$$

soient liées par $m-1$ relations algébriques. L'auteur montre que si p_m est une fonction algébrique non identiquement nulle, si p_1 est la dérivée logarithmique d'une fonction algébrique et si l'expression

$$p_m^{\frac{m-1}{2}} e^{\int p_1 dx}$$

n'est pas une constante, les intégrales sont algébriques. Les autres cas sont étudiés seulement pour $m = 2$: on retrouve des résultats de M. Fuchs.

Stahl (*H.*). — Sur une formule générale pour la résolution du problème d'inversion de Jacobi. (98-106).

Les équations qui définissent le problème d'inversion de Jacobi s'obtiennent en égalant à p quantités arbitraires $U_1, U_2, \ldots, U_p$, p sommes de p intégrales de première espèce ayant pour limites supérieures les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$. La solution du problème, donnée par Riemann, revient à exprimer le logarithme d'une fonction thêta ayant pour arguments $U_1, U_2, \ldots, U_p$ en fonction symétrique d'intégrales abéliennes et de fonctions algébriques des inconnues $x_1, \ldots, x_p$. Elle est susceptible de formes très diverses, données, entre autres, par Weber, par Nöther et par Klein. L'auteur montre que ces formes sont contenues, comme cas particuliers, dans une formule générale à laquelle il arrive en transformant une formule fondamentale de Riemann.

Schmidt (*Hermann*). — Trois démonstrations nouvelles de la loi de réciprocité pour les résidus quadratiques. (107-120).

Première démonstration. — p et q étant des nombres premiers impairs et $2n$ leur différence, on établit, en se servant du lemme de Gauss, la formule

$$\left(\frac{n}{p}\right)\left(\frac{n}{q}\right) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

et l'on achève facilement

Deuxième démonstration. — Elle est fondée sur la formule préliminaire

$$[P_{pq}(\bmod p)] \times [P_{pq}(\bmod q)] = (-1)^{\left[\frac{p+1}{2}\cdot\frac{q+1}{2}-1\right]},$$

comparée à

$$P_{pq}(\bmod p) = \left(\frac{q}{p}\right)(-1)^{\frac{q-1}{2}},$$

P_{pq} étant le produit de tous les restes positifs premiers avec $pq\,(\bmod pq)$.

Troisième démonstration. — P étant un nombre impair premier avec a, on désigne par $\Psi\left(\frac{a}{P}\right)$ le nombre des restes négatifs dans la suite

$$a, \quad 2a, \quad \ldots, \quad \frac{P-1}{2}a \pmod{P},$$

et par $\psi\left(\frac{a}{P}\right)$ le nombre de ceux de ces restes qui sont premiers avec P. Des relations entre ces deux nombres on conclut la loi de réciprocité, soit par l'emploi du théorème de Dirichlet sur les nombres premiers en progression arithmétique, soit en se servant du principe de l'induction complète.

Hamburger (*M.*). — Sur la réductibilité des équations différentielles linéaires homogènes. (121-138).

On doit à M. Frobenius le théorème suivant :

Si une intégrale d'une équation linéaire homogène à coefficients uniformes s'exprime au moyen d'une autre intégrale et de ses dérivées par une formule linéaire homogène à coefficients uniformes, cette équation est réductible.

L'auteur donne une démonstration directe de ce théorème et étudie la nature des équations linéaires d'ordre inférieur, à coefficients uniformes, avec lesquelles la proposée a effectivement des intégrales communes. Soient $P(y) = 0$ l'équation considérée et y_1 et η_1 les deux intégrales liées par une relation

$$\eta_1 = A_0 y_1 + A_1 y'_1 + \ldots + A_\nu y_1^{(\nu)},$$

où ν est inférieur à l'ordre n de $P(y) = 0$. En écartant le cas banal où y_1 et η_1 n'auraient pas l'une et l'autre n branches indépendantes, M. Hamburger montre qu'on peut trouver pour la constante ω une équation algébrique de degré n, qui exprime la condition nécessaire et suffisante pour que $P(y) = 0$ ait une intégrale commune avec

$$f(y, \omega) = (A_0 - \omega)y + A_1 y' + \ldots + A_\nu y^{(\nu)} = 0.$$

Pour toute racine simple de l'équation en ω, il n'y a qu'une intégrale commune à $P(y) = 0$ et $f(y, \omega) = 0$, et elle se calcule par une quadrature. L'auteur examine en détail le cas où l'équation en ω a des racines multiples et applique ses résultats au cas $n = 2$.

Hensel (*K.*). — Sur la représentation des fonctions algébriques entières d'une variable au moyen d'un système fondamental. (139-155).

Soit y une fonction algébrique *entière* de x, c'est-à-dire définie par une équation dont les coefficients sont entiers en x et dans laquelle le coefficient de la plus haute puissance de y est l'unité. On considère toutes les fonctions z, de la forme $z = u_0 + u_1 y + \ldots + u_n y^{(n-1)}$, n étant le degré de l'équation en y, et les u_i des fonctions rationnelles de x, et l'on se propose de trouver toutes celles qui sont aussi *entières*. Kronecker a montré qu'elles s'expriment au moyen de n d'entre elles convenablement choisies $z_1, z_2, \ldots, z_n$, qui seront dites *former un système fondamental*, par la formule générale

$$z = w_1 z_1 + \ldots + w_n z_n,$$

où les w_k sont des fonctions entières quelconques de x. M. Hensel donne une méthode nouvelle pour construire un tel système fondamental. Il montre que tout revient à résoudre le problème suivant :

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ étant n fonctions algébriques entières indépendantes, trouver la forme générale de n polynomes entiers en x : $u_1, \ldots, u_n$, tels que la fonction $z = u_1 y_1 + \ldots + u_n y_n$ soit algébriquement divisible par un binome $x - a$ donné.

La solution de ce problème ne dépend que de la résolution de systèmes d'équations linéaires.

Königsberger (*Leo*). — Théorème de la conservation d'une liaison algébrique entre les intégrales de divers systèmes d'équations aux dérivées partielles algébriques. (156-169).

L'auteur considère d'abord des équations de la forme

$$\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial z_n} = \gamma,$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \gamma$ sont des fonctions algébriques de $z_1 \ldots, z_n$. Soient $u_1, u_2, \ldots, u_m$ des fonctions satisfaisant respectivement à m telles équations, supposées irréductibles (au sens défini par M. Königsberger dans le Mémoire analysé ci-dessus), et soit v une intégrale d'une $(m+1)^{\text{ième}}$ équation de même forme. Pour qu'il puisse exister une relation algébrique entre $u_1, u_2, \ldots, u_m, v, z, z_2, \ldots, z_n$, il faut et il suffit que toutes les équations considérées aient même premier membre, que l'équation sans second membre correspondante ait toutes ses intégrales algébriques, et que l'équation

$$\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial z_n} = \gamma - \gamma_1 \varphi_1 - \gamma_2 \varphi_2 - \ldots - \gamma_m \varphi_m$$

ait aussi ses intégrales algébriques ($\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ et γ sont les seconds membres des équations considérées, et $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ des intégrales de l'équation sans second

membre). Φ étant une intégrale de cette équation, la relation en question est

$$v = \varphi_1 u_1 + \varphi_2 u_2 + \ldots + \varphi_m u_m + \Phi.$$

Le théorème annoncé est, dans le cas actuel, que cette relation subsiste quand on y remplace $u_1, u_2, \ldots, u_m$ par m autres intégrales quelconques des équations considérées, v devenant alors une autre intégrale de la $(m+1)^{\text{ième}}$ équation donnée.

Ce théorème s'étend aux systèmes d'équations aux dérivées partielles pour lesquels l'auteur a défini l'irréductibilité dans son précédent Mémoire (analysé plus haut).

Schwering (*K.*). — Sur la résolution des équations de la division des fonctions elliptiques qui se rattachent à la lemniscate. (170-204).

L'importance de ces équations a été signalée par Kronecker : elles doivent jouer, pour les équations abéliennes à coefficients complexes, un rôle analogue à celui que jouent les équations de la division du cercle pour les équations abéliennes à coefficients entiers, mais leur étude restait à faire et présentait de grandes difficultés. Par l'introduction de systèmes de trois indices, l'auteur réussit à mettre en évidence des relations simples entre les racines des équations considérées. Il obtient également des résultats importants pour la formation effective de leurs résolvantes, notamment le calcul d'une certaine fonction cyclique par une sorte de développement en fraction continue, et la détermination du discriminant de l'équation. Il traite enfin complètement divers exemples numériques.

Stäckel (*P.*). — Sur la théorie de la courbure totale de Gauss. (205-206).

Démonstration de l'invariance de la courbure totale et de son premier paramètre différentiel, dans les déformations d'une surface, fondée sur la comparaison des développements en série des z de deux surfaces, considérés comme fonctions de x et y (x, y, z coordonnées rectangulaires).

Hauck (*Guido*). — Théorie de la correspondance trilinéaire des systèmes plans. Cinquième Article. Résumé et cas particuliers importants. (*Voir* les Articles précédents : même Journal, t. 95, 97, 98, 108.) (207-233, avec une Planche).

L'auteur rappelle d'abord les propriétés générales de la *correspondance trilinéaire projective* entre trois systèmes plans : chaque système de trois points associés peut être représenté en général par les trois perspectives d'un même point de l'espace, faites de trois points de vue différents sur trois plans différents. Il étudie ensuite la *correspondance trilinéaire sective,* qui se déduit de la précédente au moyen du principe de dualité. Mais l'Article est plus spécialement consacré à l'étude de la manière dont se modifient les résultats généraux précédemment obtenus dans les trois cas particuliers suivants : 1° les points à l'infini des trois axes principaux de la correspondance sont trois points asso-

ciés; 2° les droites à l'infini des trois systèmes plans se correspondent; 3° les droites à l'infini se correspondent, et deux faisceaux nodaux opposés quelconques sont congruents.

Landsberg (*Georg*). — Sur la théorie des sommes de Gauss et la transformation linéaire des fonctions thêta. (234-253).

L'auteur établit d'abord la formule

$$\vartheta_3(\zeta, \tau) = \lim_{N=\infty} \int_\beta \frac{e^{\pi i(w^2\tau + 2w\zeta)}}{e^{2\pi i w}} dw,$$

où β désigne le contour du rectangle formé par les droites $y = \pm b$, et

$$x = \pm\left(N + \frac{1}{2}\right),$$

b désignant une constante fixe, et N un nombre entier positif quelconque. En développant sous le signe $\int$ la fraction $\frac{1}{e^{2\pi i w} - 1}$ en série, on obtient facilement la formule fondamentale connue

$$\vartheta_3\left(\frac{\zeta}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,.\,e^{\pi i \frac{\zeta^2}{\tau}}.\vartheta_3(\zeta, \tau).$$

La loi de réciprocité pour les sommes de Gauss s'en déduit par la considération d'expressions de la forme $\rho\vartheta_3\left(0, -\frac{\lambda}{\mu} + i\rho^2\right)$, où l'on fait tendre ρ vers zéro. En modifiant légèrement son analyse, M. Landsberg y arrive aussi directement. Il s'occupe ensuite de la détermination de la racine huitième de l'unité qui figure dans la formule générale de la transformation linéaire des fonctions thêta, et en donne une expression explicite en fonction des quotients incomplets des deux fractions continues égales à $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{\gamma}{\alpha}$ (la transformation étant supposée définie par les formules

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \qquad \zeta' = \frac{\zeta}{\gamma\tau + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1\Big).$$

Schumacher (*Robert*). — Les systèmes de points sur la droite et leur application à la génération des courbes planes algébriques. (Continuation de l'Article de la page 264 du Tome 110 du même Journal). (254-276).

Soient P et P′ deux points, g une droite du plan, P_0 le point de rencontre de PP′ et g. On considère la chaîne normale K d'ordre n du système de n points de g, ayant P_0 pour centre; on la suppose en relation projective avec la série de points p' qui a g pour support, de manière que le groupe principal (P_0) corresponde au point P_0. (*Voir*, pour la définition des éléments introduits, l'analyse du précédent Article rappelé ci-dessus.) On projette, de P comme centre, les groupes de K, et, de P′ comme centre, les points p' qui leur corres-

pondent respectivement : le lieu des points d'intersection des projectantes homologues est une courbe d'ordre n. Un théorème fondamental est alors qu'on peut remplacer les points P et P' par deux autres points quelconques du plan. L'auteur définit ensuite, en faisant intervenir des considérations analogues, un faisceau de courbes d'ordre n, les systèmes linéaires quelconques formés de courbes d'ordre n, et la première polaire d'une courbe quelconque. Il arrive alors à la génération des courbes d'ordre n au moyen de faisceaux de droites et de courbes d'ordre $n-1$, et en conclut que l'ensemble des courbes d'ordre n ainsi définies dépend bien de $\frac{n(n+3)}{2}$ arbitraires.

Knoblauch (*J.*). — Sur les covariants de la déformation. (277-289).

L'auteur désigne sous ce nom les fonctions rationnelles des coefficients d'une forme différentielle quadratique binaire, de leurs dérivées, et des dérivées de une ou plusieurs fonctions arbitraires, qui conservent leur forme par un changement de variables quelconque. Si l'on n'introduit qu'une fonction arbitraire, par ses dérivées du premier et du second ordre, on retrouve en particulier les paramètres différentiels de Beltrami. Les résultats et les méthodes de Christoffel permettent de traiter le cas général : l'auteur montre que l'on est ramené en définitive au problème fondamental de la théorie des invariants des formes algébriques.

M. Knoblauch donne en terminant quelques indications sur plusieurs problèmes de la théorie des surfaces qui sont caractérisés par l'évanouissement simultané de deux covariants de la déformation.

Stäckel (*Paul*). — Sur des transformations de certaines équations différentielles. (290-302).

Pour justifier la définition classique des invariants différentiels d'une équation linéaire homogène, il importe de prouver que les transformations

$$x = f(\xi), \qquad y = g(\xi)\,\eta$$

sont les seules qui changent toute équation linéaire homogène d'ordre m en une équation de même forme. C'est ce théorème que l'auteur démontre : le cas $m = 1$ fait exception. Le même théorème a lieu pour les équations différentielles algébriques homogènes par rapport à la variable dépendante et ses dérivées.

Zindler (*Konrad*). — Définition synthétique de multiplicités géométriques linéaires à un nombre quelconque de dimensions. (303-314).

Reye a montré que les diverses divisions portées par toutes les droites de l'espace et homographiques entre elles forment une multiplicité linéaire à sept dimensions. Partant de cette multiplicité linéaire $M^{(1)}$, on peut définir des multiplicités linéaires à une dimension, formées d'éléments de $M_1^{(1)}$, et rapportées projectivement les unes aux autres. L'auteur se propose de montrer que l'ensemble

des êtres géométriques ainsi définis forme à son tour une multiplicité linéaire $M^{(2)}$. Cela fait, il en résulte que, si l'on opère sur $M^{(2)}$ comme on a opéré d'abord sur la multiplicité linéaire $M_3^{(0)}$ formée des points de l'espace, puis sur $M_1^{(1)}$, et ainsi de suite, on obtiendra toujours des multiplicités nouvelles linéaires. L'auteur évalue le nombre de dimensions de ces multiplicités ainsi obtenues par l'addition répétée du procédé de Reye : ce nombre va en croissant à chaque construction nouvelle.

Hazzidakis (*J.-N.*). — Équations différentielles linéaires homogènes, pour lesquelles le déterminant d'un système fondamental d'intégrales est symétrique. (315-328).

Il s'agit des systèmes d'équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre qui possèdent un système de solutions tel que le déterminant formé par les valeurs des fonctions inconnues dans ces diverses solutions soit un déterminant symétrique. L'auteur montre qu'un tel système s'intègre par la résolution d'une équation algébrique d'ordre n (n étant le nombre des variables dépendantes) qui se forme comme l'équation caractéristique des systèmes à coefficients constants, et par n quadratures. Il donne également les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients du système considéré pour qu'il ait la propriété en question.

Knoblauch (*J.*). — Sur la théorie des paramètres différentiels. (329-343).

L'auteur se propose de perfectionner la théorie des paramètres différentiels pour cette partie de l'étude des surfaces où l'on considère, en même temps que le ds^2, d'autres formes différentielles. Il faut d'abord séparer nettement ce qui provient uniquement de la considération de deux formes différentielles quadratiques ou bilinéaires des particularités qui tiennent aux relations entre les coefficients de ces formes et les coordonnées cartésiennes des points de la surface. Cela permet de mieux grouper les formules, de les simplifier et d'en réduire le nombre. D'autres simplifications s'obtiennent par l'emploi de certaines combinaisons linéaires des dérivées premières d'une fonction quelconque, qui ont été introduites par Frobenius, et dont l'auteur fait ressortir l'importance et la signification géométrique.

Zsigmondy (*K.*). — Sur une généralisation de la fonction $\varphi(m)$ dans la théorie des nombres. (344-346).

L'auteur considère le nombre $\varphi(r, n_1, \ldots, n_\rho)$ de tous les entiers qui sont inférieurs ou égaux à r, et qui ne sont divisibles par aucun des nombres n_1, $n_2, \ldots, n_\rho$. Il donne une expression de cette fonction, et en conclut diverses propriétés.

Cayley. — Sur la caractéristique n d'Halphen, dans la théorie des courbes de l'espace. (347-352).

Pour une courbe gauche de degré d, Halphen a introduit, outre le nombre h

des cordes issues d'un point quelconque, l'ordre n du cône d'ordre minimum passant par ces h cordes. Pour une valeur de d, les systèmes possibles (d, h, n) sont en nombre limité. Cayley fait remarquer que, pour les systèmes possibles (d, h, n), les h cordes issues d'un point ne sont pas h génératrices quelconques d'un cône d'ordre n, mais qu'elles doivent former certaines configurations spéciales, qu'il y aurait lieu d'étudier dans chaque cas.

Band 112 (348 pages). Berlin; 1893.

Vahlen (*K.-Th.*). — Contribution à une théorie additive des nombres. (1-36).

Le titre de l'Article indique que les propriétés qui y sont étudiées ont trait à des décompositions des nombres en sommes, et que les procédés de démonstration consistent à considérer les nombres dont on s'occupe comme étant des sommes particulières d'autres nombres se succédant suivant des lois particulières. Les nombreuses formules qui y sont établies se rapportent aux sujets suivants :

I. Démonstration purement arithmétique du théorème de Legendre sur les nombres pentagonaux, et applications de ce théorème.

II. Démonstration également purement arithmétique d'un théorème plus général, et applications.

III. Décomposition des nombres en deux et en quatre carrés.

Schwering (*K.*). — Addition au Mémoire : *Décomposition de l'équation de la division des fonctions lemniscatiennes en quatre facteurs* (même Journal, t. 110, p. 42). (37-38).

Nouvelle démonstration du fait que, lorsqu'on pose $x^4 = z \pm 1$ dans l'équation de la division $\varphi_n(x^4) = 0$, ses coefficients nouveaux sont divisibles par certaines puissances de $1 + i$.

Segen (*D.*). — Sur les surfaces du quatrième degré à trois droites doubles. (39-52).

L'auteur étudie les propriétés de la surface gauche du quatrième degré à trois droites doubles en la considérant comme engendrée par les droites qui joignent les points d'une droite fixe aux couples homologues de points d'une involution sur une conique fixe, quand on établit une correspondance projective entre les points de la droite et les couples de l'involution. Il examine les divers cas particuliers qui peuvent se produire. Il étudie enfin d'autres modes de génération, en particulier ceux qu'on obtient par une correspondance convenable établie entre les points des deux directrices doubles, ou entre les points de deux coniques de la surface.

Ruoss (*H.*). — Sur les oscillations pendulaires isochrones. (53-57).

Il s'agit d'étudier le système des droites d'un corps solide autour desquelles le corps exécuterait des oscillations pendulaires de même durée. L'auteur répartit, à cet effet, les droites de l'espace en groupes, les droites d'un même groupe étant toutes celles qui rencontrent à angle droit un même rayon issu du centre de gravité du corps. Et il traite les questions suivantes :

1° Quelle est la surface réglée engendrée par les droites d'un même groupe qui seraient axes d'oscillations isochrones ?

2° Quels sont les rayons issus du centre de gravité qui ne correspondent qu'à des axes d'oscillations isochrones imaginaires ?

3° Quel est le nombre maximum d'oscillations pendulaires qu'un corps donné peut effectuer dans une minute ?

Pochhammer (*L.*). — Sur la réduction de l'équation différentielle de la série F la plus générale. (58-86).

Il s'agit de l'équation

$$x^{n-1}\frac{d^n y}{dx^n} + L_1 x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + L_{n-2}\, x\frac{d^2 y}{dx^2} + L_{n-1}\frac{dy}{dx}$$
$$= x^m\frac{d^m y}{dx^m} + K_1 x^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-2}} + \ldots + K_{m-1}\, x\frac{dy}{dx} + K_m y,$$

où $m \leqq n$ et où $L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}, K_1, \ldots, K_m$ sont des constantes. Elle est vérifiée par une série F du $n^{\text{ième}}$ ordre, c'est-à-dire de la forme

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; \rho_1, \ldots, \rho_{n-1}; x)$$
$$= 1 + \frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}{1.\rho_1\rho_2\ldots\rho_{n-1}}x + \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)\,\alpha_2(\alpha_2+1)\ldots\alpha_m(\alpha_m+1)}{1.2.\rho_1(\rho_1+1)\ldots\rho_{n-1}(\rho_{n-1}+1)}x^2 + \ldots$$

L'auteur démontre que cette équation se réduit à une équation de même forme, mais de degré $n-1$, par l'un ou l'autre des deux changements de fonction inconnue

$$y = \int_g^h (t-x)^{-\alpha_m} t^{\alpha_m - \rho_{n-1}}\, T\, dt,$$

$$y = \int_g^h e^{\frac{x}{t}} t^{-\rho_{n-1}}\, T\, dt.$$

Dans la nouvelle équation, t est la variable indépendante, et T la nouvelle fonction inconnue. Le calcul de cette transformation est fait par M. Pochhammer dans tous ses détails.

Meyer (*A.*). — Note sur le Mémoire du Tome 98 du même Journal, sur les formes ternaires. (87-88).

Cette Note se rapporte à la détermination du nombre des classes des formes

quadratiques par lesquelles zéro peut se représenter rationnellement. Elle complète et simplifie sur ce point un Mémoire précédent de l'auteur.

Hettner (*G.*). — Application de la transformation du second degré des fonctions thêta de deux variables à la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments. (89-111).

De même que la détermination de la moyenne arithmético-géométrique de deux éléments positifs s'effectue au moyen de la période réelle d'une intégrale elliptique de première espèce en se servant de la transformation du second degré des fonctions thêta elliptiques, de même, comme l'a montré Borchardt, la transformation du second degré des fonctions thêta de deux variables fournit le moyen d'exprimer la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments positifs par un déterminant formé avec les périodes réelles de certaines intégrales hyperelliptiques de première espèce. L'auteur le prouve en donnant les formules de la transformation des fonctions thêta qui fournissent effectivement la représentation annoncée. Il indique aussi les modifications qui se produisent lorsque le déterminant des quatre éléments donnés est nul.

Schmidt (*Hermann*). — Recherches géométriques. (112-139, 319-348).

Ce sont des recherches sur les fondements de la Géométrie. L'auteur admet les notions d'espace, de corps, surface, ligne, ainsi que celle de la congruence. Il pose comme point de départ l'existence de la sphère, considérée comme pouvant se déplacer librement sans cesser de coïncider avec elle-même, et pense montrer que l'existence d'une Géométrie non euclidienne implique alors une contradiction.

Dans son second Mémoire, il se propose d'établir les formules fondamentales de la Trigonométrie sur la sphère, ainsi que sur une surface non euclidienne, sans se servir de constructions planimétriques.

Hazzidakis (*J.-N.*). — Le théorème des aires dans le mouvement sur des surfaces développables. (140-147).

C'est une généralisation du théorème sur les forces centrales. Le rayon vecteur du point matériel mobile est remplacé ici par la tangente à une courbe fixe, et l'on cherche la condition pour que cette tangente décrive des aires proportionnelles aux temps. Il est nécessaire pour cela que la composante de la force suivant la perpendiculaire à la tangente située dans le plan osculateur de la courbe fixe considérée soit inversement proportionnelle à la quatrième puissance de la tangente et directement proportionnelle au rayon de courbure de la courbe fixe. Ces conditions sont suffisantes pour une vitesse initiale convenablement choisie.

Haentzchel (*E.*). — Sur la forme de l'intégrale de l'équation différentielle $(q_0 + q_1 y)\frac{dy}{dx} = p_0 + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3$. (148-155).

Après avoir rappelé divers travaux ayant trait à l'équation considérée, l'au-

2ne Partie.

teur montre qu'on peut obtenir des équations de cette forme, plus générales que celles que l'on a pu intégrer précédemment, en prenant pour l'intégrale la forme

$$(\alpha_1+\beta_1 y)^{h_1}(\alpha_2+\beta_2 y)^{h_2}(\alpha_3+\beta_3 y)^{h_3} e^{-\int \frac{\alpha_0+\beta_0 y}{\alpha_3+\beta_3 y} dx} = ce^{\sigma} \qquad (h_1+h_2+h_3=0)$$

et d'autres formes analogues.

Fuchs (*L.*). — Note sur le travail contenu dans le Tome 83, pages 13 et suivantes, du même *Journal : Sur quelques propriétés, etc.; extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.* (156-164).

Il s'agit d'une manière d'établir les propriétés fondamentales de la fonction modulaire, en partant de l'équation différentielle

$$2u(u+1)\frac{d^2\eta}{du^2}+2(3u-1)\frac{d\eta}{du}+\frac{1}{2}\eta=0.$$

On en déduit le polygone fondamental et, en même temps, la propriété de la fonction modulaire d'être uniforme et automorphe. L'auteur remarque que cette méthode peut se généraliser pour décider si l'inversion du quotient des intégrales d'une équation linéaire quelconque fournit une fonction uniforme.

Thomé (*L.-W.*). — Sur une application de la théorie des équations différentielles linéaires aux fonctions algébriques (165-180). (Continuation des Mémoires des Tomes 104 et 108 du même *Journal*).

Partant de l'équation $f(z, x)=0$, de degré n en z, et qui n'est assujettie qu'à la seule condition que son discriminant ne soit pas nul, identiquement, l'auteur montre qu'on peut déterminer une transformation

$$s = C(\Delta_0+\Delta_1 z+\Delta_2 z^2+\ldots+\Delta_{n-1} z^{n-1}),$$

qui conduise à une équation $F(s, x)=0$, dans laquelle toutes les branches de la fonction algébrique s soient linéairement indépendantes; et cela de manière que les coefficients des polynomes entiers en x, Δ_0, Δ_1, ..., Δ_{n-1} s'expriment rationnellement au moyen des coefficients des polynomes entiers en x, qui constituent les coefficients des puissances de z dans l'équation donnée (le coefficient de z^n est supposé égal à 1). Alors l'équation linéaire d'ordre n, à laquelle satisfont les n branches de la fonction s, permet de déterminer la nature des points critiques de cette fonction, et de trouver les développements qui permettent d'en représenter les branches. De la fonction s, on passe sans peine à la fonction z elle-même. L'auteur donne à la fin de son Mémoire un moyen élégant de calculer effectivement l'équation linéaire dont dépend la fonction s, et de vérifier le résultat obtenu.

Königsberger (*Leo*). — Sur les domaines de convergence des intégrales des équations aux dérivées partielles. (181-204).

L'auteur rappelle comment, dans le tome CIV du même *Journal*, il a établi l'existence des intégrales d'une équation différentielle ordinaire d'ordre quelconque. C'est la méthode du calcul des limites de Cauchy qu'il a employée, mais avec cette modification intéressante que l'équation de comparaison est du premier ordre. Appliquée à une équation linéaire, cette méthode conduit facilement au théorème de Fuchs sur le rayon de convergence des intégrales, et prouve de plus que les équations linéaires sont les seules pour lesquelles ce théorème soit vrai.

M. Königsberger montre ensuite que sa méthode s'étend au cas d'une équation aux dérivées partielles d'ordre quelconque. Si on l'applique à une équation linéaire, on arrive à ce résultat qu'il est impossible ici de conclure du cercle de convergence des coefficients à un rayon de convergence des intégrales qui ne dépende pas des conditions initiales; mais, pour des conditions initiales d'une forme convenable, on peut retrouver des résultats analogues à ceux que donnent les équations différentielles linéaires ordinaires.

Hamburger (*M.*) — Sur les solutions singulières des équations différentielles algébriques du premier ordre. (205-246).

Suivant que l'on raisonne sur l'équation différentielle ou sur son intégrale générale, on est induit à conclure qu'il n'y a pas, *en général*, ou qu'il y a, *en général*, une intégrale singulière. Ce paradoxe n'a pas été expliqué d'une manière satisfaisante. Malgré le haut intérêt de leurs recherches à ce sujet, MM. Darboux et Cayley en ont donné des raisons qui ne sont pas toutes acceptables. La vraie explication, à laquelle arrivera M. Hamburger, est la suivante : Lorsqu'on prend une équation différentielle algébrique à coefficients quelconques, l'équation qui définit l'intégrale offre cette particularité que les courbes qu'elle représente n'ont pas d'enveloppe. Et inversement quand on part d'une équation intégrale à coefficients quelconques, l'équation différentielle obtenue présente cette particularité exceptionnelle d'avoir une intégrale singulière. Le fait que certaines propriétés des courbes apparaissent comme générales ou non, suivant la manière dont elles sont représentées, se présente du reste déjà dans la double représentation, ponctuelle ou tangentielle, des courbes planes algébriques. L'existence ou la non-existence d'une enveloppe, dans le cas actuel, ne dépend que de la nature du système de courbes; ce qui dépend du mode de représentation (équation différentielle ou équation intégrale), c'est seulement le fait que l'un ou l'autre cas apparaisse comme le cas général.

M. Hamburger part d'abord de l'équation différentielle, à laquelle il applique la méthode due à M. Fuchs, consistant à faire intervenir les facteurs linéaires du discriminant de l'équation en $\frac{dy}{dx}$. Soit $y = \eta$ l'un de ces facteurs; considérant alors $\frac{dy}{dx}$ comme fonction de y, on développe en série suivant les puissances de $(y - \eta)$ et l'on intègre avec la condition initiale que, pour $x = c$, y prenne la même valeur que η. On obtient ainsi un développement de $(y - \eta)$ suivant les puissances de $(x - c)$. Les circonstances caractéristiques des trois cas possibles : $y = \eta$ n'est pas une intégrale, ou est une intégrale singulière, ou est une intégrale particulière, sont alors les suivantes : dans tous les développements obtenus, le plus faible exposant de $(x - c)$ est, au plus, égal à 1, ou, dans certains de ces développements, cet exposant est supérieur à 1, ou enfin certains de ces développements sont nuls identiquement.

L'auteur démontre ensuite que toute équation différentielle algébrique de degré n en $\frac{dy}{dx}$ a une intégrale générale qui, sauf dans le voisinage d'un nombre limité de points (x, y), s'exprime par une équation de degré n par rappport à la constante arbitraire dont les coefficients sont des séries entières ayant un certain rayon de convergence.

Dans la seconde Partie de son Mémoire, l'auteur part d'une équation intégrale de la forme précédente et élimine la constante : dans l'équation obtenue figure en général, outre le premier membre de l'équation différentielle, un facteur indépendant de $\frac{dy}{dx}$. Il peut alors arriver que le discriminant de l'équation intégrale donnée, pris par rapport à la constante arbitraire, se trouve dans ce facteur étranger et ne fournisse pas une intégrale de l'équation différentielle. Et ceci donne la condition pour que les courbes considérées n'aient pas d'enveloppe. Appliquant alors la même méthode de développement en séries que dans la première Partie, on retrouve les mêmes circonstances caractéristiques que précédemment, pour les développements obtenus.

Toute contradiction entre les deux points de vue a donc disparu.

Fields (*J.-C.*). — Nombres des sommes de résidus quadratiques et de non-résidus quadratiques pris n à n, qui sont congrues à un entier donné, relativement à un module premier impair p. (247-161).

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ les résidus quadratiques, et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ les non-résidus quadratiques $\left[q = \frac{1}{2}(p-1)\right]$, et soient k et n deux entiers donnés. L'auteur considère les expressions, formées de n termes, tous distincts, sauf k d'entre eux,

$$(A) \qquad \alpha_r + \alpha_s + \ldots + k\alpha_t$$

et

$$(B) \qquad \beta_r + \beta_s + \ldots + k\beta_t,$$

et détermine le nombre des expressions (A) et des expressions (B) qui sont respectivement congrues, soit à un résidu quadratique quelconque donné, soit à un non-résidu quadratique quelconque donné, soit à zéro; ainsi que le nombre des sommes $(\alpha_r + \beta_s)$ qui satisfont aux mêmes conditions.

Stäckel (*Paul*). — Sur la théorie des fonctions analytiques uniformes. (262-264).

L'auteur donne d'abord une démonstration très élémentaire de l'impossibilité de prolonger la fonction $\sum_0^\infty z^{a^n}$ au delà du cercle $|z| = 1$; puis un procédé simple et général pour former des fonctions analytiques uniformes ayant un domaine d'existence donné; et même restant toujours inférieures en valeur absolue à un nombre positif fixe.

Jahnke (*Eugen*). — Les relations différentielles pour les fonctions uniformes doublement périodiques de deuxième et de troisième espèce. (265-286).

L'auteur obtient d'abord, pour une fonction doublement périodique de première espèce et de degré m, une équation différentielle du premier ordre et du second degré à coefficients doublement périodiques; et, par suite, au moyen des dérivées logarithmiques, une suite infinie d'équations différentielles homogènes d'ordre et de degré ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) pour les fonctions de deuxième et de troisième espèce. La représentation des fonctions doublement périodiques, due à Liouville, conduit à une nouvelle suite infinie d'équations de la même nature. Pour les plus simples, l'auteur donne les équations de conditions qu'elles doivent remplir pour satisfaire effectivement à la question. Il arrive ainsi à un théorème général caractérisant toute fonction doublement périodique de deuxième ou de troisième espèce, de degré donné.

Suit une étude détaillée des équations différentielles linéaires pour les fonctions de deuxième espèce : on est conduit à des équations de la classe d'Hermite, du même type que celles qui ont été découvertes par MM. Picard et Mittag-Leffler, et qui sont au fond les plus générales de cette nature.

Enfin, dans une troisième Partie, l'auteur applique les identités de M. Caspary sur les fonctions thêta, pour obtenir de nouvelles formes des relations différentielles cherchées, qui, dans les cas les plus simples, redonnent des résultats de MM. Mittag-Leffler et Brioschi.

Stäckel (*P.*). — Sur des équations algébriques liant des fonctions uniformes, qui se reproduisent par des substitutions linéaires. (287-385).

L'auteur démontre d'abord que, pour que deux fonctions uniformes, admettant des substitutions linéaires (et d'ordre fini), soient liées par une relation algébrique, il faut et il suffit que leurs groupes aient un sous-groupe commun d'indice fini.

Puis, suivant une idée indiquée par Abel pour la transformation des fonctions elliptiques, il étudie le problème suivant :

Dans quel cas deux fonctions de la nature énoncée, mais d'arguments différents, sont-elles liées par une équation algébrique quand on établit entre les arguments une relation algébrique convenable?

Trois cas peuvent se produire; le plus intéressant est celui où les groupes des deux fonctions sont infinis et contiennent tous deux des substitutions paraboliques. La relation entre les arguments est alors forcément bilinéaire, et l'on est ramené au problème de la transformation.

Vahlen (*K.-Th.*). — Sur les relations entre les déterminants d'une matrice. (306-310).

L'auteur se propose de généraliser les coordonnées pluckériennes de la droite pour une multiplicité linéaire à μ dimensions, considérée dans un espace

linéaire à n dimensions. Il établit à cet effet les $\binom{n+1}{\mu} - 1 - \mu(n+1-\mu)$ relations homogènes qui lient les $\binom{n+1}{\mu}$ déterminants d'ordre μ d'une matrice à μ lignes et $(n+1)$ colonnes.

Stäckel (*Paul*). — Sur les systèmes de fonctions de variables réelles. (311-318).

Le théorème classique de Sturm sur l'alternance des racines de deux intégrales d'une équation différentielle linéaire du second ordre est, en réalité, un théorème de la théorie des systèmes de fonctions de variables réelles, et doit se rattacher à la théorie des caractéristiques de Kronecker. On l'énonce alors ainsi :

Si deux fonctions réelles d'une variable réelle sont continues dans un intervalle, et si leurs dérivées y sont finies, si de plus le déterminant formé avec ces fonctions et leurs dérivées y est de signe constant, les racines des deux fonctions alternent dans cet intervalle.

Ainsi considéré, ce théorème se généralise pour trois fonctions f_1, f_2, f_3 de deux variables réelles, en considérant les points où l'une des courbes $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ est coupée par les deux autres. La généralisation pour $(n+1)$ fonctions de n variables réelles est alors évidente.

Band 113 (353 pages). Berlin; 1894.

Wallenberg (*G.*). — Application de la théorie des invariants différentiels à l'étude de l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires homogènes. (1-41).

Il s'agit des équations linéaires d'ordre n, à coefficients algébriques, dont les intégrales sont liées par $n-2$ relations homogènes non linéaires. Après un historique de la question, et de la théorie des invariants différentiels, l'auteur introduit les invariants qui permettent d'énoncer des conclusions générales. Ce sont les invariants a_k et b_k de Forsyth et Brioschi, et certaines combinaisons qui en dérivent et que l'auteur appelle les *invariants $d_{k,l}$ et f_r*. Les résultats essentiels obtenus sont les suivants :

Si les invariants $d_{k,l}$ et f_r ne sont pas tous nuls ou dénués de sens, les intégrales ne diffèrent de fonctions algébriques que par un facteur commun, dont la dérivée logarithmique est algébrique. Dans le cas excepté, il existe une transformation $z = \psi(x)$, $y = \rho(x)v$ qui change l'équation en une équation à coefficients constants; et la nature des relations algébriques supposées est liée à celle des racines de l'équation caractéristique de cette transformée à coefficients constants. Les résultats relatifs à ce second cas se précisent encore si l'équation donnée appartient à la classe des équations de Fuchs, et si les racines de l'équation fondamentale déterminante sont rationnelles. Enfin, si l'on admet d'emblée cette dernière hypothèse, et si l'on suppose en plus

l'équation donnée irréductible, on peut dire d'une manière tout à fait générale que l'équation s'intègre algébriquement, sauf dans le cas où les relations sont de la forme

$$y_k^2 - y_{k-1} y_{k+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Cayley. — Sur les résolvantes sextiques de Jacobi et Kronecker. (42-49).

L'auteur établit les relations qui lient les racines de ces deux résolvantes de l'équation du cinquième degré; il étudie les relations qui lient entre elles les racines de la résolvante de Kronecker, et en déduit une expression nouvelle des coefficients de cette résolvante.

Horn (*J.*). — Sur la théorie de Briot et Bouquet pour les équations différentielles du premier ordre. (50-57).

L'équation différentielle

$$(A' x^{\alpha'} y^{\beta'} + \ldots) \frac{dy}{dx} - (A x^{\alpha} y^{\beta} + \ldots) = 0$$

a été ramenée par Briot et Bouquet à des types simples, en supposant l'existence d'une intégrale qui soit, par rapport à x, infiniment petite d'ordre rationnel. Les travaux de MM. Poincaré et Picard ont montré qu'il peut se présenter des cas où l'on a seulement une intégrale d'ordre incommensurable, et même imaginaire. M. Horn reprend la recherche des types simples, en admettant l'existence de telles intégrales, ainsi que l'étude de la forme des intégrales pour les types obtenus. L'auteur ramène l'équation à la forme

$$\Sigma A'_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta} . x \frac{dy}{dx} = y \Sigma A_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta} \qquad (\alpha + \beta \geq m),$$

avec

$$A'_{0,m} = 1, \qquad A_{0,m} = a \qquad \text{et} \qquad 0 < R(a) < 1;$$

et montre qu'elle admet l'intégrale

$$y = x^a \Sigma C_{\lambda,\mu} x^{\lambda + \mu a} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, +\infty; \mu \geq -\lambda),$$

où la constante C_{00} est arbitraire,

Stäckel (*P.*). — Covariants de déformation et paramètres différentiels. (58-60).

Démonstration de ce théorème général, démontré pour le cas d'une surface par M. Darboux : Tous les covariants de déformation d'une forme différentielle quadratique à un nombre quelconque de variables se déduisent de deux quelconques d'entre eux, supposés indépendants, par l'emploi des deux opérations différentielles de Beltrami.

Hensel (*K.*). — Étude de l'équation fondamentale d'une classe

de nombres algébriques, relativement à un module premier réel, et détermination des diviseurs de son discriminant. (61-83).

Soit $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n$ un *système fondamental* de nombres algébriques entiers, pour une *classe* [*Gattung* (Kronecker), ou *Körper* (Dedeking)] de nombres algébriques; soient $w_0 = u_1 \xi_1 + \ldots + u_n \xi_n$ la *forme fondamentale* correspondante, et $F(w) = w^n + \ldots = 0$ l'*équation fondamentale* à laquelle elle satisfait. L'auteur détermine la congruence de degré minimum satisfaite par w_0, relativement à un module *idéal* premier, et conclut du résultat que, relativement à un module premier réel, w_0 ne satisfait à aucune congruence de degré inférieur à n. Il peut alors démontrer que le discriminant de l'équation fondamentale $F(w) = 0$ a les mêmes diviseurs numériques que le *discriminant de la classe*. Et ce théorème permet de déterminer les diviseurs de ce discriminant, et de démontrer que ses seuls diviseurs numériques premiers sont ceux qui contiennent le carré d'un nombre idéal premier. Ce dernier théorème avait été établi par Dedeking, par une tout autre voie; la marche suivie par M. Hensel est conforme aux idées de Kronecker, qui n'avait pu démontrer les résultats précédents qu'avec certaines restrictions.

Heymann (*Woldemar*). — Cas d'intégralité de l'équation différentielle : $(p_5 y + p_4)\,dy - (p_3 y^3 + p_2 y^2 + p_1 y + p_0)\,dx = 0$. (84-88).

L'auteur montre, par des cas d'intégrabilité nouveaux, que, même pour des valeurs très simples des coefficients p, l'intégrale générale dépend de y par l'intermédaire de fonctions transcendantes très compliquées, par exemple de transcendantes définies par des équations de Riccati.

Kneser (*Adolf*). — Remarques sur les formules de Frenet et Serret et sur la distinction analytique entre les courbes gauches dextrogyres et lévogyres. (89-101).

L'auteur donne une démonstration des formules de Frenet, qui met en évidence ce fait que le signe du rayon de torsion dans ces formules est lié au sens dans lequel tourne le plan osculateur autour d'une direction quelconque choisie sur la tangente, quand le point courant de la courbe se meut dans cette direction.

Ce signe peut aussi s'interpréter par le signe du volume du tétraèdre formé par quatre points consécutifs de la courbe. M. Kneser montre enfin la concordance de ces règles avec d'autres règles connues, par exemple celle qui a été donnée par Frenet.

Stäckel (*Paul*). — Sur les déformations des multiplicités à n dimensions. (102-114).

L'auteur applique, aux transformations d'une forme différentielle quadratique définie quelconque, la méthode de comparaison de deux développements en série qu'il avait précédemment employée dans la théorie de la courbure de Gauss (même Journal, t. III, p. 205). Il retrouve ainsi, non seulement des

résultats dus à Monro et Schur, mais aussi une démonstration très simple de l'invariance de la courbure, au sens de Riemann. L'article contient aussi une critique des fondements de la théorie étudiée et des travaux cités.

Königsberger (*Leo*). — Sur l'extension du théorème de Cauchy sur l'existence des intégrales des systèmes d'équations différentielles ordinaires, due à Poincaré. (115-127).

Il s'agit du théorème de M. Poincaré sur la légitimité du développement des intégrales en séries procédant suivant les puissances entières et positives d'un paramètre figurant dans les équations différentielles données. L'auteur en reprend d'abord la démonstration, en supposant un nombre quelconque de paramètres, et montre que l'énoncé, mis sous une forme convenable, peut s'étendre au cas d'un système de m équations aux dérivées partielles du premier ordre à m fonctions inconnues.

Hensel (*K.*). — Recherches arithmétiques sur les diviseurs non essentiels communs aux discriminants des nombres algébriques entiers appartenant à une même classe. (128-160).

Mêmes notations que dans l'article du même auteur analysé plus haut.

Soit $w_0 = u_1\xi_1 + \ldots + u_n\xi_n$ une forme fondamentale de la classe considérée. Le discriminant D de la classe est le déterminant formé avec les n systèmes de valeurs conjuguées des n nombres $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Le discriminant de la forme w_0 est de la forme $\Delta = DU$, où U est une forme homogène de $u_1, \ldots, u_n$ dont les coefficients sont entiers et premiers entre eux dans leur ensemble. Il peut arriver cependant que les valeurs que prend U quand on donne à $u_1, \ldots, u_n$ tous les systèmes possibles de valeurs entières réelles aient des diviseurs communs, qui seront dits *non essentiels*. L'auteur démontre d'abord (en faisant intervenir dans la question les nombres *idéaux* premiers) un résultat de Dedekind sur ces facteurs communs non essentiels, supposés premiers. Il donne, sous diverses formes, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre premier réel p soit un facteur commun non essentiel, et démontre ensuite ce théorème, énoncé par Kronecker, qu'en donnant à $u_1, \ldots, u_n$ tous les systèmes possibles de valeurs entières prises dans une classe de nombres algébriques convenablement choisie, on peut toujours éviter l'introduction de ces facteurs communs non essentiels.

Schütz (*Ignaz*). — Solution générale des équations qui définissent l'état magnétique d'un tore. (161-178).

Le problème de la distribution du magnétisme dans un anneau en forme de tore est traité d'abord par l'auteur dans le cas où les forces magnétisantes sont telles que leur potentiel soit uniforme. La solution s'obtient alors assez facilement par des séries, en appliquant des formules dues à C. Neumann, parce qu'on peut faire intervenir le principe de Dirichlet. L'auteur étend ensuite cette solution au cas où le champ magnétique est produit par des courants électriques entourant l'anneau, au moyen d'un artifice qui conduit au but sans calculs. Dans le cas d'un seul courant, faisant un seul tour sur l'anneau, la

solution est donnée sous forme entièrement explicite. L'auteur applique enfin sa méthode au cas d'un solénoïde entourant complètement un anneau, déjà traité par Kirchhoff.

Henneberg (*L.*). — Sur le cas de la Statique dans lequel le moment virtuel possède une valeur négative. (179-185).

Ce cas est celui où les conditions de liaison entre les points du système se traduisent, non seulement par des égalités, mais encore par un certain nombre d'inégalités. Le principe des vitesses virtuelles doit être alors appliqué sous la forme générale donnée par Gauss. L'auteur donne, sous deux formes différentes, les conditions analytiques de l'équilibre qui en résultent. Les résultats sont appliqués à un exemple simple.

Meyer (*A.*). — Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies. (186-206).

L'auteur se propose d'appliquer aux formes quadratiques ternaires indéfinies, de discriminant impair, les méthodes qu'il a employées pour des formes particulières dans un précédent Mémoire (même Journal, t. XCVIII). Il étudie d'abord la transformation de telles formes par une substitution ayant pour déterminant un nombre premier impair; puis il complète les résultats dus à M. Bachmann sur la transformation d'une forme ternaire en elle-même. Les résultats obtenus se décomposent en trop de cas particuliers pour que nous puissions les énoncer sous forme précise.

Bohlmann (*G.*). — Sur l'intégration des équations différentielles du premier ordre à coefficients indéterminés. (207-251).

L'auteur résout le problème suivant :

Trouver toutes les équations différentielles de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{H}(y, \eta_1, \ldots, \eta_s).$$

où $\eta_1, \ldots, \eta_s$ *sont des fonctions de* x indéterminées, *et* H *une fonction déterminée de ses* $s+1$ *arguments, dont l'intégrale générale est donnée par une même formule*

$$\Omega(x, y; u_1, \ldots, u_r) = \text{const.},$$

où $u_1, \ldots, u_r$ *désignent des fonctions de* x *liées aux* η *par des relations différentielles entièrement déterminées.*

Toute équation répondant à la question se ramène, par une transformation $y_1 = \psi(y)$, à une équation linéaire ou à une équation de Riccati. La solution repose sur des considérations préliminaires générales, relatives aux fonctions indéterminées, et sur un résultat de la théorie des groupes de transformations de Lie.

Mandl (*Max*). — Sur la décomposition des fonctions entières, à coefficients entiers, en facteurs irréductibles. (252-261).

L'auteur donne une méthode nouvelle pour trouver les diviseurs irréductibles d'un polynome entier en x, à coefficients entiers. Elle est fondée sur cette remarque qu'on peut faire une transformation $y = x + h$ telle que le polynome transformé et tous ses diviseurs irréductibles aient tous leurs coefficients entiers. La recherche des diviseurs, par la méthode des coefficients indéterminés, se fait alors par tâtonnements, au moyen d'un nombre d'essais limité. L'auteur indique la marche à suivre pour faire les calculs le plus simplement possible, et traite un exemple numérique. La méthode n'est au fond que celle par laquelle Eisenstein a prouvé l'irréductibilité des équations de la division du cercle.

Günther (*Paul*). — Décompositions en fractions simples dans la théorie des fonctions elliptiques. (262-266).

En faisant $u = 0$, K, iK′, K $+ i$K′ dans divers développements en séries de fractions simples de la théorie des fonctions elliptiques, l'auteur obtient des relations entre k, K et iK′. Deux des formules trouvées avaient été déjà données par Kronecker.

Heymann (*W.*). — Théorie des lignes et circuits d'approximation et résolution des équations des quatrième, cinquième et sixième degrés par des fonctions circulaires et hyperboliques. (267-302).

Pour résoudre une équation de la forme $\varphi(x) - \psi(x) = 0$, l'auteur considère les deux courbes $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ et cherche à approcher de l'un de leurs points d'intersection par une ligne brisée dont les côtés sont alternativement parallèles aux deux axes de coordonnées et dont les sommets sont alternativement situés sur l'une et l'autre courbe. Suivant la forme des lignes brisées ainsi obtenues, l'auteur les appelle *An-* ou *Umläufe*. La méthode est appliquée aux équations trinomes et aux équations des quatrième, cinquième et sixième degrés; on simplifie les calculs en faisant intervenir, suivant les cas, des fonctions circulaires ou hyperboliques.

Hensel (*K.*). — Sur la classification des formes quadratiques non homogènes et des surfrces du second ordre. (303-317).

Deux formes $F = a + 2\sum_{k=1}^{n} b_k x_k + \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} x_i x_k$ seront dites *équivalentes,* et définiront des surfaces de la même *classe* quand on les égale à zéro, si elles se transforment l'une dans l'autre, à un facteur constant près, par une substitution linéaire

$$x_i = \alpha_{i,0} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k} \overline{x_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Une telle substitution se décompose en substitutions élémentaires dont l'emploi conduit à $(n+1)(n+2)$ formes réduites, dont deux quelconques ne sont pas équivalentes. L'auteur examine ensuite les relations entre la classification trouvée et la recherche des *centres* des surfaces considérées.

Staude (*O.*). — Sur les axes permanents de rotation dans le mouvement d'un corps solide pesant autour d'un point fixe. (318-334).

Le problème général du mouvement d'un corps solide pesant qui a un point fixe admet toujours, comme le démontre l'auteur, ∞^1 solutions particulières dans lesquelles le mouvement est une rotation uniforme autour de certaines droites du corps. Ces droites, dites *axes permanents de rotation,* sont les génératrices d'un certain cône du second degré, ayant naturellement pour sommet le point fixe. Ce cône passe par les axes principaux d'inertie relatifs au point fixe, et dépend de la position du centre de gravité par rapport à ces axes; pour chaque génératrice, il faut que le mouvement initial soit une rotation instantanée, de vitesse déterminée, autour de cette génératrice placée verticalement, dans un sens déterminé, pour que le corps continue effectivement à tourner autour de cette génératrice avec cette même vitesse de rotation. L'auteur étudie les propriétés géométriques de ce *cône de gravité,* ainsi que les particularités qui se produisent quand il se décompose. Une planche de figures aide à l'explication des résultats.

Wendt (*E.*). — Études arithmétiques sur le dernier théorème de Fermat, qui dit que l'équation $a^n = b^n + c^n$ n'est pas résoluble en nombres entiers, pour $n > 2$. (335-347).

Dans les démonstrations données, pour ce théorème, dans des cas particuliers, on commence par établir que, si la résolution était possible, l'un des trois nombres a, b, c serait divisible par n. L'auteur démontre ce théorème préliminaire par des moyens élémentaires, mais en faisant sur l'entier n des hypothèses assez compliquées. Il ajoute quelques remarques sur le cas général.

Vahlen (*K.-Th.*). — Sur le degré du résultant d'un système d'équations. (348-352).

Les équations considérées

$$f_i(x_1, \ldots, x_m; y_1, y_2, \ldots) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n)$$

contiennent deux séries de variables, les x que l'on élimine, et les y par rapport auxquelles on se propose d'évaluer le *degré* du résultat de l'élimination, qui est en général lui-même un système d'équations entre les y. Cela revient à ajouter assez d'équations linéaires entre les y pour que l'on ait autant d'équations que d'inconnues, et à chercher le nombre de solutions du système total ainsi obtenu. L'auteur supposera donc d'emblée que le système donné contient autant de variables que d'équations, et qu'on connaît le degré de chaque équation séparément par rapport aux x et aux y : il détermine alors le

nombre des solutions. Enfin il donne une application du résultat à la théorie des correspondances.

Sujet proposé par la Société princière de Jablonowski, à Leipzig, pour le prix à décerner en 1897.

Le sujet se rapporte à l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles en involution que fournit la théorie des groupes infinis de transformations de contact.

E. V.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, PUBLIÉ PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION DE CET ÉTABLISSEMENT.

IIe série, Cahier II; 1897 (1).

Laurent. — Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre. (1-18).

L'auteur se propose, dans ce Mémoire, d'étudier l'effet du changement de variable sur les expressions différentielles du premier ordre et du premier degré t d'en faire quelques applications aux équations différentielles.

Il commence par rappeler la solution du problème de Pfaff, qui intervient constamment dans son étude.

Si l'on considère une première expression différentielle

$$(1) \qquad du = a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + \ldots + a_n\,dx_n,$$

dans laquelle les a sont des fonctions données des variables x_i, et une seconde expression analogue

$$(2) \qquad b_1\,dy_1 + b_2\,dy_2 + \ldots + b_n\,dy_n,$$

où les b_i sont des fonctions données des y_i, on peut en général transformer ces deux expressions l'une dans l'autre par un changement de variables approprié; les cas d'exception sont signalés et discutés.

Cela posé, on passe à un système de $n-1$ équations différentielles telles que celle que l'on obtient en égalant à zéro l'expression (1)

$$(3) \quad du_i = a_{i1}\,dx_1 + a_{i2}\,dx_2 + \ldots + a_{in}\,dx_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

On aura intégré ce système si l'on trouve une substitution capable de faire disparaître une même différentielle dy_j à la fois de du_1, de du_2, ... et de du_{n-1}.

(1) Voir *Bulletin*, t. XXV_2, p. 212.

Par la considération des substitutions infinitésimales, il est prouvé que :

Étant données $n-1$ expressions différentielles à n variables, telles que (3), *on peut toujours les combiner linéairement de manière à obtenir $n-1$ nouvelles expressions différentielles admettant une même substitution.*

L'auteur indique en terminant un cas où le problème de Pfaff est susceptible de se simplifier. C'est le cas où l'expression (1) qu'il s'agit de transformer admet une substitution infinitésimale.

Godefroy (*René*). — Détermination des rayons de courbure successifs de certaines courbes. (19-50).

Le problème de la détermination des rayons de courbure d'une courbe plane et de ses dérivées successives, relatifs à un point de cette courbe, est susceptible d'une solution générale dans divers cas, parmi lesquels l'auteur étudie le suivant :

Une courbe est supposée telle que son premier rayon de courbure soit une fonction connue

$$r_1 = f_1(u, v)$$

des distances u et v d'un pôle fixe O à la tangente et à la normale au point considéré. La fonction f_1 est positive ou négative suivant que le pôle et le centre de courbure sont d'un même côté ou de part et d'autre de la tangente.

Voici les deux règles qui résolvent le problème :

1° Les rayons de courbure successifs de la courbe s'expriment en fonction de u et de v. Un rayon de courbure quelconque r_{i+1} est représenté par la différentielle totale de l'expression $f_i(u, v)$ du précédent, dans laquelle du et dv sont remplacés respectivement par v et $f_1(u, v) - u$.

2° Les rayons de courbure étant ainsi calculés et le premier étant dirigé dans le sens qu'indique la concavité de la courbe, le contour des rayons de courbure successifs est tel qu'un mobile qui le décrit, à partir de la courbe, change de direction à chaque saillant, dans le sens OPMQ si les deux rayons qui s'y croisent sont de même signe, dans le sens OQMP s'ils sont de signe contraire. (Dans cet énoncé, M est le point considéré de la courbe, P et Q sont les projections du pôle O sur la tangente et sur la normale en M.)

Ces résultats sont appliqués aux coniques à centre, puis aux courbes représentées par l'équation polaire

$$r^k = a^k \sin k\theta,$$

parmi lesquelles figurent l'hyperbole équilatère ($k = -2$), la parabole $\left(k = -\frac{1}{2}\right)$, la spirale logarithmique ($k = 0$).

La considération des rayons de courbure successifs est intimement liée à la théorie du contact des courbes planes en vertu du théorème que voici :

Pour que deux courbes aient un contact d'ordre λ, c'est-à-dire aient $\lambda + 1$ points d'intersection confondus en un seul, il faut et il suffit que $\lambda - 1$ premiers centres de courbure correspondants coïncident.

Le Mémoire se termine par des applications de ce théorème aux contacts d'une conique avec diverses courbes remarquables.

Autonne (*Léon*). — Sur l'équation différentielle du premier ordre et sur les singularités de ses intégrales algébriques. (51-169).

Ce Mémoire, dont le présent Cahier ne contient que la première Partie, fait suite à ceux que l'auteur a publiés sur l'intégration algébrique de l'équation du premier ordre dans les Cahiers LXI, LXII, LXIII et LXIV du *Journal de l'École Polytechnique*.

On sait que M. Autonne représente l'équation H

$$h(\xi, \eta, p) = 0, \qquad p = \frac{d\eta}{d\xi}$$

par une surface $\mathcal{F}$ dont les coordonnées x, y, z sont liées à ξ, η et p par une correspondance birationnelle, de sorte qu'il y a équivalence entre la discussion de l'allure des intégrantes algébriques aux abords du point (x_0, y_0, z_0) de $\mathcal{F}$ et celle de l'allure des intégrales algébriques aux abords de l'élément $e_0(\xi_0, \eta_0, p_0)$ de H. C'est précisément cette discussion qui remplit la première Partie du Mémoire actuel. Voici comment l'auteur la résume :

« Le cas le plus compliqué et le seul à considérer est celui où, pour l'élément e_0,

$$0 = h = \frac{\partial h}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial \xi} + p\frac{\partial h}{\partial \eta}.$$

Briot et Bouquet, dans leur Mémoire classique du XXXVIe Cahier de ce *Journal*, ont fixé les traits principaux de la solution. Dans leur analyse, qui a servi de canevas aux publications plus récentes, on peut distinguer trois phases successives :

» *Première phase.* — Ramener la question à l'étude de plusieurs équations de la forme

$$(\mathrm{P}) \qquad \frac{dv}{du} = \frac{\mathrm{V}(u, v)}{\mathrm{U}(u, v)},$$

V et U étant des développements holomorphes, avec

$$\mathrm{V}(0, 0) = \mathrm{U}(0, 0) = 0.$$

» *Deuxième phase.* — Ramener (P) à la forme *réduite*

$$(\mathrm{W}_m) \qquad t^m \frac{dw}{dt} = f(w, t),$$

m étant un entier positif et f holomorphe.

» *Troisième phase.* — Intégrer (W_m).

» La première phase a été traitée par Briot et Bouquet aux pages 193 à 196 du XXXVIe Cahier de ce *Journal*. Leur analyse ne saurait être considérée

comme complète; j'en fais, au Chapitre X de ce Mémoire, un examen détaillé; mais voici la lacune la plus importante :

» *Il n'est ni évident, ni démontré qu'on puisse parvenir à l'équation* (P) *par un nombre fini et limité d'opérations.*

» La seconde phase a été traitée par Briot et Bouquet au n° III, page 161 de leur Travail sous ce titre : *Cas où le coefficient différentiel se présente sous la forme* $\frac{0}{0}$. L'analyse n'est encore pas péremptoire; notamment la méthode géométrique de la page 162 est incomplète.

» La troisième phase a été traitée par Briot et Bouquet et aussi, pour W_1, par MM. Poincaré et Picard, dans des publications assez récentes et bien connues. Ces deux géomètres semblent avoir épuisé le cas de W_1, mais W_m n'a pas encore été, au moins à ma connaissance, étudiée bien à fond.

» Les sept premiers Chapitres de ma première Partie se rapportent à la première phase. On s'y attache principalement à établir que cette phase peut être franchie, autant du moins qu'il s'agit des seules intégrales algébriques, par un nombre fini et limité d'opérations. Tout se réduit à séparer les divers développements en série.

» Les Chapitres VIII et IX se réfèrent à la seconde phase; on parvient à l'équation W_1 et exceptionnellement à W_m.

» Quant à la troisième phase, je n'ajoute rien d'essentiel aux théories de MM. Poincaré et Picard, lesquelles suffisent pour mon objet spécial. Le cas W_m, quand il se rencontre, laisse dans le doute l'existence de certaines intégrales ou intégrantes; mais cette particularité n'exerce aucune influence fâcheuse, puisqu'il s'agit, non de construire effectivement l'intégrale algébrique, mais de limiter son degré. »

Cahier III; 1897.

Autonne (*Léon*). — Sur l'équation différentielle du premier ordre et sur les singularités de ses intégrales algébriques (*suite et fin*). (1-74).

On vient de lire l'analyse de la première Partie de ce Mémoire.

La seconde Partie contient divers exemples où les méthodes exposées dans la première Partie sont appliquées à des singularités relativement simples de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire de H. La surface $\mathcal{F}$ étant donnée par l'équation en coordonnées homogènes

$$\mathcal{F}(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0,$$

on considère les six déterminants de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_2} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_3} & \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_4} \\ z_2 & -z_1 & -z_4 & z_3 \end{matrix} \right\|.$$

Un *pivot* est tout point de $\mathcal{F}$ où ces six déterminants s'évanouissent. Les

pivots (dont la définition est projective) sont les seuls points par lesquels puisse passer plus d'une intégrante G située sur $\mathcal{F}$.

Dans le Chapitre XI, l'auteur discute d'une façon complète un pivot défini par les conditions suivantes : une au moins des dérivées partielles du second ordre

$$p_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_i \, \partial z_j}$$

ne s'évanouit pas au pivot et les dérivées troisièmes ont en ce point des valeurs *quelconques,* sans aucune relation particulière, soit entre elles, soit avec les p_{ij}. Les allures des intégrantes sont surtout influencées par la nature de la quadrique T dont l'équation est

$$\sum_i \sum_j p_{ij} t_i t_j = 0.$$

les t désignant les coordonnées courantes. Les pivots ainsi définis appartiennent à quatorze types différents, douze de la première catégorie, deux de la seconde.

On trouve (Chap. XII) que, pour les douze premiers (pivots de la première catégorie), l'intégrante G située sur $\mathcal{F}$ et algébrique possède au pivot un point simple, ou double ou triple, à tangentes séparées, ou un point de rebroussement ordinaire.

Les pivots de la seconde catégorie sont étudiées au Chapitre XIII.

Dans la troisième Partie, M. Autonne introduit la notion d'*équivalents :* chaque singularité de $\mathcal{F}$ intervient dans la limitation du degré n de l'intégrale algébrique par un nombre, qui est appelé son *équivalent.* Au préalable, il établit (Chap. XIV) une relation entre le degré et le rang de l'intégrante algébrique, située sur une surface algébrique.

Au Chapitre XV est donnée la définition de l'équivalent ε d'un pivot et l'auteur enseigne à calculer ε pour chaque point multiple à singularité donnée.

Le Mémoire se termine (Chap. XVI) par le calcul effectif de ε pour les quatorze types de pivots étudiés dans la deuxième Partie : il ressort de cette étude que les douze premiers types ne jouent aucun rôle dans la limitation de n, leur équivalent étant nul.

Goursat (*E.*). — Recherches sur les systèmes en involution d'équations du second ordre. (75-130).

M. Goursat dit, avec M. S. Lie, que deux équations aux dérivées partielles du second ordre à une seule fonction inconnue et à deux variables indépendantes forment un *système en involution* si les quatre équations du troisième ordre qu'on en déduit par différentiation se réduisent à trois et conséquemment ne déterminent pas les quatre dérivées troisièmes. L'objet principal de son travail est d'étendre à ces systèmes en involution la théorie de l'intégrale complète de Lagrange.

Dans une première Partie, l'auteur traite le cas où le système est *linéaire* par rapport aux dérivées secondes r, s, t. On voit tout de suite qu'il est possible de former une série entière, *dépendant d'une infinité de constantes arbitraires,* qui satisfait au système proposé; mais on peut démontrer l'exis-

tence des intégrales par la méthode même qui sert à les obtenir, et qui est fondée sur l'emploi des multiplicités caractéristiques. On obtient ainsi, pour l'intégrale générale d'un système linéaire en involution, des formules où figurent explicitement une *fonction arbitraire d'un paramètre et ses dérivées en nombre fini.*

La réciproque n'est pas vraie : un système de deux équations du second ordre peut admettre une intégrale dépendant d'une fonction arbitraire, sans être en involution : tel est le cas du système bien connu

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2},$$

qui caractérise les surfaces dont tous les points sont des ombilics et qui n'est pas un système en involution, bien qu'il admette toutes les intégrales de l'équation du premier ordre

$$1 + p^2 + q^2 = 0,$$

lesquelles dépendent d'une fonction arbitraire (développables isotropes).

Ce qui caractérise les systèmes en involution, c'est que, par une courbe quelconque n'occupant pas de position particulière, on peut, en général, faire passer une infinité d'intégrales dépendant d'une constante arbitraire.

Ces résultats sont appliqués à trois exemples : l'un est le système en involution qui exprime que les deux rayons de courbure principaux d'une surface ont la même longueur constante (surfaces enveloppe d'une sphère de rayon constant dont le centre décrit une courbe de longueur nulle); le second est le système homogène

$$r + \lambda s = 0,$$
$$s + \lambda t = 0,$$

qui définit une famille de développables; le troisième est le système plus général

$$r + \lambda s + ap + bq + cz + d = 0,$$
$$s + \lambda t + \alpha p + \beta q + \gamma z + \delta = 0,$$

où les coefficients λ, a, b, c, d, α, β, γ, δ ne dépendent que des variables x et y.

M. Goursat considère, dans la deuxième Partie de son Mémoire, un système de deux équations du second ordre de forme quelconque supposé en involution : il démontre que, si deux intégrales de ce système ont un élément commun du second ordre, elles ont en commun une infinité d'éléments du second ordre qui constituent la caractéristique issue de cet élément. Supposant déterminées les multiplicités caractéristiques, l'auteur enseigne à les associer de manière à obtenir les surfaces intégrales. On reconnaît ainsi que, par une courbe *quelconque,* il passe en général une infinité de surfaces intégrales dépendant d'une constante arbitraire. Enfin il est démontré que :

Toute surface intégrale est l'enveloppe d'une famille d'intégrales complètes (surfaces à quatre paramètres qui ne satisfont à aucune équation du second ordre indépendante du système en involution), chaque intégrale complète ayant un contact du *second ordre* avec la surface enveloppe le long de la caractéristique.

Dans la troisième Partie, M. Goursat recherche quelle doit être la forme

d'une équation du type

$$F(x, y, z, a_1, a_2, a_3, a_4) = 0$$

pour que les deux équations du second ordre qu'on en déduit par différentiation constituent un système en involution. La solution de cette question lui fournit le moyen de former et d'intégrer tous les systèmes en involution non linéaires.

Au début de la quatrième Partie, la méthode de M. Darboux pour intégrer les équations du second ordre est retrouvée par une voie nouvelle, dans le cas où l'équation qu'on associe à la proposée est aussi du second ordre. En particulier, si l'équation proposée est une équation linéaire en $r, s, t, rt - s^2$ (équation de Monge-Ampère), comme celles qui se présentent dans un grand nombre de problèmes d'Analyse et de Géométrie, toutes les fois qu'on peut lui associer une équation du second ordre formant avec elle un système en involution, *ce système est forcement linéaire,* ce qui donne une grande portée aux résultats de la première Partie.

Le Mémoire se termine par un rapprochement entre les systèmes en involution et les équations de Monge de la forme

$$F(x, y, z, y', z', y'', z'') = 0,$$

où y et z sont des fonctions inconnues de x, y', z', y'', z'', leurs dérivées premières et secondes, qu'il s'agit d'*intégrer* en exprimant x, y et z en fonctions d'un paramètre α, d'une fonction arbitraire $\varphi(\alpha)$ et de ses dérivées jusqu'à un ordre fini.

Lecornu (*L.*). — Sur le rendement des engrenages. (131-151).

Mayer (*Daniel E.*). — Théorèmes relatifs à la probabilité du jeu et application au calcul d'intégrales définies. (153-168).

Cahier IV; 1898.

Boulanger (*A.*). — Contribution à l'étude des équations différentielles linéaires homogènes intégrables algébriquement. (1-122).

Le problème de l'intégration algébrique de l'équation linéaire et homogène du second ordre a donné lieu à de nombreux et importants travaux. On sait que M. Klein l'a rattaché à la détermination des groupes linéaires d'ordre fini à deux variables. Un peu plus tard, M. Camille Jordan, étendant les vues de M. Klein aux équations linéaires et homogènes du troisième ordre, a donné la première énumération des groupes linéaires d'ordre fini à trois variables. Mais il ne s'est point occupé de former les équations différentielles linéaires qui

correspondent à ces divers groupes. Il y avait donc lieu de se poser les questions suivantes :

1° Former toutes les équations du troisième ordre

$$y''' + 3ay'' + 3by' + cy = 0 \tag{I}$$

à coefficients rationnels en x et tous les systèmes complètement intégrables

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} &= a'\frac{\partial z}{\partial x} + b'\frac{\partial z}{\partial y} + c'z, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= a''\frac{\partial z}{\partial x} + b''\frac{\partial z}{\partial y} + c''z, \end{aligned}\right. \tag{II}$$

à coefficients rationnels en x et y, dont l'intégrale générale est algébrique.

2° Étant donnée une équation de la forme (I), ou bien un système de la forme (II), reconnaître si son intégrale générale est algébrique.

C'est à l'étude de ces deux questions qu'est consacré le Mémoire de M. Boulanger. Pour résoudre la première question, M. Painlevé a indiqué une méthode qui généralise celle de M. Klein : elle est fondée sur l'emploi de certains invariants analogues à l'invariant schwartzien, et que MM. Goursat et Liouville avaient rencontrés à propos du système (II); en même temps s'introduisent des systèmes différentiels (Σ) attachés, comme ces invariants, à chaque groupe linéaire d'ordre fini. Il fallait, avant tout, calculer explicitement ces invariants et ces systèmes (Σ); cette recherche présentait des difficultés que l'auteur a surmontées dans le cas du groupe de Hesse : la première Partie de son Mémoire est formée par cette détermination préliminaire.

La seconde Partie traite de la première des deux questions formulées plus haut. Après quelques généralités sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles de la forme (II), l'auteur expose la formation de tous ceux de ces systèmes qui sont intégrables algébriquement et se rattachent au groupe de Hesse. Il aborde ensuite l'équation différentielle et homogène du troisième ordre par la méthode de M. Painlevé et forme toutes les équations de cette espèce qui ont leurs coefficients rationnels et sont intégrables algébriquement.

La seconde question est traitée dans la troisième Partie du Mémoire. Pour la résoudre, M. Painlevé a donné une méthode que l'auteur développe, et il a indiqué qu'on pourrait chercher à employer dans ce but sa première méthode, ce qui constituerait une généralisation complète de la méthode suivie par M. Klein dans le cas de l'équation linéaire du second ordre. Tout revient, dans cet ordre d'idées, à déterminer une limite supérieure du degré de certaines fractions rationnelles qui doivent satisfaire à un système différentiel (Σ). M. Boulanger a surmonté cette difficulté et il est parvenu à déterminer la limite en question par un procédé qui peut être étendu à un groupe linéaire quelconque. A la fin de son Travail, il développe une indication de M. Painlevé sur l'équivalence, au point de vue de l'intégration, entre certains systèmes différentiels qu'il a rencontrés et d'autres systèmes différentiels qui généralisent l'équation de Riccati.

Collignon (*Ed.*). — Note sur la détermination de l'heure du passage du Soleil dans un plan vertical. (123-135).

Rabut. — Théorie des invariants universels. Application au groupe ponctuel et au groupe de contact dans l'espace à deux dimensions. (137-203).

Voici quelques extraits du Chapitre premier, qui feront bien comprendre l'objet que s'est proposé l'auteur dans ces recherches :

« La notion toute moderne des invariants d'un groupe de transformations a son origine dans la Géométrie, et il est remarquable qu'en passant du domaine propre de cette Science dans celui de l'Analyse, où elle a trouvé ses plus belles applications, cette notion ait perdu beaucoup de sa généralité. Pour le géomètre, en effet, l'invariant d'un groupe peut se concevoir d'emblée comme une combinaison quelconque des éléments d'une figure, dont la valeur reste la même après une transformation quelconque appartenant au groupe considéré, la définition de ce groupe demeurant elle-même exempte de toute restriction; pour l'analyste, le même mot ne répond, dans l'état actuel de la Science, qu'à deux catégories d'êtres algébriques infiniment plus restreintes et fort différentes entre elles, savoir : les invariants des fonctions entières et les invariants dits *différentiels*. Géométriquement, ces deux conceptions sont incomplètes à divers égards; d'une part, en effet, la théorie des formes n'envisage qu'un groupe très particulier, celui des transformations linéaires, et qu'une famille de figures, celle des figures algébriques; d'autre part, la théorie des invariants différentiels n'admet à figurer dans un invariant que les coordonnées et les coefficients différentiels d'un seul élément de ligne ou de surface. Il est évident que cet élément unique ne peut suffire à caractériser une figure, même au voisinage d'un point : celle-ci peut comporter, en ce point même, un nombre quelconque d'éléments linéaires et superficiels possédant chacun ses coefficients différentiels propres et formant ce que nous appellerons un *faisceau* élémentaire; en outre, on peut considérer, en divers points de la figure, des faisceaux entièrement indépendants. En définitive, la conception la plus générale d'une figure doit embrasser une multiplicité indéfinie d'éléments de lignes et de surfaces, distribués dans l'espace d'une manière quelconque et caractérisés chacun par ses coordonnées et coefficients différentiels propres; il doit même être entendu que ces éléments infinitésimaux peuvent être isolés ou former des successions continues définies par des lois quelconques. Si, adoptant ce point de vue, on s'abstient de particulariser la loi de transformation, on aboutit aux définitions suivantes. Une *transformation* sera définie par un système de relations quelconques entre deux multiplicités d'éléments géométriques infinitésimaux appartenant, l'une à la figure primitive, l'autre à la figure transformée, étant entendu, d'une part, que ces deux multiplicités ne sont pas nécessairement formées d'éléments similaires, ni en nombre égal, et, d'autre part, que les relations établies entre elles sont en nombre quelconque, qu'elles contiennent les coordonnées et coefficients différentiels des éléments jusqu'à un ordre arbitraire, non limité; enfin qu'elles peuvent se traduire, soit par des équations en termes finis, soit par des équations différentielles. Elles ne définissent toutefois une transformation unique que si les coefficients différentiels des éléments de la figure transformée y font

défaut. De même, on appellera *invariant* d'une transformation toute fonction des coordonnées et coefficients différentiels d'une multiplicité d'éléments géométriques infinitésimaux entièrement arbitraires, dont la valeur n'est pas altérée par cette transformation.

» Pour distinguer les transformations et les invariants ainsi définis des transformations et des invariants envisagés jusqu'à ce jour dans l'Analyse mathématique, et pour caractériser le but de leur création, qui est de donner à ces conceptions le maximum de généralité dont elles sont susceptibles, nous leur attribuerons l'épithète d'*universels*.

» Il ne paraît pas qu'on ait étudié jusqu'à ce jour d'autres transformations que celles qui peuvent se définir par des relations entre un élément unique de la figure primitive et un élément unique de la figure transformée : ces transformations ne forment cependant qu'un groupe particulier parmi celles qui entrent dans la première des deux définitions ci-dessus....

» Ainsi, tandis qu'une transformation ponctuelle à élément unique ou *uniponctuelle* est définie, dans l'espace à deux dimensions, par deux équations en termes finis entre les coordonnées d'un point de la figure primitive et d'un point de la figure transformée, une transformation ponctuelle à plusieurs éléments, ou *pluriponctuelle*, est définie par $2P$ équations en termes finis entre les coordonnées de p points de la figure et de P points de la figure transformée. Si $P = p$, l'ensemble des transformations répondant à une valeur de p forme un groupe....

» Parmi les groupes de transformations, ponctuelles ou non, à deux éléments linéaires, figure celui où l'angle des deux éléments est conservé, généralisation du groupe isogonal uniponctuel, seul envisagé jusqu'ici.

» L'introduction d'éléments infinitésimaux multiples et indépendants dans les expressions invariantes, qui motive la dénomination d'*invariants universels* appliquée à ces éléments, ne paraît pas non plus avoir été réalisée jusqu'à présent.

L'intérêt qu'elle présente résulte de ce que les invariants ainsi formés ne sont pas réductibles aux invariants différentiels intéressant un élément unique. Ainsi, dans le groupe isogonal, une paire quelconque d'éléments possède, par définition même, en coordonnées rectangulaires, l'invariant absolu

$$\frac{y'_1 - y'_2}{1 + y'_1 y'_2},$$

bien que y' ne soit pas un invariant pour chaque élément, hors du sous-groupe parallèle.

» Dans le groupe projectif, qui n'admet pas d'invariant absolu, à élément unique, d'ordre inférieur au septième, tout faisceau élémentaire de quatre branches possède évidemment l'invariant absolu à quatre éléments

$$\frac{(y'_1 - y'_2)(y'_3 - y'_4)}{(y'_1 - y'_3)(y'_2 - y'_4)},$$

qui représente le rapport anharmonique déterminé par les directions des quatre éléments....

» Si, au lieu d'une homographie, on opère la corrélation

$$X = y', \qquad Y = xy' - y$$

on trouve que les expressions

$$\frac{(y''_1+y''_2)(y''_3+y''_4)}{(y''_1+y''_3)(y''_2+y''_4)},\quad \frac{(y''_1+y''_2)(y''_3-y''_4)}{(y''_1+y''_3)(y''_2-y''_4)},\quad \frac{(y''_1-y''_2)(y''_3-y''_4)}{(y''_1-y''_3)(y''_2-y''_4)},$$

relatives à un faisceau de quatre éléments ayant même tangente, sont des invariants corrélatifs absolus. Le troisième de ces invariants est le rapport anharmonique des centres de courbure des quatre branches; on reconnaît aisément qu'il appartient à toute transformation de contact. »

Le Chapitre II contient la théorie des invariants ponctuels; le Chapitre III celle des invariants de contact.

Ocagne (*M. d'*). — Nomographie. Une leçon sur les diagrammes cotés ou abaques. (205-225).

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

3e série, t. XVII; 1900 (1).

Cotton (*Ém.*). — Sur quelques mouvements à plusieurs paramètres et sur la théorie des vis principales d'inertie. (8-20).

Un *torseur* est l'ensemble d'un vecteur et d'un couple dont le plan est perpendiculaire au vecteur; une *vis* est un torseur dont la résultante de translation est égale à l'unité.

A chaque position d'un corps solide doué de n degrés de liberté est attaché un système de vis à n termes. Pour tout mouvement infiniment petit du solide, à partir de la position considérée, on obtient la vitesse d'entraînement d'un point quelconque du corps en prenant le moment, par rapport à ce point, de l'un des torseurs auxquels correspondent les vis du système.

Le double objet du Mémoire de M. Cotton est :

1° De déterminer les mouvements à plusieurs paramètres pour lesquels le *système* des vis instantanées est *fixe* par rapport au trièdre mobile;

2° De déterminer dans quelles conditions les *vis principales d'inertie* d'un corps solide sont fixes par rapport à ce corps (problème posé par M. Kœnigs dans les *Leçons de Cinématique*, p. 457).

Bachelier (*L.*). — Théorie de la spéculation. (21-86).

Méray. — Lettre au Comité de rédaction. (87-88).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XXV_2, p. 120.

Hancock (*H.*). — Méthode de décomposition des polynomes entiers à plusieurs variables en facteurs irréductibles. (89-102).

L'auteur se propose d'étendre au cas de plusieurs variables la méthode donnée par M. Max Mandl (*Journal de Crelle*, t. 113, p. 252) pour décomposer en facteurs irréductibles un polynome entier à une variable, à coefficients *entiers*.

Il montre d'abord comment un polynome entier à k variables et à coefficients entiers peut être transformé en un autre dépendant de k nouvelles variables et ne contenant que des coefficients entiers et *tous positifs*.

Cela fait, on peut appliquer la méthode de Mandl, en s'appuyant sur ce théorème établi par Gauss dans ses *Disquisitiones arithmeticæ :*

Si un polynome entier en x_1, dont les coefficients sont des polynomes entiers en $x_2, x_3, \ldots, x_k$ est décomposable en deux facteurs qui sont entiers en x_1 et à coefficients rationnels en $x_2, x_3, \ldots, x_k$, il est aussi décomposable en deux facteurs qui sont entiers par rapport à tous les x.

Hilbert (*D.*). — Les principes fondamentaux de la Géométrie. (103-209).

Festschrift publiée à l'occasion des fêtes pour l'inauguration du monument de Gauss et Weber à Gœttingue. Cet Opuscule, publié par les soins du Comité des fêtes (Leipzig, Teubner; 1899), est traduit par M. L. Laugel. Il débute par l'introduction que voici :

« La Géométrie, de même que l'Arithmétique, n'exige pour sa construction logique qu'un petit nombre de principes fondamentaux simples. Ces principes fondamentaux sont dits les *axiomes* de la Géométrie. L'exposition de ces axiomes et leur examen approfondi sont un problème qui, depuis Euclide, a fait l'objet de nombreux Mémoires remarquables de la Science mathématique. Ce problème revient à l'analyse logique de notre intuition de l'espace.

» La recherche qui suit est un nouvel essai dont le but est d'établir la Géométrie sur un système *simple* et *complet* d'axiomes *indépendants* et de déduire de ceux-ci les principaux théorèmes géométriques, de telle sorte que le rôle des divers groupes d'axiomes et la portée des conclusions que l'on tire des axiomes individuels soient mis en pleine lumière autant qu'il est possible. »

Cotton (*Ém.*). — Sur les invariants différentiels de quelques équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. (211-244).

On considère une fonction u de n variables x, et l'on désigne par $\mathcal{F}(u)$ une expression de la forme suivante

$$\mathcal{F}(u) = \sum_{ij} B_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \sum_k C_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + D u,$$

dont les coefficients peuvent dépendre des variables; mais le déterminant des n^2 coefficients B_{ij} est supposé n'être pas identiquement nul.

Soit $\mathcal{F}'(u')$ une expression analogue, relative à une fonction u', dépendant des n variables x'.

M. Cotton pose et résout les trois problèmes suivants :

I. *Les expressions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}'(u')$ étant données, chercher un changement de variables exprimant les x en fonction des x' et donnant lieu aux identités*

$$u = u', \qquad \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}'(u').$$

II. *Les expressions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}'(u')$ étant données, chercher un changement de variables et une fonction λ des variables x donnant lieu aux identités*

$$\lambda u = u', \qquad \frac{\mathcal{F}(\lambda u)}{\lambda} = \mathcal{F}'(u').$$

III. *Les expressions $\mathcal{F}(u)$, $\mathcal{F}'(u')$ étant données, chercher un changement de variables et deux fonctions ρ, λ des variables x donnant lieu aux identités*

$$\lambda u = u', \qquad \rho \frac{\mathcal{F}(\lambda u)}{\lambda} = \mathcal{F}'(u').$$

Ces problèmes reviennent à la détermination de certains invariants différentiels des expressions $\mathcal{F}(u)$. L'auteur ramène cette détermination à la recherche des invariants différentiels du système formé par une variété (x, ds^2) et certaines fonctions des variables x et de leurs différentielles : le principe de cette réduction consiste à considérer l'ensemble des termes du second ordre de $\mathcal{F}(u)$ comme le commencement du développement d'un paramètre différentiel du second ordre, ce qui détermine complètement la variété (x, ds^2) attachée à l'expression $\mathcal{F}(u)$.

Les systèmes différentiels dont dépend la solution des problèmes posés ne diffèrent, ainsi que le montre M. Cotton, de ceux qui interviennent dans l'application ou la représentation conforme de deux variétés que par l'adjonction d'équations nouvelles. D'ailleurs cette adjonction facilite, en général, l'étude des systèmes différentiels; de sorte que, grâce aux résultats que l'on connaît sur les variétés à deux et à trois dimensions, les trois problèmes énoncés ci-dessus peuvent être considérés comme résolus dans les deux cas, particulièrement importants, où le nombre des variables x est deux ou trois.

La méthode suivie par l'auteur s'applique à la recherche des transformations I, II, III qui laissent invariante une expression donnée $\mathcal{F}(u)$. Il suffit, en effet, de prendre pour $\mathcal{F}'(u')$ l'expression qu'on déduit de $\mathcal{F}(x)$ en remplaçant partout x par x'. Les problèmes I, II, III ainsi énoncés sont toujours possibles, et les équations du changement de variables propre à chacun d'eux sont alors celles d'un groupe G toujours fini (à une exception bien connue près) et, en général, discontinu.

M. Cotton a donc été amené à classer à part les expressions $\mathcal{F}(u)$ telles que le groupe G soit continu. Il indique une méthode pour construire des types canoniques correspondant à ces classes remarquables : en effectuant cette construction dans le cas de deux variables, il retrouve et complète des résultats dus à M. Sophus Lie.

Kapteyn (*W.*). — Sur quelques cas particuliers de l'équation différentielle de Monge. (245-282).

Ce Mémoire, relatif aux équations aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes et linéaires par rapport aux dérivées secondes, est divisé en deux Parties.

Dans la première Partie, l'auteur détermine les équations de la forme

$$s + \lambda t + \mu = 0$$

qui possèdent *deux intégrales intermédiaires*. Il démontre qu'on obtient la solution la plus générale du problème en prenant

$$\lambda = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial q}(p\rho + \upsilon), \qquad \mu = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{H}(p\rho + \upsilon),$$

H désignant le symbole opératif

$$\frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z},$$

ρ une fonction arbitraire de x, y, z, q et υ l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial q}\frac{\partial\upsilon}{\partial y} + \left(1 + \frac{q}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial q}\right)\frac{\partial\upsilon}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y} + q\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\frac{\partial\upsilon}{\partial q} = \frac{\partial\rho}{\partial x}.$$

Dans le cas particulier où μ est nul, les résultats se simplifient. L'équation la plus générale du type $s + \lambda t = 0$ qui admet deux intégrales intermédiaires peut s'écrire

$$\frac{d}{dy}\left(p\frac{\partial\sigma}{\partial u} + \frac{\partial\sigma}{\partial x}\right) = 0,$$

σ désignant une fonction arbitraire de x, q et $u = z - qy$. Les deux intégrales intermédiaires sont

$$p\frac{\partial\sigma}{\partial u} + \frac{\partial\sigma}{\partial x} = f(x), \qquad y\frac{\partial\sigma}{\partial u} - \frac{\partial\sigma}{\partial q} = \varphi(q).$$

Dans le cas particulier où λ est nul, l'équation $\sigma + \mu = 0$, qui admet deux intégrales intermédiaires, peut s'écrire

$$\frac{d^2\sigma}{dx\,du} = 0,$$

σ étant une fonction arbitraire de x, y et z. Les deux intégrales intermédiaires sont

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} + p\frac{\partial\sigma}{\partial z} = f(x), \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial y} + q\frac{\partial\sigma}{\partial z} = \varphi(y).$$

La seconde Partie du Mémoire traite de l'équation

$$r - \lambda^2 t = 0.$$

Après avoir déterminé la forme analytique de λ qui assure l'existence de deux intégrales intermédiaires et calculé ces intégrales elles-mêmes, M. Kapteyn étudie en particulier les deux cas où λ est indépendant de x, y, z et celui où

il est indépendant de p et q. Il termine par quelques indications sur l'équation

$$t + \lambda = 0,$$

qui admet deux intégrales intermédiaires pourvu que λ ne dépende que de x, y, z et q.

Lacour. — Formules elliptiques pour l'étude des mouvements de Poinsot. (282-294).

L'auteur retrouve les formules pour la rotation d'un corps solide, exprimées à l'aide des fonctions de Weierstrass; il reprend, en particulier, dans ce système de notations, l'une des méthodes indiquées par M. Hermite pour calculer les cosinus des angles que font, avec les axes fixes, les axes liés au corps.

Estanave. — Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire mince. (295-358).

Ce Travail, présenté comme Thèse de Doctorat à la Faculté des Sciences de Paris, a été analysé dans la première Partie du *Bulletin*.

Davidoglou. — Sur l'équation des vibrations transversales des verges élastiques. (359-444).

Ce Mémoire, présenté comme Thèse de Doctorat à la Faculté des Sciences de Paris, a été analysé dans la première Partie du *Bulletin*.

Delassus. — Sur les systèmes articulés gauches. (445-499).

Lecornu (L.). — Sur l'équilibre d'une enveloppe ellipsoïdale soumise à une pression intérieure uniforme. (501-539).

Dans un Mémoire inséré en 1880 au *Journal de l'École Polytechnique*, l'auteur a étudié les conditions d'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles, sollicitées par des forces quelconques. Les tensions qu'éprouvent de pareilles surfaces sont régies par un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, dont l'intégration introduit nécessairement des fonctions arbitraires. Si l'on considère seulement *une portion de surface* dont le *contour* est maintenu *fixe*, il est impossible de déterminer complètement ces fonctions arbitraires : l'état d'équilibre présente alors une indétermination analogue à celle qu'on rencontre en cherchant les réactions éprouvées par un solide invariable, appuyé en plus de trois points. Mais, quand il s'agit d'une *surface fermée*, il semble probable *a priori* que la connaissance des forces directement appliquées doit déterminer l'état d'équilibre. Effectivement, M. Lecornu, dans son Mémoire de 1880, a examiné l'équilibre d'un *ellipsoïde de révolution*, soumis à une pression intérieure uniforme, et il a démontré que les fonctions arbitraires se trouvent, dans ce cas, déterminées par la seule condition que *les forces de tension ne soient infinies en aucun point* de la surface.

Son travail actuel a pour but de rechercher s'il en est encore de même dans

le cas, beaucoup plus compliqué, de l'*ellipsoïde à trois axes inégaux*. Il y est fait constamment usage des coordonnées elliptiques u et v, en fonction desquelles les coordonnées de la surface sont représentées par les formules

$$x^2 = \frac{a^2(a^2-u)(a^2-v)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2 = \frac{b^2(b^2-u)(b^2-v)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$

$$z^2 = \frac{c^2(c^2-u)(c^2-v)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

On suppose $a > b > c$ et, par suite,

$$a^2 > u > b^2 > v > c^2.$$

Si n_1 et n_2 sont les tensions superficielles, rapportées à l'unité de longueur, qui s'exercent normalement aux éléments des lignes de courbure et t la tension, rapportée à l'unité de longueur, qui agit suivant ces éléments, on est conduit à effectuer une transformation qui revient à prendre pour nouvelles variables les paramètres α et β des génératrices rectilignes (imaginaires) de l'ellipsoïde et à poser

$$2n_1 u = uv\sqrt{uv} + \varphi_1 + \varphi_2,$$

$$2n_2 v = uv\sqrt{uv} - \varphi_1 - \varphi_2,$$

$$2it\sqrt{uv} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Les fonctions auxiliaires φ_1 et φ_2 sont alors déterminées par deux équations dont l'intégration est immédiate et donne

$$\frac{u-v}{\sqrt{uv}}\varphi_1 = \int (u-v)\left(v\frac{du}{d\alpha} - u\frac{dv}{d\alpha}\right)d\alpha + F_1(\beta),$$

$$\frac{u-v}{\sqrt{uv}}\varphi_2 = \int (u-v)\left(v\frac{du}{d\beta} - u\frac{dv}{d\beta}\right)d\beta + F_2(\alpha),$$

F_1 et F_2 désignant des fonctions arbitraires.

Pour effectueur l'intégration indiquée, M. Lecornu recourt à l'emploi des fonctions elliptiques, qui, d'ailleurs, disparaissent entièrement à la fin du calcul.

Si l'on veut que les tensions, ainsi qu'il doit en être dans la pratique, restent *finies* en tous les points de l'enveloppe, les fonctions arbitraires F_1 et F_2 se trouvent *complètement déterminées,* grâce aux propriétés connues des fonctions elliptiques, et l'on obtient ainsi la généralisation du résultat antérieurement établi par l'auteur au sujet de l'ellipsoïde de révolution.

Les formules, entièrement explicites, auxquelles M. Lecornu parvient lui permettent de suivre la variation des tensions suivant les sections principales et de déterminer les *ombilics mécaniques* (points où les tensions principales sont égales entre elles).

Il existe toujours quatre ombilics mécaniques, symétriques par rapport aux plans principaux. Ils sont dans le plan perpendiculaire au grand axe, ou dans le plan perpendiculaire à l'axe moyen, suivant que l'expression

$$\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$$

est positive ou négative. Quand elle est nulle, les ombilics se réduisent à deux placés aux extrémités du petit axe.

Le Mémoire se termine par l'étude des lignes importantes qui ont reçu le nom de *lignes isostatiques*. On sait que, sur toute surface en équilibre, il existe un réseau de lignes orthogonales dont chaque élément est soumis à une tension normale à sa direction : ce sont les lignes isostatiques. Pour une surface de révolution fermée, soumise à une pression constante, ces lignes coïncident avec les méridiens et les parallèles, c'est-à-dire avec les lignes de courbure. Mais il ne peut en être de même pour une surface fermée, qui n'est pas de révolution. En ce qui concerne l'ellipsoïde scalène, M. Lecornu démontre que les lignes isostatiques ne sont pas lignes de courbure, abstraction faite des trois ellipses principales; leur détermination se ramène à *une seule quadrature*, qui peut être effectuée explicitement pour certaines valeurs relatives des axes principaux. Il y a un cas particulier remarquable, celui qui correspond à l'hypothèse

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Alors les deux familles de lignes isostatiques sont, d'une part, les sections perpendiculaires au petit axe, d'autre part, les trajectoires orthogonales de ces sections parallèles. Ce cas particulier montre que les lignes isostatiques, dont la disposition est analogue, en général, à celle des lignes de courbure, ne forment pas un système isotherme.

Thybaut (A.). — Sur une classe de surfaces isothermiques. (541-591).

Extrait de l'Introduction. — Les rapports qui existent entre la théorie des surfaces isothermiques et la déformation des quadriques ont leur origine dans une belle proposition que M. Darboux a communiquée à l'Académie des Sciences le 24 mai 1899. M. Darboux associe à chaque surface applicable sur une *quadrique générale* huit surfaces isothermiques qui correspondent une à une aux huit génératrices isotropes de la quadrique.

Dans ma Thèse de Doctorat, publiée en 1897, un cas particulier de cette proposition était indiqué sous la forme suivante : chaque surface applicable sur le *paraboloïde* fait connaître un couple de surfaces isothermiques. Ce couple de surfaces et un couple formé de deux surfaces inverses des premières correspondent, dans le théorème de M. Darboux, aux quatre génératrices isotropes du paraboloïde qui sont rejetées à l'infini.

Le Chapitre II du présent Mémoire contient quelques *propriétés caractéristiques* de ces quatre surfaces isothermiques, qui sont normales aux cercles d'un système cyclique particulier, dont l'étude fait l'objet du Chapitre I.

Par une généralisation facile, on peut étendre certains résultats à quatre surfaces plus générales que l'on déduit de chaque surface applicable sur une *quadrique quelconque*. Ces quatre nouvelles surfaces, qui sont définies par une relation simple entre les rayons de courbure, sont étroitement liées aux huit surfaces isothermiques de M. Darboux.

La détermination de ces huit surfaces isothermiques est un problème équivalent à la déformation de la quadrique correspondante. La quadrique la plus générale que l'on sache complètement déformer étant *le paraboloïde qui a un*

plan directeur isotrope, l'étude des surfaces isothermiques qui correspondent à ce paraboloïde particulier présente un intérêt spécial.

Le Chapitre III est entièrement consacré à ces surfaces isothermiques, qui étaient déjà déterminées dans ma Thèse de doctorat. Parmi leurs propriétés *caractéristiques,* on peut choisir la définition suivante :

A chacune de ces surfaces, qui sont désignées sous le nom de *surfaces* (I), est associé un plan fixe (P), sur lequel des sphères tangentes à la surface et au plan décrivent un tracé géographique de la surface. Lorsque le plan (P) s'éloigne indéfiniment, il résulte de la définition que les surfaces (I) se confondent avec les *surfaces minima,* qui peuvent être considérées, à ce point de vue, comme un cas limite des surfaces (I).

L'étude de ces surfaces est facilitée par l'emploi d'un système particulier de coordonnées curvilignes, et le Chapitre III renferme, avec la détermination complète des surfaces (I) algébriques ou réelles, des propositions relatives aux lignes de courbure, aux lignes asymptotiques de ces surfaces et à l'image de ces lignes sur le plan (P) correspondant.

L'interprétation analytique de quelques remarques géométriques contenues dans les deux premiers Chapitres conduit à des propriétés de certaines équations de Laplace.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK [1].

Tomes XLIV (1899) et XLV (1900).

Lorenz (*Hans*). — Dynamique du système bielle-manivelle. (XLIV, 1-17, 65-84, 177-193; XLV, 57-77, 177-202).

La transformation du mouvement rectiligne alternatif du piston d'une machine à vapeur en mouvement circulaire de l'arbre s'effectue par une bielle et une manivelle, soit directement, soit par l'intermédiaire d'un balancier. Les forces d'inertie, produites par le mouvement des organes, en particulier des pièces à mouvement alternatif, ont une grande influence sur le bâti, dans le cas des moteurs à grande vitesse, des locomotives, des automobiles et des machines marines, et il y a intérêt à les équilibrer autant que possible.

La question, déjà étudiée par Radinger, Yarrow, Schlick, est reprise ici en tenant compte de la variation de vitesse angulaire de l'arbre. Soit d'abord un moteur monocylindrique horizontal; r et l sont le rayon de la manivelle et la longueur de la bielle, et le rapport $\frac{r}{l}$ est assez petit pour que son carré soit négligeable. Soient Q le poids des pièces à mouvement alternatif, piston, tige et moitié de la bielle; R le poids des pièces à mouvement circulaire, ramené au bouton de la manivelle, ε la vitesse angulaire, φ l'angle de la manivelle avec sa position au point mort arrière; les composantes horizontale et verticale de

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXV, p. 12.

la résultante des forces d'inertie sont :

$$X = \frac{r\varepsilon^2}{g}\left[(Q+R)\cos\varphi + Q\frac{r}{l}\cos 2\varphi\right] + \frac{r}{g}\frac{d\varepsilon}{dt}\left[(Q+R)\sin\varphi + Q\frac{r}{2l}\sin 2\varphi\right],$$

$$Y = \frac{r}{g}R\left(\varepsilon^2\sin\varphi - \frac{d\varepsilon}{dt}\cos\varphi\right).$$

Si l'on a plusieurs cylindres actionnant le même arbre, soient α_i l'angle d'avance de la manivelle de rang i et a_i la distance de son centre à un point choisi sur l'arbre; les composantes de la résultante générale des forces d'inertie sont les sommes des valeurs de X et Y écrites précédemment, où φ est remplacé par $\varphi + \alpha_i$ pour le moteur de rang i; les forces d'inertie se réduisent à la résultante générale précédente et à un couple. Les conditions d'équilibre des forces d'inertie, quel que soit φ, s'expriment par les équations

$$(1) \qquad \Sigma Q\cos\alpha = 0, \qquad \Sigma Q\sin\alpha = 0,$$

$$(2) \qquad \Sigma R\cos\alpha = 0, \qquad \Sigma R\sin\alpha = 0,$$

$$(3) \qquad \Sigma Q\frac{r}{l}\cos 2\alpha = 0, \qquad \Sigma Q\frac{r}{l}\sin 2\alpha = 0,$$

$$(1') \qquad \Sigma Q\,a\cos\alpha = 0, \qquad \Sigma Q\,a\sin\alpha = 0,$$

$$(2') \qquad \Sigma R\,a\cos\alpha = 0, \qquad \Sigma R\,a\sin\alpha = 0,$$

$$(3') \qquad \Sigma Q\frac{r}{l}a\cos 2\alpha = 0, \qquad \Sigma Q\frac{r}{l}a\sin 2\alpha = 0.$$

(1), (2), (3) expriment que le centre de gravité des masses mobiles reste invariable pendant le mouvement, condition facilement réalisable; (1), (2), (1'), (2') sont les conditions du premier ordre, parce qu'elles ne dépendent pas de l'obliquité de la bielle; (3) et (3') sont les conditions du second ordre.

Dans le cas important des machines à quatre cylindres, déjà étudié par Schlick et Schubert, on peut : 1° satisfaire aux équations (2) et (2') d'équilibre pour les parties rotatives par l'addition de contrepoids convenablement placés; 2° satisfaire ensuite aux conditions (1) et (1') par un choix convenable des angles de calage; le rapport anharmonique des quatre rayons doit être égal à celui des quatre centres. On ne peut donc adopter des angles de calage égaux à 90°, 180° et 270°; on peut cependant choisir des angles égaux à α, $90 + \alpha$ et 270°, de façon que deux angles opposés de la figure formée par les projections des manivelles sur un plan normal à l'axe soient droits; 3° on peut ensuite satisfaire aux équations (3) par un choix convenable des masses alternatives et du premier angle de calage α, mais on ne peut plus alors satisfaire au dernier système (3'); l'équilibre total du premier et du second ordre est impossible dans les machines à quatre cylindres, *a fortiori* dans celles qui ont moins de quatre cylindres.

Le cas des moteurs à balancier conduit à une étude analogue.

Les variations de vitesse de l'arbre sont données par le théorème des forces vives; si les équations (1), (2), (3) sont remplies, l'énergie potentielle est constante.

Lorsqu'on a plusieurs cylindres actionnant le même arbre, il est possible d'équilibrer autant qu'on le peut les forces d'inertie, et en outre de faire en sorte que l'énergie ait une valeur de la forme

$$\omega^2(A + B\sin 3\varphi + C\cos 3\varphi).$$

La variation d'énergie est égale à la somme des travaux; pour rendre le travail moteur aussi régulier que possible, il faut que les travaux des différents cylindres, pendant une révolution, satisfassent à des conditions analogues à (1) et (3); il faut donc qu'ils soient dans le même rapport que les masses correspondantes animées d'un mouvement alternatif; on ne peut, dans ce cas, avoir l'égalité des travaux des cylindres successifs, à moins de renoncer à l'équilibre approché des forces d'inertie, comme l'a remarqué Franzel.

Des exemples relatifs aux machines marines confirment ces théories.

Heun (*Karl*). — Détermination de la vitesse d'après les méthodes de la photogrammétrie. (XLIV, 18-27).

Relation entre la vitesse d'un point de l'espace et celle de son image photographique, usage de deux telles images.

Müller (*Emil*). — Démonstration de quelques théorèmes sur les déterminants par la méthode de Grassmann. (XLIV, 28-40).

Généralisation à $p+1$ déterminants d'ordre n d'un théorème de Sylvester (Baltzer, *Déterminants*, 5e édition, n° 4, p. 4); théorème de Netto (*Crelle*, t. 114); théorèmes sur les mineurs.

Czuber (*E.*). — Contribution à l'intégration graphique des équations différentielles linéaires du premier ordre. (XLIV, 41-49).

Étant donnée l'équation $y' + P(x)y + Q(x) = 0$, les tangentes aux courbes intégrales en tous les points de même abscisse x concourent au point

$$\xi = x + \frac{1}{P}, \qquad \eta = \frac{Q}{P}.$$

Le lieu de ce point peut servir à tracer par petits éléments successifs une courbe intégrale. Cas où le point (ξ, η) décrit une droite.

Baravelli (*G.-C.*). — Sur les Tables des chiffres constants, de M. Calza, destinées à faciliter les multiplications et les divisions. (XLIV, 50-55).

Mehmke (*R.*). — Exemples d'abaques avec remarques sur la méthode des points alignés. (XLIV, 56-62).

Exposition de la méthode des coordonnées parallèles de M. d'Ocagne.

Schur (*Friedrich*). — La déformation d'une quadrique réglée sans variation de la longueur des génératrices. (XLIV, 62-64).

Le théorème d'Henrici, sur la déformation de l'hyperboloïde à une nappe, s'applique encore au paraboloïde.

Beck (*A.*). — Sur l'affinité perspective de deux espaces. (XLIV, 85-101).

C'est l'affinité définie par deux tétraèdres tels que les droites joignant les sommets correspondants soient parallèles à une même droite qui est la direction d'affinité; les droites et les plans correspondants se coupent alors dans le plan d'affinité. Si D_{ik} est la différence des carrés des arêtes des deux tétraèdres joignant les sommets i et k, la condition pour qu'il en soit ainsi est

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ 1 & D_{21} & 0 & D_{23} & D_{24} \\ 1 & D_{31} & D_{32} & 0 & D_{34} \\ 1 & D_{41} & D_{42} & D_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

pour que l'affinité perspective soit orthogonale, il faut, de plus, que le mineur du déterminant précédent par rapport à son premier élément soit nul.

Deux espaces en affinité peuvent être, d'une manière réelle, amenés en perspective après une homothétie de l'un d'eux; il n'en est pas de même, en général, de deux espaces collinéaires, mais on peut y arriver d'une manière réelle après avoir transformé l'un des espaces par affinité perspective orthogonale.

Schumann (*R.*). — Sur l'emploi de deux pendules de même support pour la détermination des oscillations de ce support. (XLIV, 102-138).

En Géodésie il est utile de connaître les oscillations du support d'un pendule; elles sont données ici par un deuxième pendule de même support que le premier, primitivement fixe, et oscillant ensuite sous l'action exercée par le premier sur le support commun.

Wölffing (*E.*). — Sur les pseudotrochoïdes. (XLIV, 139-166).

Renseignements historiques et bibliographiques sur les trochoïdes ou courbes cycliques, engendrées par un point du plan d'un cercle roulant sur un autre et les courbes d'Euler qui sont semblables à leur deuxième développée. Une pseudo-trochoïde est une courbe réelle engendrée par un point lié à un cercle imaginaire roulant sur une circonférence réelle ou imaginaire; si $R = R_1 + iR_2$ et $r = r_1 + ir_2$ sont les rayons du cercle fixe et du cercle mobile, on doit avoir

$$R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 r_1 - 2R_2 r_2 = 0,$$

et les coordonnées d'un point d'une courbe pseudo-trochoïde sont :

$$x = 2(R_1 - r_1)\cos t \operatorname{ch} \mu t + 2(R_2 - r_2)\sin t \operatorname{sh} \mu t,$$
$$y = 2(R_1 - r_1)\sin t \operatorname{ch} \mu t + 2(R_2 - r_2)\cos t \operatorname{sh} \mu t,$$

où ch et sh sont les fonctions hyperboliques, et $\mu = \dfrac{R_1}{R_2 - 2r_2}$.

Pour que le point mobile soit sur la périphérie du cercle roulant, il faut,

2e Partie.

soit que $R_2 = 0$, $R_1 = 2r_1$ (paracycloïde), ou que $R_1 = 0$, $R_2 = 2r_2$ (hypercycloïde). Construction et étude de ces courbes dont la spirale logarithmique est un cas limite; renseignements bibliographiques.

Schulze (*E.*). — Une formule sur les déterminants. (XLIV, 167-175).

Généralisation du théorème de Spottiswoode sur la décomposition en facteurs des circulantes, en examinant le cas où les éléments sont des nombres complexes au sens de Weierstrass; application au calcul de déterminants formés de racines de l'unité, ou de coefficients binomiaux.

Mehmke (*R.*). — Détermination de l'axe du mouvement hélicoïdal qui fait passer un corps solide d'une position à une autre. (XLIV, 176).

Rappel d'une construction simple, donnée en 1883 dans le *Civilingenieur*.

Holzmüller (*G.*). — Considérations élémentaires sur les cyclides de Dupin et les fondements de la théorie de la courbure. (XLIV, 194-213).

Étude géométrique du tore par sa représentation conforme sur un rectangle; les cercles obliques coupent les méridiens sous un angle constant; en un point d'une surface quelconque existe un tore osculateur.

Schilling (*Fr.*). — Sur de nouveaux modèles cinématiques, ainsi qu'une nouvelle introduction à la théorie des courbes cycliques. (XLIV, 214-227).

Rappelle les diverses définitions cinématiques et les propriétés des courbes engendrées par un point d'un cercle qui roule sur un autre cercle, épitrochoïdes et hypotrochoïdes; présente des modèles permettant de décrire ces courbes et des modèles d'inverseurs.

Hammer (*E.*). — Sur le point de rencontre de trois directions concourantes. (XLIV, 228-233).

Détermination la plus probable du point de rencontre de trois directions, issues des sommets d'un triangle en tenant compte des erreurs d'observation.

Heilermann (*H.*). — Contribution à la résolution de l'équation du quatrième degré. (XLIV, 234).

Si, dans l'équation d'une conique réductible à deux droites, on remplace x par z^2 et y par $2z$, on obtient une équation du quatrième degré; on peut l'assimiler à une équation quelconque de ce degré en introduisant dans les coefficients de la conique un paramètre λ; ce paramètre doit satisfaire à l'équa-

tion du troisième degré $\Delta = 0$. A chaque racine de cette résolvante classique correspond une décomposition de la conique des deux droites et une décomposition de l'équation biquadratique en deux quadratiques.

Heffter (*L.*). — Sur une représentation des fonctions d'une variable complexe. (XLIV, 235-236).

Pour représenter la fonction $W = f(z)$, on pose $W = \rho e^{i\varphi}$; au point $z = x + iy$ du plan z on élève une perpendiculaire égale à ρ, et l'on indique sur la surface formée la valeur de φ par une couleur variable avec φ.

Beyel (*Chr.*). — Sur les quadrangles doublement centriques. (XLIV, 237-262).

Étude des quadrilatères inscrits dans un cercle fixe et circonscrits à un autre; relations métriques et involutives.

Heymann (*W.*). — Section d'un angle au moyen d'Aranéides. (XLIV, 263-279).

L'aranéide du $n^{\text{ième}}$ ordre est le lieu du sommet d'un triangle de base fixe, l'un des angles à la base, intérieur ou extérieur, étant égal à n fois l'autre; l'équation en coordonnées polaires est, suivant les cas, l'une des deux suivantes :

$$r = a\,\frac{\sin n\varphi}{\sin(n+1)\varphi}, \qquad r = a\,\frac{\sin n\varphi}{\sin(n-1)\varphi}.$$

Heymann (*W.*). — Sur les fonctions hypergéométriques dont le dernier élément est spécial. (XLIV, 280-288).

Cet article se rapporte à un Mémoire sur le même sujet, publié dans le *Jahresbericht der technischen Staatslehranstalten zu Chemnitz*, Ostern 1898, avec application à la résolution d'équations quadrinomes par des séries. L'auteur se propose d'examiner les cas où la fonction hypergéométrique

$$F\left(-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + \frac{1}{2}, \mu h + \nu, \lambda\right)$$

s'évalue, quel que soit h, au moyen de la fonction Γ lorsqu'on donne à μ, ν, λ des valeurs numériques spéciales; il suffit que la relation trinome existant entre trois fonctions F contiguës se réduise à une relation binome. Cela se présente, en particulier, pour $\mu = 1$, $\nu = \frac{3}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{3}$, pour $\mu = 2$, $\nu = \frac{3}{2}$ ou $\frac{5}{2}$, $\lambda = \frac{1}{5}$, et pour d'autres cas déduits de ceux-ci par transformation de la fonction hypergéométrique.

Böklen (*O.*). — Sur la surface des ondes. (XLIV, 289-297).

Construction, d'après Mannheim, des centres de courbure principaux de cette surface et des sections principales de la surface des centres.

Meisel (*F.*). — Introduction à l'Optique géométrique. (XLIV, 298-302).

Leçon du Cours professé à l'École supérieure de Darmstadt.

Weltmann (*W.*). — L'interpolation. (XLIV, 303-326; XLV, 337).

Simplification de la méthode de Gauss-Encke. Étant donnés des couples de valeurs $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots$, si l'on utilise successivement un, deux, ... de ces couples pour déterminer les termes de degrés croissants successifs d'un polynome entier déterminé par eux, on a, pour le polynome général, la formule

$$f_n = r_0 + (x - x_0) r_1 + (x - x_0)(x - x_1) r_2 + \ldots$$

où

$$r_p = \sum_{h=0}^{h=p} \frac{y_h}{(x_h - x_0)(x_h - x_1)\ldots(x_h - x_n)}.$$

C'est le calcul numérique des quantités r_p, de proche en proche, qui fait l'objet de cet article; ce calcul est fondé sur la considération d'un *produit continu* qui rappelle comme aspect une fraction continue, le signe de la division étant remplacé par celui de la multiplication.

Schmidt (*Ad.*). — Formules de transformation des fonctions sphériques pour une transformation linéaire du système de coordonnées. (XLIV, 327-338).

Soient u la distance zénithale et λ l'azimut d'un point d'une sphère; les fonctions sphériques de Heine de degré n, $P_m^n(\cos u)$, où $m \leqq n$ entrent souvent dans les combinaisons

$$C_m^n = P_m^n(\cos u)\cos m\lambda, \qquad S_m^n = P_m^n(\cos u)\sin m\lambda;$$

si l'on rapporte le point (u, λ) à d'autres systèmes de coordonnées, et si (ν, μ) sont la nouvelle distance zénithale et le nouvel azimut du point, les fonctions γ_m^n, σ_m^n analogues à C et S s'expriment en fonction de ces dernières par des formules linéaires; c'est le calcul des coefficients de la transformation qui forme l'objet de cet article.

Geusen (*L.*). — Nouvelle construction pour le centre de gravité du périmètre d'un triangle. (XLIV, 339).

Saalschütz (*Louis*). — Extension d'un théorème sur les factorielles. (XLIV, 340-346; XLV, 333-336).

Se rapporte à une somme de termes de la forme

$$C_n^p \mu[\mu + 1 + (n-p)\gamma]\ldots[\mu + n - p - 1 + (n-p)\gamma]$$
$$\times \nu(\nu + 1 + p\gamma)\ldots(\nu + p - 1 + p\gamma)$$

et une autre somme analogue: application au calcul de certaines séries de puissances satisfaisant à une identité de la forme $\Phi(x, \mu) = [\Phi(x, 1)]^{\mu}$.

Hayashi (*P.*). — Sur une équation fonctionnelle traitée par Abel. (XLIV, 346-349).

Généralisation de la recherche d'une fonction $f(x, y)$, telle que $f[z, f(x, y)]$ soit symétrique par rapport à x, y, z.

Hayashi (*P.*). — Sur une classe de surfaces dont les lignes asymptotiques peuvent être déterminées par de simples intégrations. (XLIV, 349-351).

Généralisation des surfaces tétraédrales de M. Jamet; ce sont les surfaces représentées par $x = p(u)q(z)$, $y = p_1(u)q(z)$ où u est un paramètre variable.

Sintzow (*D.*). — Sur une propriété des surfaces du second ordre. (XLIV, 351-355).

Les génératrices d'un système réglé du second ordre coupent les faces d'un tétraèdre inscrit en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

Liebmann (*H.*). — Exemple simple d'un système de points dont le mouvement est soumis à une condition non holonome. (XLIV, 355).

Si un point B est soumis à la condition non holonome (condition différentielle non intégrable d'après Hertz) de se mouvoir à chaque instant suivant la normale à la ligne qui le joint à un point A, son mouvement relatif par rapport à A est le même que si A l'attire d'après la loi de Newton.

Jolles (*Stanislaus*). — Les paraboles caractéristiques de la poutre simple uniformément chargée. (XLV, 1-9).

Lorsqu'une poutre AB est uniformément chargée et est parcourue ensuite par une charge P concentrée en un point mobile de A à B, la section où le moment fléchissant est maximum est d'abord au centre C, puis s'approche de P jusqu'à sa rencontre en un point D, l'accompagne jusqu'au point D′ symétrique de D par rapport à C, et revient enfin vers C. La statique graphique donne, pour chaque position de P, le moment fléchissant maximum en partant de la parabole représentative du moment dû à la charge répartie, et de celle qui représente le moment maximum dû au poids mobile.

Même problème pour deux charges mobiles, et pour une charge répartie sur une longueur cheminant de A vers B.

Grünwald (*Josef*). — Résolution par la règle des problèmes

relatifs à la jonction et à l'intersection de points, de droites et de plans imaginaires. (XLV, 10-22).

V. Staudt a montré qu'à l'aide d'éléments projectifs harmoniques de base réelle on peut séparer l'un de l'autre, en Géométrie synthétique, deux éléments imaginaires conjugués; jusqu'à présent la résolution, à l'aide d'éléments réels λ, des problèmes du premier degré relatifs aux éléments imaginaires, était considérée comme dépendant de problèmes du second degré ayant pour solutions les deux éléments conjugués, et s'effectuait à l'aide de la règle et du compas. L'auteur montre comment on peut s'affranchir du compas et résoudre les problèmes par la règle seule.

Les éléments réels définissant deux droites imaginaires D et D′ dans un plan réel fournissent un quadrangle orienté d'où l'on tire par la règle la représentation habituelle du point de rencontre de D et D′; le quadrangle forme une représentation polygonale de ce point; par dualité, la droite de jonction de deux points imaginaires est représentée par un quadrilatère orienté d'où l'on tire, par la règle, la représentation habituelle; par projection centrale d'un point réel O de l'espace, on a la solution des problèmes relatifs aux plans et droites imaginaires passant par O.

Dans l'espace, une droite D imaginaire de seconde espèce est l'intersection de deux plans imaginaires quelconques; les éléments réels qui définissent ces plans fournissent quatre génératrices d'un système réglé du second ordre; la section par un plan réel ou la projection d'un point réel O fournissent la représentation polygonale du point d'intersection de D et du plan, ou du plan passant par D et O; la droite D peut être représentée de ∞^4 façons par des éléments réels.

Les droites réelles passant par les points de D ou situées dans des plans passant par D forment une congruence linéaire dont les directrices sont D et la droite conjuguée D′; on tire de là la solution de problèmes relatifs aux congruences à directrices imaginaires. Les autres problèmes du premier degré relatifs aux éléments imaginaires se résolvent par ce qui précède.

Heun (*Karl*). — Nouvelle méthode pour l'intégration approchée des équations différentielles d'une variable indépendante. (XLV, 23-38).

Généralisation de la méthode de quadratures mécaniques de Gauss, dans le même ordre d'idées que la méthode de Runge (*Mathematische Annalen*, t. XLVI, p. 167). Étant donnée une équation différentielle du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

et un couple de valeurs x, y, on se propose de calculer une valeur approchée de Δy correspondant à un accroissement Δx; lorsque l'approximation est du second ordre, on pose

$$\Delta y = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \alpha_\nu f[x + \varepsilon_\nu \Delta x, y + \varepsilon_\nu f(x, y) \Delta x] \Delta x,$$

et l'on cherche quelles valeurs numériques on doit donner aux indéterminées α et ε pour que la valeur approchée coïncide avec la valeur exacte de Δy jusqu'aux infiniment petits du second ordre inclusivement. Lorsque l'approximation est du troisième ordre, on écrit

$$\Delta y = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \alpha_\nu f\left\{ x + \varepsilon_\nu \Delta x, y + \varepsilon_\nu f\left[x + \varepsilon'_\nu \Delta x, y + \varepsilon'_\nu f(x, y) \Delta x \right] \Delta x \right\} \Delta x,$$

et l'on cherche quelles valeurs il faut donner aux α, ε et ε' pour que la valeur approchée coïncide avec la valeur approchée jusqu'au troisième ordre, et ainsi de suite. La méthode s'étend aux systèmes d'équations différentielles simultanées et aux équations d'ordre supérieur.

Jung (*J.*). — Étude synthétique d'un fil en mouvement le long de lui-même. (XLV, 39-42).

Méthode géométrique simplifiant l'étude analytique de Routh.

— Étude synthétique de la chaînette ordinaire. (XLV, 229-234).

Eggenberger (*J.*). — Sur la représentation du théorème de Bernoulli dans le Calcul des probabilités. (XLV, 43-51).

Au lieu de la formule de Laplace

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2}\, dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \qquad \left(\gamma = \lambda \sqrt{\frac{1}{2\mu pq}}\right),$$

on peut prendre la formule

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma'} e^{-t^2}\, dt \qquad \left[\gamma' = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{2\mu pq}}\right].$$

Burali-Forti (*C.*). — Sur la formule de Taylor pour les formes géométriques. (XLV, 52-54).

Addition à une démonstration du Livre de l'auteur : Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de Grassmann.

Timerding (*H.-E.*). — Sur quelques représentations conformes. (XLV, 54-56).

Représentation se rapportant à la projection de Mercator et fournie par

$$V + iU = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u + iv}{2}\right).$$

Runge (*C.*). — Sur la comparaison de formules empiriques. (XLV, 78-85).

Lorsqu'on possède deux formules empiriques $y = f(x)$, $y = g(x)$ pour représenter une même fonction, l'erreur moyenne commise en remplaçant l'une par l'autre est, entre o et x, la racine carrée de la quantité

$$\frac{1}{x}\int_0^x [f(x) - g(x)]^2\, dx;$$

si $f(x)$ est donnée sous une forme compliquée, on peut choisir pour $g(x)$ une fonction entière et déterminer ses coefficients de façon à rendre l'erreur minimum; cette recherche et la valeur de l'erreur moyenne se simplifient lorsque $f(x)$ est développée en fonctions sphériques.

Huber (*G.*). — Sur la conique sphérique et la surface développable formée par ses tangentes. (XLV, 86-118).

L'auteur étudie à l'aide des fonctions elliptiques la conique sphérique, intersection d'une sphère de rayon *un* et d'un cône du second ordre ayant son sommet au centre de la sphère. Soient α le demi-grand axe et ε la demi-distance focale de l'ellipse sphérique; les coordonnées de ses points s'expriment en fonction de la variable u par les formules

$$x = \varkappa \operatorname{sn} t \operatorname{sn} u, \qquad y = \frac{i\varkappa}{\varkappa'} \operatorname{cn} t \operatorname{cn} u, \qquad z = \frac{1}{\varkappa'} \operatorname{dn} t \operatorname{dn} u,$$

où $\varkappa = \sin\varepsilon$, $\varkappa' = \cos\varepsilon$ sont les modules complémentaires et t un paramètre complexe dont la partie réelle est égale à K et la partie imaginaire est comprise entre o et iK'; il est lié à α par $\sin\alpha = \varkappa \operatorname{sn} t$.

Si l'on considère u comme constant et t comme variable, les formules représentent une conique sphérique homofocale et orthogonale à la première; on déduit de là la quadrature de l'ellipse sphérique. La rectification s'effectue simplement en considérant la conique polaire; les coordonnées, analogues aux premières, sont de la forme

$$x' = i\frac{k}{k'} \operatorname{cn}\tau \operatorname{cn} w, \qquad y' = k \operatorname{sn}\tau \operatorname{sn} w, \qquad z' = \frac{1}{k'} \operatorname{dn}\tau \operatorname{dn} w;$$

l'arc de la première courbe, compté à partir du sommet du grand axe, a pour valeur

$$s = \frac{i}{2}\log\frac{\mathrm{H}(\tau + w)}{\mathrm{H}(\tau - w)} - iw\,\mathrm{Z}(\tau).$$

La surface développable formée par les tangentes à la conique sphérique est représentée en fonction de u et v par les formules

$$x = \varkappa\frac{\operatorname{sn} t \operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn} u}, \qquad y = i\frac{\varkappa}{\varkappa'}\frac{\operatorname{cn} t \operatorname{cn}^2 v}{\operatorname{cn} u}, \qquad z = \frac{1}{\varkappa'}\frac{\operatorname{dn} t \operatorname{dn}^2 v}{\operatorname{dn} u},$$

les lignes $u =$ const. étant les génératrices; on en déduit les propriétés de la surface et de ses lignes de courbure.

Blumenthal (*Otto*). — Le mouvement des ions dans le phénomène de Zeemann. (XLV, 119-136).

Intégration des équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma\frac{dy}{dt} - \beta\frac{dz}{dt} - hx.$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \alpha\frac{dz}{dt} - \gamma\frac{dx}{dt} - ky.$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \beta\frac{dx}{dt} - \alpha\frac{dy}{dt};$$

étude du mouvement d'un point se déplaçant sur une ellipse entraînée de façon que ses axes restent parallèles à eux-mêmes, et que son centre décrive une autre ellipse d'axes parallèles aux premiers.

Fitting (*F.*). — Sur une généralisation du problème du saut du cavalier. (XLV, 137-160).

Étant donnés n points, on exclut des $\frac{n(n-1)}{2}$ lignes qui les joignent deux à deux un certain nombre; de combien de manières peut-on assembler les lignes restantes de façon à former un contour passant une fois, et une seule, par chacun des n points? Formules récurrentes pour la solution de ce problème.

Kosch (*F.*). — Normale et centre de courbure des courbes polytropiques. (XLV, 161-166).

Le segment de la normale en un point M d'une courbe $x^\lambda y^\mu = a$, compris entre deux droites fixes convenablement choisies, a pour milieu le point M; construction du rayon de courbure.

Dœhlemann (*Karl*). — Un théorème sur les tétraèdres hyperboloïquement situés. (XLV, 166-170).

Étant donnés deux tétraèdres dont les lignes de jonction des sommets homologues sont sur un hyperboloïde, la condition nécessaire et suffisante pour que l'hyperboloïde de ces lignes de jonction soit identique à celui des intersections des faces homologues est que chacun des tétraèdres soit inscrit dans l'autre à la manière indiquée par Möbius; les quatre lignes de jonction sont alors, et seulement alors, identiques avec quatre lignes d'intersection.

Meyer (*W.-Fr.*). — Sur une propriété de l'hyperbole. (XLV, 170-173).

Relations entre les aires limitées par un arc d'hyperbole et par des droites parallèles aux axes, ou parallèles aux asymptotes, ou issues du centre.

Adamczik (*Josef*). — Construction par la descriptive des diamètres conjugués d'une conique. (XLV, 174-176).

Daniëls (*M.-Fr.*). — Sur les dérivées d'un vecteur. (XLV, 203-215).

La Géométrie des vecteurs est fondée sur la considération du produit géométrique et du moment géométrique. L'auteur détermine les dérivées successives d'un vecteur variable rapporté à trois axes mobiles: il retrouve synthétiquement toutes les formules connues en Cinématique dans la théorie des mouvements relatifs.

Stahl (*H.*). — Remarques relatives aux leçons de Bernhard Riemann sur les fonctions elliptiques. (XLV, 216-228).

Complément des Notes insérées par l'auteur dans l'édition des *Leçons de Riemann* (1899); cet article sert à faciliter la lecture de l'Ouvrage de Stahl : *Theorie der Abelschen Functionen* (Leipzig, 1896); il renferme l'exposition, en rapport avec les Ouvrages précédents, de théorèmes connus sur les zéros et les infinis des fonctions rationnelles sur la surface de Riemann, sur le théorème d'Abel et sur le théorème d'addition pour les fonctions elliptiques.

Sturm (*R.*). — Correction aux *Œuvres complètes* de Steiner. (XLV, 235-240).

Liste de fautes de raisonnement, de calcul ou d'impression à corriger.

Kokott (*P.*). — Conditions pour que l'intégrale de

$$\frac{x^{n+\mu}}{\sqrt{1+\varepsilon_1 x+\ldots+\varepsilon_n x^n}}$$

soit algébrique. (XLV, 240-244).

Somoff (*P.*). — Sur les domaines des vitesses hélicoïdales d'un corps invariable reposant sur un certain nombre de surfaces. (XLV, 245-306).

Suite de l'article sur le même sujet inséré dans ce Recueil, Tome XLII, page 133 (1897). Lorsqu'un corps repose sur une surface dont il peut du reste s'écarter, la vitesse hélicoïdale en un point quelconque et la normale au point de contact doivent satisfaire à une inégalité déjà établie; cette inégalité a deux formes distinctes suivant que l'angle de la normale avec la vitesse angulaire est aigu ou obtus.

Lorsque le corps repose sur deux ou sur trois surfaces, il y a lieu de distinguer plusieurs cas suivant que les angles de la vitesse angulaire avec les normales sont tous aigus ou obtus ou bien sont de natures différentes; il existe dans le second cas des plans limites séparant l'espace en régions; les axes héli-

coïdaux menés par un point de l'une correspondent à une vitesse angulaire positive, et de l'autre à une vitesse négative.

Dans le cas de quatre surfaces se présente un plan limite de seconde espèce, lorsque les quatre normales satisfont à une certaine condition; les axes hélicoïdaux permettant un seul mouvement sont parallèles à ce plan et forment un cylindroïde; dans le cas de cinq surfaces, les axes hélicoïdaux ne peuvent prendre toutes les directions possibles; dans le cas de six surfaces, on peut faire en sorte qu'un seul mouvement soit possible; il faut au moins sept surfaces pour que le corps soit assujetti à rester en repos.

Kübler (*J.*). — Contribution à l'étude de l'élasticité et de la résistance des pièces chargées debout. (XLV, 307-332).

Lorsqu'on tient compte de la compression et de la flexion dans chacune des sections de la pièce primitivement droite et déformée ensuite, on obtient une équation plus compliquée que celle d'Euler; même dans le cas d'une flèche f très petite, il y a lieu de distinguer la fibre neutre de la fibre moyenne; la première s'écarte de la seconde du côté de la convexité, d'une longueur égale à $\sqrt{2i^2+f^2}-f$, si i est le rayon de giration de la section. L'équation de la fibre moyenne déformée, en prenant son milieu comme origine, est, dans les cas usuels,

$$y = \sqrt{2i^2+f^2}\left(1-\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\,s\right);$$

on en déduit la flèche en faisant $y=f$ pour $s=\frac{l}{2}$. Le cas des pièces fortement courbées se traite d'une manière analogue; la charge de sécurité dans la fibre la plus fatiguée donne la limite de la charge P.

Ziegel (*Rudolf*). — Une propriété générale des fonctions algébriques. (XLV, 338).

Elles satisfont à une équation différentielle du premier ordre linéaire par rapport à la variable indépendante.

Dörge. — L'énergie magnétique d'un système de courants électriques. (XLV, 339-340).

Beuriger. — Remarques sur la résolution des équations du quatrième degré. (XLV, 341-344).

Suite de l'Article de *Heilermann*, Tome XLIV, page 234; expression des racines de la résolvante au moyen de celles de l'équation.

RENDICONTI DEL R. ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE, IIe série. In-8°. Milano, tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C.; U. Hoepli, éditeur.

Tome XIV; 1881.

Aschieri (*Ferd.*). — [P4*f*, *g*]. Sur les correspondances crémoniennes dans le plan et dans l'espace. (21-26).

On peut établir une correspondance uniponctuelle entre deux plans σ, σ_1 de la manière suivante. Soient σ, σ_1 deux plans réciproques, S un faisceau de σ, et S_1 un faisceau de σ_1 projectif à S. Un point X de σ détermine un rayon a de S; le point X' où le rayon a_1 de S_1 rencontre la droite x_1 réciproque de X est le correspondant de celui-ci. C'est une correspondance quadratique, et même toute correspondance quadratique peut être engendrée ainsi.

Dans l'espace, on prend deux espaces Σ, Σ_1 réciproques; une étoile S de Σ et une S_1 de Σ_1 projective à S. Un point X de Σ détermine un rayon de S, et le point X' est celui où le rayon correspondant en S_1 rencontre le plan de Σ_1 réciproque de X. Cette correspondance est aussi quadratique et générale.

Au moyen de ces générations, il est aisé de déterminer les types des correspondances involutives, qui pour l'espace sont :

1° L'homologie involutive du deuxième ordre avec une quadrique de points unis;

2° Les correspondances involutives ayant une conique de points unis et deux autres points unis;

3° Celles qui ont un plan et une droite de points unis.

Schiaparelli (*G.-V.*). — [V]. Sur la nouvelle histoire des Mathématiques publiée par M. le Professeur M. Cantor. (62-69).

Aschieri (*Ferd.*). — [P4*h*]. Sur une correspondance crémonienne quadratique entre les éléments de deux formes fondamentales de quatrième espèce ou espaces réglés. (123-130).

Si α, α' et β, β' sont deux couples de plans projectifs et une droite p rencontre α et β en P_α, P_β, la droite correspondante p' est celle qui joint les points $P_{\alpha'}$, $P_{\beta'}$.

Clericetti (*C.*). — [T2*b*]. Sur la détermination des moments maxima dus à des poids liés entre eux sur une poutre appuyée. (172-188), (275-292).

Aschieri (*Ferd.*). — [P4*h*]. Sur une correspondance quadratique crémonienne entre les éléments de deux espaces réglés. (219-227).

Étant les x_r les coordonnées (ponctuelles) d'une droite x, et ξ_r les coordonnées (tangentielles) de sa correspondante x', avec les relations connues

$$x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0,$$
$$\xi_1 \xi_4 + \xi_2 \xi_5 + \xi_3 \xi_6 = 0,$$

la correspondance est

$$\rho x_k = \sum_r a_{kr} \xi_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, 5).$$

Celoria (*G.*). — [U]. Différences de longitude entre les observatoires de Gênes, Milan, Naples et Padoue. (320-325).

D'Ovidio (*Henry*). — [Q1 ref. N¹]. Théorèmes sur les complexes linéaires dans la métrique projective. (405-415).

Les propositions de Plücker relatives au *paramètre* de l'axe (ou d'un diamètre quelconque) du complexe, et celles données par Drach (*Math. Ann.*, t. II, p. 135) sur le *module* du complexe par rapport à deux droites correspondantes, sont ici ramenées à une conception unique en supposant l'espace non euclidien, où l'absolu est une quadrique quelconque.

Aschieri (*Ferd.*). — [P4*g*]. Sur la représentation des complexes du deuxième degré sur l'espace de points. (500-509).

On considère les complexes linéaires passant par deux droites fixes qui se rencontrent, et conséquemment par un faisceau de rayons, et l'on établit une correspondance entre eux et les plans de l'espace [une correspondance semblable avait été considérée par Schur (*Math. Ann.*, t. XV), en supposant quelconques les deux droites fixes]. On a ainsi une correspondance entre les points de l'espace et les faisceaux ayant un rayon en commun avec un faisceau fixe. De cette correspondance, on en obtient une autre entre l'espace de points et un complexe de degré n ayant les rayons du faisceau fixe pour génératrices $(n-1)^{\text{ples}}$ de ses cônes. Pour $n = 2$, on a une correspondance déjà etudiée par une autre voie par Caporali (*Atti dei Lincei*, 2 juin 1878).

Lugli (*Aurèle*). — [K9*a*]. Solution de quelques problèmes généraux de Géométrie. (564-575).

Solutions géométrique et analytique du problème suivant :

Étant donnés n points du plan, construire un polygone dont les côtés passent par ces points et soient divisés par eux en des parties ayant un rapport donné.

et de deux autres problèmes analogues, l'un dans le plan, l'autre dans l'espace.

Formenti (*C.*). — [C2*d*]. Réduction d'intégrales de fonctions algébriques à des intégrales de fonctions rationnelles. (667-672).

Étant $\alpha(y)$, $\varphi(y)$ des fonctions rationnelles de y, $f(z)$ une fonction rationnelle de z, satisfaisant à la condition

$$f\left(\frac{a-bz}{b-cz}\right)-f(z)=0,$$

et φ_{-1} l'inverse de φ, l'intégrale

$$\int \frac{f(z)\,dz}{(cz-b)\alpha\left[\varphi_{-1}\left(\frac{Az^2+Bz+C}{Pz^2+Qz+R}\right)\right]}$$

se réduit aux fonctions rationnelles par la substitution

$$\varphi(y)=\frac{Az^2+Bz+C}{Pz^2+Qz+R},$$

ayant posé

$$a=BR-CQ,\qquad b=CP-AR,\qquad c=AQ-BP.$$

Aschieri (*Ferd.*). — [P6*a* ref. Q1]. La transformation quadratique double de l'espace, et son application à la Géométrie non euclidienne de l'espace. (673-683). (*A suivre* dans le Tome XV, p. 66).

Tome XV; 1882.

Bertini (*Eugène*). — [Q2 ref. M² 1*f*]. Sur les systèmes linéaires. (24-28).

Un espace arbitraire d'un système linéaire ne se décomposant pas en un espace fixe et un système linéaire résidu, ne peut avoir de points multiples au dehors des espaces bases du système. Si tout espace du système a un point r^{uple} hors des espaces bases, le lieu de ces points r^{uples} est un espace, qui, compté $r-1$ fois, se détache de chaque espace du système donné.

Un espace arbitraire d'un système linéaire $\sum_{n-1}^{m,s}$ ne se décompose que dans les deux cas suivants :

a. Que de tout espace du système se détache un espace fixe;

b. Que tout espace du système se décompose en p espaces appartenant à un faisceau et constituant un groupe d'une involution d'ordre p et d'espèce s.

Beltrami (*Eugène*). — [T2*c*]. Sur la théorie de la gamme diatonique. (61-66).

En faisant correspondre 1 à la tonique, $\frac{1}{2}$ à l'octave, r à la tierce et s à la

quinte, la gamme est représentée par

$$1, \quad 2s^2, \quad r, \quad \frac{1}{2s}, \quad s, \quad \frac{r}{2s}, \quad rs, \quad \frac{1}{2},$$

s et r satisfaisant aux conditions

$$1 > 2s^2 > \frac{1}{2s},$$

$$\frac{1}{2s} < r < 2s^2.$$

L'auteur prouve que les valeurs pratiques

$$r = \frac{4}{5}, \qquad s = \frac{2}{3}$$

sont les nombres rationnels les plus simples capables de satisfaire à ces inégalités. La démonstration est faite en s'appuyant sur les propriétés connues des fractions continues, que l'on peut aussi utiliser dans des recherches cristallographiques.

Aschieri (*Ferd.*). — [P6*a* ref. Q1]. La transformation quadratique double de l'espace et son application à la Géométrie de l'espace non euclidien (*suite*). (66-77), (147-154), (247-250).

Dans ce travail, commencé dans le Tome précédent, page 673, l'auteur part de la correspondance établie par Schur entre un espace S de points et un système linéaire triplement infini Σ de complexes linéaires passant par deux droites fixes. En coupant Σ avec un complexe Θ (n'appartenant pas à Σ), et en représentant ensuite Θ sur un espace de points S′ par la méthode de Lie, on obtient une correspondance double entre les deux espaces S, S′, où S est l'espace double, S′ l'espace simple. Cette transformation est étudiée par l'auteur, puis appliquée à la géométrie non euclidienne de l'espace, comme la transformation double entre deux plans avait été étudiée et appliquée à la géométrie non euclidienne du plan par De Paolis (*Mem. dei Lincei*, 1877).

Jung (*J.*). — [R2*c*]. Quelques théorèmes sur les formes dégénérées de l'ellipsoïde de Culmann. (141-146).

Bertini (*Eugène*). — [P4*g*]. Constructions géométriques de la transformation univoque du troisième ordre. (154-157).

En regardant comme identiques les transformations qui peuvent se déduire l'une de l'autre par des homographies, toute transformation univoque du troisième ordre peut s'obtenir de manière que, pour la congruence des droites joignant les points correspondants, la surface focale se réduise à une conique et une droite ayant un point commun.

Formenti (*C.*). — [C2*d*]. Réduction d'intégrales de fonctions algébriques à des intégrales de fonctions rationnelles. (165-173).

Si

$$\psi[\lambda(z)] = \psi(z).$$

c'est-à-dire si $\lambda(z)$ est ce que l'on appelle une *période* de la fonction ψ, qui est supposée rationnelle, et si la fonction $P(z)$, qui est aussi rationnelle, satisfait à

$$P(\lambda)\,d\lambda = P(z)\,dz,$$

la différentielle algébrique

$$\frac{P(z)\,dz}{\alpha[\varphi_{-1}\psi(z)]}$$

se transforme en une différentielle rationnelle

$$\frac{F[\varphi(y)]\,\varphi'(y)\,dy}{\alpha(y)}$$

au moyen de la substitution

$$\psi(z) = \varphi(y).$$

Applications à la transformation de certaines intégrales, particulièrement elliptiques.

Bardelli (*J.*). — [R4*a*]. Sur les systèmes variés de forces. (180-195).

Pincherle (*S.*). — [D4*a*]. Quelques théorèmes sur les développements en série pour les fonctions analytiques. (224-225).

Weyr (*E.*). — [M³4*a*]. Sur les courbes gauches rationnelles. (250-251).

Énoncés sans démonstrations relatifs à ces courbes et particulièrement à celles du sixième ordre.

Borletti (*F.*). — [K6*a*]. Sur la transformation des coordonnées dans l'espace. (252-257).

Cazzaniga (*P.*). — [D3*f*]. Sur une formule de Cauchy concernant le développement de fonctions en produits infinis. (273-279).

Étant $w(z)$ monodrome et continue avec les zéros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ des ordres $m_1, m_2, \ldots$, et les infinis $\beta_1, \beta_2, \ldots$ des ordres $n_1, n_2, \ldots$, et étant donné un *élément* relatif à un point γ, l'auteur donne une expression qui est une extension de la formule de Cauchy

$$w(z) = \frac{\prod\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^m}{\prod\left(1-\frac{z}{\beta}\right)^n}.$$

Maggi (*J.-Ant.*). — [J2*e*]. Sur quelques formules relatives au calcul des erreurs d'observation. (351-358).

Beltrami (*Eug.*). — [T5*a*]. Sur la théorie des systèmes de conducteurs électrisés. (400-407).

Expression la plus simple et générale du travail intérieur des forces électriques, pendant un changement quelconque de forme, de position et d'état électrique des conducteurs. Analogies qui en suivent entre l'Électrostatique et la Thermodynamique.

Jung (*J.*). — [$L^2$9 ref. T6]. Sur le pseudo-foyer du paraboloïde et sur le centre magnétique. (407-418).

Le pseudo-foyer est le point équidistant des sommets des deux paraboles focales. Le centre magnétique de Beltrami (*Annali di Matematica*, t. X, 4e Cahier, mai 1884) est le symétrique du sommet par rapport au pseudo-foyer; celui de Thompson est le symétrique du pseudo-foyer par rapport au sommet.

Schiaparelli (*G.-V.*). — [U]. Mesures de quelques étoiles doubles à mouvement rapide, faites en 1875-1882 avec le réfracteur de Merz de l'Observatoire royal de Bréra. (468-498).

Jung (*J.*). — [R2*b* ref. R4*d*]. Quelques théorèmes barycentriques. (499-506).

Voir les additions à la page 646.

Poloni (*G.*). — [T7*a*]. Vérification expérimentale d'un fait prévu par la théorie mathématique sur la distribution du courant voltaïque dans les conducteurs. (535-537).

Si dans un conducteur on fait passer de A en B un courant d'intensité *i*, et si l'on a une différence *d* de potentiel entre les points C et D, on obtiendra la même différence *d* de potentiel entre A et B en faisant passer le même courant entre C et D (théorème de M. Volterra, *Nuovo Cimento*, 3e série, Vol. XI, p. 188).

Beltrami (*Eug.*). — [R8 ref. H8*b*]. Sur une formule de Mécanique analytique. (537-543).

Formule de Mathieu relative aux crochets de Poisson (Mathieu, *Dynamique analytique*, p. 217-221).

Ascoli (*G.*). — [D1*d*]. Une observation relative à un théorème donné dans mon Mémoire : « Sur la représentabilité d'une fonction à deux variables par une double série trigonométrique ». (543-545).

Casorati (*Félix*). — [F2]. Sur le théorème de Jacobi relatif à la périodicité, et sur l'illégitimité d'une partie des conséquences que l'on en a déduites. (623-625).

L'impossibilité d'une fonction à plus de deux périodes n'a lieu que pour les fonctions ayant un nombre fini de valeurs pour toute valeur de la variable.

Morera (*J.*). — [C4*a* ref. R8*e*]. Le « Théorème fondamental dans la théorie des équations canoniques du mouvement » du Professeur Siacci. (640-645).

Si le covariant bilinéaire d'une expression différentielle est identiquement nul, cette expression est une différentielle exacte. Comme conséquence, on a le théorème de Siacci :

Si n équations entre les variables $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, ..., $x_n y_n$ résolues par rapport à n d'entre elles, vérifient la relation

$$\sum (dy_r\, \delta x_r - \delta y_r\, dx_r) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

les n équations peuvent toujours se réduire à la forme

$$y_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_r} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_r},$$

φ, ψ_1, ..., ψ_k *étant des fonctions des x, et les* λ *étant déterminées de manière que les* (1) *vérifient les équations*

$$\psi_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \psi_k = 0.$$

Ce théorème est ensuite appliqué par l'auteur à la démonstration et généralisation d'un théorème dû à Jacobi [*Nova methodus*, etc. (*Journal de Crelle*, t. 61)], qui, dans la forme généralisée que lui donne l'auteur, est le suivant :

Si les variables $p_1, \ldots, p_n$; $q_1, \ldots, q_n$ sont liées par n relations $f_1 = a_1, \ldots, f_n = a_n$, la condition nécessaire et suffisante pour que l'expression $\sum p_i\, dq_i$ soit une différentielle exacte est que les f satisfassent aux équations

$$(f_\lambda, f_\mu) = \sum_s \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial q_s} \frac{\partial f_\mu}{\partial p_s} - \frac{\partial f_\lambda}{\partial p_s} \frac{\partial f_\mu}{\partial q_s} \right) = 0.$$

Jung (*J.*). — [R2*b* ref. R4*d*]. Observations et additions à la Note : « Quelques théorèmes barycentriques ». (646-653).

La Note est à la page 499.

Schiaparelli (*G.-V.*). — [U]. Observations du passage de Vénus sur le disque solaire, faites à l'Observatoire royal de Bréra le 6 décembre 1882. (663-668).

Tome XVI; 1883.

Formenti (*C.*). — [R7]. Propriétés d'une classe de fonctions à plusieurs variables qui se présentent en Dynamique dans le cas d'un mouvement permanent. (76-85).

Si le mouvement est permanent, c'est-à-dire si les vitesses sont des fonctions des coordonnées, où le temps n'entre pas explicitement

$$\frac{dx_t}{dt} = \lambda(x_t, y_t, z_t), \qquad \frac{dy_t}{dt} = \mu(x_t, y_t, z_t), \qquad \frac{dz_t}{dt} = \nu(x_t, y_t, z_t),$$

l'auteur démontre quelques propriétés des fonctions x_t, y_t, z_t. Par exemple, les x_t, y_t, z_t, pour t entier, sont des fonctions *répétées* de x, y, z, ces dernières étant les coordonnées pour $t = 0$; ce qui veut dire que l'on a

$$\begin{aligned} x_m &= x_1(x_{m-1}, y_{m-1}, z_{m-1}), \\ y_m &= y_1(x_{m-1}, y_{m-1}, z_{m-1}), \\ z_m &= z_1(x_{m-1}, y_{m-1}, z_{m-1}), \end{aligned}$$

Les x_t, y_t, z_t dépendent de trois fonctions a, b, c satisfaisant à une même équation aux dérivées partielles

$$\lambda \frac{\partial a}{\partial x} + \mu \frac{\partial a}{\partial y} + \nu \frac{\partial a}{\partial z} = 1.$$

Bertini (*Eug.*). — [P4*f*]. Sur certaines involutions planes. (89-101), (190-208).

L'auteur commence par donner quelques propriétés relatives au système (Ω) des courbes formées par les couples de points correspondants qui se trouvent en ligne droite avec un point donné. Puis il trouve la configuration des points fondamentaux et la construction des involutions de Jonquières d'ordre n et de classes $\frac{n-2}{2}$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n}{2}$ respectivement; il fait aussi la même détermination pour toutes les involutions de la première et de la deuxième classe.

Grandi (*A.*). — [J4*a*]. Généralisation d'un théorème sur la représentation analytique des substitutions. (101-110).

Condition pour que la forme

$$\theta(r) = r^{n-2s} + a_1 r^{\frac{n-2s+1}{2}} + \ldots + a_h r^{\frac{n-2hs+1}{2}} + br \qquad (\bmod n),$$

n^s étant premier, représente une substitution sur n éléments.

Beltrami (*Eug.*). — [T6]. Sur la théorie des couches magnétiques. (208-223).

Au lieu de supposer que l'axe magnétique soit en chaque point normal à la surface, l'auteur suppose que la couche soit magnétisée tangentiellement, c'est-à-dire que, étant a, b, c les coordonnées, α, β, γ les composantes du moment magnétique μ, on ait en tout point de la surface

$$\alpha \frac{da}{du} - \beta \frac{db}{du} + \gamma \frac{dc}{du} = 0.$$

Il donne plusieurs résultats remarquables. Par exemple : l'action extérieure d'une couche à magnétisation tangentielle peut être substituée par celle de deux distributions ordinaires, l'une superficielle et l'autre linéaire. La distribution linéaire, dans une couche qui ne soit pas fermée, manque uniquement lorsque le contour est une *ligne de magnétisation,* c'est-à-dire tangente en chaque point à l'axe magnétique de ce point. L'auteur apporte aussi une rectification à un théorème de Thomson (*Reprint*, n° 523) relatif à l'équivalence d'une distribution solénoïdale à trois dimensions avec une distribution tangentielle sur la surface limite.

Maggi (*J.-A.*). — [T3*b*]. Sur la transmission des mouvements ondulatoires, et particulièrement des mouvements ondulatoires lumineux, d'un milieu isotrope en un autre. (269-288).

Formenti (*C.*). — [B12*c*]. Sur la variabilité symbolique à plusieurs dimensions. (288-304), (351-364).

Généralisation des nombres complexes au point de vue formel, et sans discuter l'existence réelle des nouveaux nombres.

Au lieu de l'équation

$$\varepsilon^2 + 1 = 0,$$

qui donne naissance aux nombres complexes ordinaires, l'auteur part de l'équation

$$\varepsilon^3 - \varpi\varepsilon^2 - \rho\varepsilon - \sigma = 0,$$

où les coefficients sont quelconques (réels ou complexes), et dont les racines α, β, γ sont d'abord supposées distinctes. Il établit, comme définition, l'équivalence de

$$\varphi(\varepsilon) = 0,$$

avec la vérification simultanée de

$$\varphi(\alpha) = 0, \qquad \varphi(\beta) = 0, \qquad \varphi(\gamma) = 0.$$

L'expression

$$p = x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z$$

est ce qu'il appelle un *nombre symbolique à trois dimensions,* et une expression arithmétique

$$f(\varepsilon, x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z)$$

peut se réduire d'une seule manière à la forme

$$X + \varepsilon Y + \varepsilon^2 Z.$$

Pour ces nombres, on a encore la propriété commutative de l'addition et de la multiplication, mais un produit peut être nul sans que le soit aucun de ses facteurs. Le module de p est

$$\sqrt[3]{(x+\alpha y+\alpha^2 z)(x+\beta y+\beta^2 z)(x+\gamma y+\gamma^2 z)}.$$

Pour tout nombre symbolique, on a la transformation

$$p = \tau p_\alpha + j p_\beta + k p_\gamma,$$

étant

$$p_\alpha = x + \alpha y + \alpha^2 z,$$
$$p_\beta = x + \beta y + \beta^2 z,$$
$$p_\gamma = x + \gamma y + \gamma^2 z,$$

et τ, j, k étant les nombres symboliques suivants :

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}}, \qquad j = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}}, \qquad k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}},$$

qui satisfont aux relations

$$\tau^2 = \tau, \qquad j^2 = j, \qquad k^2 = k,$$
$$jk = 0, \qquad \tau k = 0, \qquad \tau j = 0.$$

Suivent les notions de fonction, de dérivée et d'intégrale, appliquées au champ des nombres symboliques. On dit que

$$P = X + \varepsilon Y + \varepsilon^2 Z = \tau P_\alpha + j P_\beta + k P_\gamma$$

est une fonction de

$$p = x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = \tau p_\alpha + j p_\beta + k p_\gamma,$$

lorsque P_α est une fonction de p_α seulement, P_β de p_β, P_γ de p_γ.

La dérivée est définie par

$$\frac{dP}{dp} = \tau \frac{dP_\alpha}{dp_\alpha} + j \frac{dP_\beta}{dp_\beta} + k \frac{dP_\gamma}{dp_\gamma}.$$

En considérant P sous la forme $X + \varepsilon Y + \varepsilon^2 Z$, on a six conditions entre les dérivées partielles premières des X, Y, Z par rapport aux x, y, z, pour que P soit une fonction de p, et chacune des X, Y, Z satisfait aux trois équations aux dérivées partielles du deuxième ordre

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} - \varpi \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z} + \rho \frac{\partial x\, \partial y}{\partial^2 U} - \sigma \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \varpi \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z} + \rho \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z} - \sigma \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} = 0,$$

Étant

$$p_0 = \tau p_\alpha^{(0)} + j p_\beta^{(0)} + k p_\gamma^{(0)},$$

l'intégrale se définit par l'équation

$$\int_{p_0}^{p} \mathrm{P}\, dp = \tau \int_{p_\alpha^{(0)}}^{p_\alpha} \mathrm{P}_\alpha\, dp_\alpha + j \int_{p_\beta^{(0)}}^{p_\beta} \mathrm{P}_\beta\, dp_\beta + k \int_{p_\gamma^{(0)}}^{p_\gamma} \mathrm{P}_\gamma\, dp_\gamma,$$

et l'on a, comme d'ordinaire,

$$\frac{d}{dp} \int_{p_0}^{p} \mathrm{P}\, dp = \mathrm{P}.$$

Dans le cas où deux des racines α, β, γ sont égales entre elles, par exemple $\beta = \gamma$, on établit que

$$\varphi(\varepsilon) = 0$$

équivaut aux conditions simultanées

$$\varphi(\alpha) = 0, \qquad \varphi(\beta) = 0, \qquad \varphi'(\beta) = 0;$$

on a pour p la transformation

$$p = \tau p_\alpha + j p_\beta + j_1 p'_\beta,$$

étant

$$p'_\beta = y + 2\beta z,$$

et τ, j, j_1 des nombres symboliques pour lesquels on a

$$\tau^2 = \tau, \qquad j^2 = j, \qquad j j_1 = j_1,$$
$$\tau j = 0, \qquad \tau j_1 = 0, \qquad j_1^2 = 0.$$

Avec cela, on a des définitions et des propriétés analogues à celles relatives au cas des racines distinctes. De même, par des modifications simples, on traite le cas des trois racines égales.

Au lieu de prendre pour unités irréductibles 1, ε, ε^2 ou τ, j, k, on peut prendre trois nombres symboliques quelconques, linéairement indépendants.

Comme conséquence de la propriété d'un produit de nombres symboliques de pouvoir s'annuler sans qu'aucun de ses facteurs soit nul, un polynome du degré m n'a pas seulement pour racines les nombres qui annulent ses m facteurs simples. On voit qu'il a en tout m^3 racines.

Denza (*F.*). — [U]. Observations du passage de Vénus sur le disque solaire, faites à l'Observatoire du Collège royal Carlo Alberto, à Moncalieri. (309-313).

Formenti (*C.*). — [B12*c* ref. R8]. Quelques applications de la variabilité symbolique à des problèmes de Mécanique. (392-404), (487-496).

Étant

$$p = x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z$$

un nombre symbolique (*voir* ci-dessus FORMENTI, p. 288) avec x, y, z réels, et t étant un paramètre réel (le temps), une fonction

$$p_t = f(p, t) = x_t + \varepsilon y_t + \varepsilon^2 z_t,$$

avec la condition $f(p, 0) = p$, représente un mouvement. En supposant que l'équation qui sert à définir le symbole ε soit

$$\varepsilon^3 - 1 = 0,$$

le mouvement a certaines propriétés particulières relatives à des plans et des droites qui se meuvent parallèlement à elles-mêmes; une autre propriété consiste en ce que, dans le plan

$$x + y + z = 0,$$

qui est fixe, le mouvement conserve la similitude des parties infiniment petites.

L'auteur trouve ensuite la condition pour que le mouvement soit permanent, et une propriété relative aux volumes des molécules d'un fluide en mouvement.

Puis il prend les équations du mouvement sous la forme

$$\frac{dx_t}{dt} = u(x_t, y_t, z_t), \qquad \frac{dy_t}{dt} = v(x_t, y_t, z_t), \qquad \frac{dz_t}{dt} = w(x_t, y_t, z_t),$$

et suppose que les u, v, w soient telles que $u + \varepsilon v + \varepsilon^2 w$ soit une fonction de p. Alors on a

$$\frac{dp_t}{dt} = f(p_t),$$

dont, par intégration,

$$t = \int_p^{p_t} \frac{dp_t}{f(p_t)} = \mathrm{F}(p_t) - \mathrm{F}(p) = \mathrm{U}_t - \mathrm{U} + \varepsilon(\mathrm{V}_t - \mathrm{V}) + \varepsilon^2(\mathrm{W}_t - \mathrm{W});$$

par suite

$$\mathrm{U}_t - \mathrm{U} = t,$$
$$\mathrm{V}_t - \mathrm{V} = 0,$$
$$\mathrm{W}_t - \mathrm{W} = 0,$$

dont la première donne le temps, et les autres la trajectoire.

Dans la suite du Mémoire, à la page 487, l'auteur trouve les conditions pour qu'une double famille de courbes constitue le système des trajectoires d'un mouvement permanent.

Beltrami (*Eug.*). — [T6 ref. T7*c*]. Sur l'équivalence des distributions magnétiques et galvaniques. (431-447).

Afin que le problème soit déterminé, l'auteur suppose que les deux distributions, la galvanique et la magnétique, doivent occuper le même espace, et que les intensités spécifiques de la distribution galvanique doivent dépendre uniquement des moments magnétiques point par point.

Alors, a, b, c étant les coordonnées d'un point de l'espace S occupé par la distribution; u, v, w les composantes de l'intensité spécifique d'un des courants en S; U, V, W celles d'un des courants à la surface σ, et α, β, γ celles du moment magnétique, on a

$$u = \frac{\partial\beta}{\partial c} - \frac{\partial\gamma}{\partial b}, \qquad v = \frac{\partial\gamma}{\partial a} - \frac{\partial\alpha}{\partial c}, \qquad w = \frac{\partial\alpha}{\partial b} - \frac{\partial\beta}{\partial a},$$

$$U = \beta\frac{\partial c}{\partial n} - \gamma\frac{\partial b}{\partial n}, \qquad V = \gamma\frac{\partial a}{\partial n} - \alpha\frac{\partial c}{\partial n}, \qquad W = \alpha\frac{\partial b}{\partial n} - \beta\frac{\partial a}{\partial n},$$

et le problème n'a que cette solution.

Le problème inverse a un nombre infini de solutions, et deux quelconques des distributions magnétiques équivalentes diffèrent par une distribution lamellaire fermée.

Clericetti (*C.*). — [T2*b*]. Sur la détermination des coefficients d'effort spécifique pour le fer, indépendamment des nombres de Wöhler. (501-518).

Schiaparelli (*G.-V.*). — [U]. Observations de la comète Brooks faites dans l'Observatoire royal de Bréra, à Milan. (602-603).

Jung (*J.*). — [R2]. Sur les systèmes dépourvus de barycentre. (621-624).

Morera (*J.*). — [H8*aα*]. La méthode de Pfaff pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (637-644), (691-699).

Application de la méthode de Pfaff à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre ne contenant pas la fonction inconnue. Cette application conduit à la méthode de Jacobi-Hamilton perfectionnée par Mayer.

La suite, à la page 691, contient l'application de la méthode de Pfaff à l'intégration d'un système jacobien qui conduit à une méthode qui est une généralisation de celle de Jacobi-Hamilton.

Celoria (*G.*). — [U]. Latitude de Milan déduite de distances zénitales observées à proximité du méridien. (700-706), (736-745).

Centre de la grande tour de l'Observatoire 45° 27′ 59″,34.

Beltrami (*Eug.*). — [R5*a*]. Sur la théorie du potentiel. (725-736).

L'expression

$$\frac{1}{4\pi}\int \Delta_1(U, V)\, ds,$$

étant

$$\Delta_1(U, V) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z},$$

qui représente le potentiel mutuel de deux distributions dont U et V sont les fonctions potentielles, doit être changée de signe dans le cas que l'une des deux distributions soit une *double couche* au lieu d'être une distribution *ordinaire*. Dans le cas de deux distributions *complexes*, c'est-à-dire dont chacune résulte d'une partie ordinaire et d'une double couche, l'expression mentionnée représente la différence $P_0 - P_1$, P_0 étant le potentiel mutuel des parties ordinaires, et P_1 celui des doubles couches.

Maggi (*J.-A.*). — [T3*b*]. Sur la signification cinématique de la surface des ondes. (745-752).

Schiaparelli (*L.-V.*). — [U]. Sur la figure de la planète Uranus. (752-759).

Casorati (*F.*). — [F2*a*]. La périodicité multiple dans les fonctions d'une seule variable. (815-822).

Une fonction ayant un nombre infini de valeurs pour toute valeur de la variable peut avoir deux périodes dont le rapport soit réel et incommensurable.

L'auteur en donne comme exemple la fonction

$$u = \int_0^Z \left(\frac{1}{Z-1} - \frac{\sqrt{2}}{Z-2}\right) dZ.$$

Ascoli (*G.*). — [O2*c*]. La notion de longueur d'une courbe est indépendante de celle de dérivée. (851-853).

Ferrini (*R.*). — [T7*a*]. Sur diverses manières de distribution du courant à un ensemble de lampes électriques. (853-865).

Formenti (*C.*). — [R8*e*γ]. Expression générale de Lagrange de la force pouvant produire un mouvement tautochrone. (927-936).

Formenti (*C.*). — [B12*c*]. Sur les nombres irréductibles avec les nombres complexes. (981-988). (*A suivre.*)

Aschieri (*F.*). — [N'1*b*, *h*]. Sur certaines formes de droites produites par deux étoiles réciproques. (988-990).

Complexe tétraédral, complexe linéaire, et leur représentation sur l'espace de points.

S. R.

2e 2 Partie

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

Tome XXIX; 1901 [1].

Duporcq. — Sur un remarquable déplacement à deux paramètres. (1-4).

Étant donnés deux quadrilatères complets, symétriques par rapport à une droite, si l'on réunit chaque sommet au symétrique du sommet opposé au moyen de six tiges articulées, le système obtenu est susceptible d'une déformation dépendant de deux paramètres.

Les deux quadrilatères restent constamment symétriques par rapport à une droite. Si l'un d'eux reste fixe, les six sommets de l'autre décrivent des sphères.

En établissant seulement quatre liaisons, on obtient un exemple de *décomposition* d'un déplacement à deux paramètres.

Touche. — Sur une question posée par d'Alembert. (4-7).

Il s'agit du *paradoxe* ainsi formulé par d'Alembert :

« En supposant à un corps solide une certaine figure, ce corps semble ne devoir éprouver aucune résistance de la part d'un fluide où il sera mû, dans les suppositions même qui paraissent les plus légitimes et les moins précaires, sur la manière dont le fluide agit. »

L'explication proposée par M. Touche est fondée sur ce principe : le mouvement d'un point matériel ou son impulsion ne se transmet pas instantanément à un point voisin situé sur la même courbe orthogonale aux trajectoires, mais bien avec une vitesse égale à celle du son dans le fluide considéré et pour la température à laquelle se trouve ce fluide.

Rivereau. — Invariants des équations aux dérivées partielles du second ordre linéaires et homogènes. (7-15).

L'équation

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial z}{\partial x} + 2e\frac{\partial z}{\partial y} + fz = 0,$$

où les coefficients sont des fonctions de x et y, conserve la même forme après la substitution

$$z = u(x, y)\zeta, \qquad \xi = F_1(x, y), \qquad \eta = F_2(x, y),$$

ζ étant une nouvelle fonction des nouvelles variables ξ et η. On peut chercher

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXV_2, p. 154.

à disposer des fonctions u, F_1, F_2 pour simplifier l'équation obtenue par cette substitution.

Si $b^2 - ac \neq 0$, l'équation proposée est réductible à la forme

$$2\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} + 2H\frac{\partial Z}{\partial Y} + KZ = 0,$$

et il n'y a d'autres invariants que ceux de M. Darboux.

Si $b^2 - ac = 0$, on peut arriver à la forme

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} + 2M\frac{\partial Z}{\partial Y} = 0,$$

et il n'y a plus alors qu'un seul invariant dont l'évanouissement exprime que l'équation est réductible à la forme intégrable $r = 0$.

Appell. — Déformation spéciale d'un milieu continu; tourbillons de divers ordres. (16-17).

Bricard. — Sur une propriété du cylindroïde. (18-21).

Dans le Volume précédent du *Bulletin de la Société mathématique*, M. Appell a établi le théorème que voici :

Le cylindre et le cylindroïde (ou conoïde de Plucker) sont les seules surfaces réglées telles que le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur leurs génératrices soit une courbe plane.

M. Bricard démontre à nouveau cette proposition par des considérations purement géométriques et appelle l'attention sur la détermination des surfaces réglées telles que le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur leurs génératrices soit une courbe sphérique. Il signale une surface qui jouit de cette propriété : c'est le conoïde droit ayant pour directrice curviligne la courbe d'intersection d'un cylindre de révolution dont l'axe se confond avec celui du conoïde et d'une sphère ayant son centre sur le cylindre.

Borel. — Sur les formules d'Olinde Rodrigues. (22-26).

L'auteur montre que les formules bien connues

$$(1) \qquad dx + R\,dX = 0, \qquad dy + R\,dY = 0, \qquad dz + R\,dZ = 0$$

peuvent être remplacées, pour la détermination des directions principales et des rayons de courbure principaux, par les suivantes :

$$(2) \qquad dx + \rho\,du = 0, \qquad dy + \rho\,dv = 0, \qquad dz + \rho\,dw = 0,$$

où u, v, w sont proportionnels aux cosinus X, Y, Z de la normale, et où l'on a posé

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

Comme application, il forme, pour une surface représentée par l'équation

tangentielle

$$f(u, v, w, s) = 0,$$

l'équation aux rayons de courbure principaux.

Weill (*M.*). — Sur les points de base d'un faisceau linéaire de courbes algébriques. (26-29).

Démonstration du théorème suivant :

Étant donnés un polygone de $m+1$ côtés, circonscrit à une conique, et un polygone de m côtés, circonscrit à cette même conique, leurs sommets sont les points de base d'un faisceau linéaire de courbes de degré m.

« Ce théorème général, dit l'auteur, est le premier, croyons-nous, qui permette de construire effectivement le groupe des points de base d'un faisceau linéaire de degré quelconque. »

Duporcq. — Sur une extension à l'espace du théorème de Simson. (29-30).

Si cinq points sont tels que les projections de l'un sur les faces du tétraèdre déterminé par les quatre autres soient dans un même plan, cette propriété est symétrique par rapport aux cinq points.

Sparre (*de*). — Sur une application des fonctions elliptiques à l'étude du mouvement des projectiles. (30-39).

Demoulin (*Alph.*). — Sur le cylindroïde et sur la théorie des faisceaux de complexes linéaires. (39-50).

« Dans le dernier fascicule du *Bulletin de la Société mathématique de France*, dit l'auteur, M. P. Appell a établi que le cylindroïde est la seule surface réglée qui jouisse de la propriété suivante :

» *Le lieu des projections orthogonales d'un point pris arbitrairement dans l'espace sur les génératrices est une courbe plane.*

» Je possède depuis près de deux ans une démonstration analytique de ce théorème et je la fais connaître ci-après. A cette méthode échappent les surfaces réglées à plan directeur isotrope. Une méthode directe me conduit aux surfaces de cette nature qui possèdent la propriété du cylindroïde. Ce sont :

» 1° Une surface (A) qui est, comme le cylindroïde, le lieu des axes centraux des complexes linéaires compris dans une série linéaire à deux termes;

» 2° Une surface (B) qui n'admet pas ce mode de génération.

» Ainsi se trouve mis en évidence un fait curieux : alors que la propriété du cylindroïde caractérise cette surface parmi les surfaces réglées réelles ou, plus généralement, parmi les surfaces qui n'ont pas un plan directeur isotrope, cette même propriété ne caractérise pas la surface (A), *de même définition que le cylindroïde,* parmi les surfaces à plan directeur isotrope. »

Les deux surfaces trouvées par M. Demoulin ont pour équations, la première

$$(A) \qquad y = Mz(y - ix) + M^2(y - ix)^3 + N(y - ix)^2,$$

M et N désignant deux constantes *essentiellement différentes de zéro;* la seconde

$$(B) \qquad y = az(y - ix) + a^2(y - ix)^3.$$

Ces deux surfaces se correspondent dans une homographie; elles sont applicables l'une sur l'autre quand $M = a$.

Hadamard. — Sur la propagation des ondes. (50-60).

Hugoniot a, le premier, défini nettement ce qu'il faut entendre par les mots *propagation d'un mouvement dans un autre.* En appliquant sa méthode aux équations de l'Hydrodynamique, il a retrouvé la formule classique donnant la vitesse du son; il a indiqué aussi les conditions de compatibilité de deux mouvements dans une masse gazeuse, mais seulement pour le cas du mouvement rectiligne.

Il y avait donc lieu d'étendre la définition et l'étude de la compatibilité au mouvement à trois dimensions; c'est là l'un des objets du travail de M. Hadamard. Mais l'auteur ne s'en tient pas là. Il complète la méthode d'Hugoniot, d'abord en ce qui concerne son interprétation géométrique, ensuite en distinguant avec soin les faits d'origine purement cinématique et ceux d'ordre purement dynamique, qui ont leur explication dans les propriétés propres aux fluides.

Poincaré (*H.*). — Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes. (61-86).

Sophus Lie a montré qu'une surface (ou une variété de l'espace à plus de trois dimensions) ne peut être *doublement* de translation que si elle est engendrée d'une certaine manière par un système de fonctions abéliennes ou par leurs dégénérescences : son analyse repose sur la considération de certaines équations aux dérivées partielles.

M. Poincaré, qui avait abordé le même problème par une voie toute différente (*Journal de Liouville,* 1895) fait connaître ici une troisième méthode qui a l'avantage de rendre le théorème fondamental presque intuitif et de ne point faire intervenir les équations aux dérivées partielles de S. Lie.

Le premier paragraphe est relatif aux surfaces doublement de translation dans l'espace à trois dimensions. Une pareille surface peut être représentée par les équations

$$\begin{aligned} x &= f_1(t_1) + f_2(t_2), \\ y &= \varphi_1(t_1) + \varphi_2(t_2), \\ z &= \psi_1(t_1) + \psi_2(t_2), \end{aligned}$$

et aussi par le système similaire

$$\begin{aligned} x &= f_3(t_3) + f_4(t_4), \\ y &= \varphi_3(t_3) + \varphi_4(t_4), \\ z &= \psi_3(t_3) + \psi_4(t_4). \end{aligned}$$

A cette double représentation, M. Poincaré associe quatre points M_i mobiles dans un plan et dont les coordonnées homogènes sont

$$f_i'(t_i), \quad \varphi_i'(t_i), \quad \psi_i'(t_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Chacun d'eux décrit une courbe C_i. Ces quatre points sont constamment en ligne droite, et la droite qui les contient est une droite quelconque du plan.

Si l'on fait varier cette droite d'une manière continue, les quatre points M_i varieront aussi d'une manière continue. M. Poincaré démontre que, *quand la droite revient à sa position initiale, l'ensemble des quatre points n'a pas changé;* ces points ont pu seulement s'échanger entre eux.

Il suit de là que l'ensemble des quatre courbes C_i forme une courbe algébrique plane du quatrième ordre, et il devient facile de prouver que les seules surfaces qui soient doublement de translation sont les surfaces

$$\Theta(x, y, z) = 0,$$

où Θ est la fonction thêta ordinaire à trois variables, ainsi que leurs dégénérescences.

Le second paragraphe contient l'extension de ce théorème (*théorème fondamental*) à l'espace à un nombre quelconque de dimensions.

Le troisième est consacré à une discussion au sujet de laquelle l'auteur s'exprime ainsi :

« Malheureusement la démonstration de ce théorème (le théorème fondamental) n'est pas tout et elle devrait être suivie d'une longue discussion, à cause du très grand nombre de cas particuliers que l'on est forcé de distinguer. Je ne les ai pas tous traités; je me suis borné à parler de ceux sur lesquels j'avais à dire quelque chose de nouveau. Pour les autres, qui sont d'ailleurs très particuliers, je n'aurais pu que renvoyer aux travaux de Lie. »

Saltykow (*N.*). — Sur les intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction. (86-95).

L'auteur étudie les équations en involution

$$(1) \qquad F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

en désignant par p_s la dérivée $\dfrac{\partial z}{\partial x_s}$ et en supposant différent de zéro le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(p_1, p_2, \ldots, p_m)}.$$

Le système correspondant d'équations linéaires aux dérivées partielles d'une seule fonction f étant représenté suivant la notation classique de Mayer par

$$(2) \qquad [F_k, f] = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

on suppose connues toutes les intégrales distinctes de ce système. M. Saltykow montre comment on peut, à l'aide de ces dernières intégrales, former celle du système (1), c'est-à-dire exprimer au moyen des variables indépendantes x_1,

$x_2, \ldots, x_n$ des fonctions

$$z, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n$$

vérifiant les identités

$$\frac{\partial z}{\partial x_s} = p_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

et satisfaisant aux équations (1).

Autonne (*Léon*). — Sur une manière de représenter géométriquement un système de trois variables complexes. (95-118).

Extrait de l'introduction. — « N variables complexes sont toujours assimilables aux N coordonnées d'un point X dans un espace $\mathcal{R}$, à N dimensions complexes. Comme X dépend de 2N paramètres réels, X peut être représenté, dans un espace réel R à N dimensions, par un *couple* Ξ de deux points x et x'. Il est loisible d'employer dans R les coordonnées homogènes

$$X_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, N+1,$$

et la dualité.

» Une variété de $\mathcal{R}$ à m dimensions complexes, fournie par $N - m$ équations entre les X_j, est représentée dans R par une variété M_{2m} de ∞^{2m} couples Ξ.

» Dans la présente Note, je cherche à préciser ces théories, dans le cas $N = 3$, où R est l'espace ordinaire à trois dimensions. J'emploie surtout les couples Ξ où le point x' est à l'infini.

» Après avoir, dans le Chapitre I, introduit les couples, je construis, dans le Chapitre II, les variétés M_1 et M_2 qui représentent dans R le plan et, par dualité, le point et la droite de l'espace imaginaire $\mathcal{R}$.

» Dans le couple Ξ des deux points x et x', je distingue le *support,* qui est la droite xx', un point *modulaire* ζ et trois angles *arguments* ω, φ et ψ.

» Le modulaire ζ et les arguments ω, φ et ψ s'introduisent d'une façon projective et géométrique (considération d'un certain système de quadriques, autopolaires par rapport au tétraèdre de référence), qui est analogue à celle du module et de l'argument, pour la variable imaginaire unique.

» Après avoir, au Chapitre III, établi les propriétés du modulaire et des arguments, je construis, au Chapitre IV, le point imaginaire X, ou le couple Ξ, qui admet des arguments et un module donnés.

» On a à considérer des intersections de complexes et de congruences de droites, ainsi qu'une certaine surface réglée du quatrième degré.

» J'interprète aussi très simplement la substitution linéaire quaternaire canonique

$$S = | X_j, \quad X_j e^{i\theta_j} | \qquad (j = 1, 2, 3, 4),$$

où les angles θ sont constants. S ne modifie pas le modulaire; elle peut être envisagée comme une généralisation de la *rotation autour de l'origine des coordonnées,* rotation qui représente la substitution canonique

$$| t, \quad te^{i\tau} |$$

pour la variable complexe tonique t dans la conception habituelle des imaginaires. »

Cartan (*E.*). — Sur quelques quadratures dont l'élément différentiel contient des fonctions arbitraires. (118-130).

Dans diverses questions d'Analyse et de Géométrie se présentent des intégrales de la forme

$$J = \int [M(x, y, y')y'' - N(x, y, y')]\, dx,$$

où y est une fonction arbitraire de x, y' et y'' ses dérivées. On cherche alors à exprimer, *sans aucun signe de quadrature*, x, y et J au moyen d'un nouvel argument, d'une fonction arbitraire de cet argument et des dérivées de la fonction arbitraire. Ce problème rentre dans le suivant :

Résoudre, de la manière la plus générale, l'équation

$$\frac{dz}{dx} = A\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + B\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}\right),$$

où y et z sont des fonctions de x.

Ce dernier problème, qui comprend comme cas particulier le problème de Monge ($A = 0$), est lui-même un cas particulier de l'intégration d'un système de deux équations de Pfaff à quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4

$$(1)\qquad \begin{cases} \omega = a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + a_3\, dx_3 + a_4\, dx_4 = 0, \\ \varpi = b_1\, dx_1 + b_2\, dx_2 + b_3\, dx_3 + b_4\, dx_4 = 0. \end{cases}$$

L'intégration générale de ce système a été effectuée par M. Engel (*Leipziger Berichte*, t. XLI) qui l'a ramené, au moyen d'un changement de variables, à la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} dy_2 - y_3\, dy_1 = 0, \\ dy_3 - y_4\, dy_1 = 0. \end{cases}$$

La solution devient alors évidente; elle est fournie par les formules

$$y_2 = f(y_1), \qquad y_3 = f'(y_1), \qquad y_4 = f''(y_1),$$

exception faite de la solution particulière où y_1, y_2, y_3 sont trois constantes arbitraires, y_4 restant quelconque.

La considération des covariants bilinéaires des deux expressions ω et ϖ fournit à M. Cartan une méthode directe pour réduire le système (1) à la forme canonique (2), sans omettre aucun des cas particuliers qui peuvent se présenter.

L'auteur fait l'application de cette méthode à l'équation de Monge

$$F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0$$

et à l'intégrale

$$J = \int y^m \frac{d^2y}{dx^2}\, dx,$$

où y désigne une fonction arbitraire de x.

En terminant, il traite à nouveau les quadratures

$$u = \int \frac{dx}{1 + xy}, \qquad v = \int \frac{dy}{1 + xy},$$

où x et y sont liées par une relation arbitraire, qui avaient fait l'objet d'un travail antérieur de M. Beudon (*Bull. de la Soc. mathém. de France*, t. XXIII, p. 107-116).

Bricard (*R.*). — Sur les systèmes réciproques de points. (130-139).

L'auteur convient de considérer comme *identiques* deux systèmes de n points

$$S = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{et} \quad S' = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

qui forment deux figures directement ou inversement semblables.

Étant donné un système $S = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, on prend le point a_1 pour pôle et l'on soumet à une inversion de puissance arbitraire le système des points $a_2, \ldots, a_n$. A la suite de cette transformation (dite *opération* R_1), le système S est remplacé par un système $(a_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ que l'auteur appelle *réciproque du système* S par rapport *au point* a_1. Plus généralement, si un système $S' = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est *identique* au système $(a_1, a'_2, \ldots, a'_n)$, on dira que les systèmes S et S' sont réciproques par rapport au couple de points (a_1, b_1).

Voici la propriété fondamentale des systèmes réciproques :

Si deux systèmes de points $S = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $S' = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sont réciproques par rapport à un couple de points (a_1, b_1) les systèmes dérivés de S par l'application des diverses opérations $R_2, \ldots, R_n$ et les systèmes dérivés de S' par l'application des mêmes opérations sont géométriquement identiques (c'est-à-dire à l'ordre près des indices).

Après avoir démontré cette proposition, l'auteur la généralise et en tire diverses conséquences.

Pellet. — Sur la formule d'approximation de Newton. (139-142).

Servant. — Sur les formules de Gauss. (142-145).

L'auteur fait remarquer que les formules fondamentales de Gauss dans la théorie des surfaces doivent souvent être préférées à celles de Codazzi. C'est ainsi qu'elles permettent de résoudre presque sans calcul trois problèmes importants, traités par Ossian Bonnet : recherche des surfaces à courbure moyenne constante applicables sur les surfaces de révolution; recherche des surfaces qui admettent une déformation conservant soit les lignes de courbure, soit les rayons de courbure principaux. M. Servant montre en quelques lignes comment on peut déterminer intrinsèquement les surfaces qui jouissent de cette dernière propriété, puis il résout la même question pour l'espace non euclidien, auquel les formules de Gauss s'appliquent au prix d'une légère modification.

Laisant (*C.-A.*). — Sur certaines suites récurrentes. (145-149).

Lecornu (*L.*). — Sur la vis sans fin. (149-153).

La surface conjuguée de la vis sans fin à filet triangulaire est la développable, lieu des tangentes à une spirale hyperbolique enroulée sur un cône de

révolution dont le sommet est au pôle de la spirale; les sections faites dans cette surface perpendiculairement à l'axe du cône sont des développantes des sections du cône; la section dont le plan passe par le sommet du cône est circulaire.

Borel (*Ém.*). — Sur les ordres d'infinitude. (154-156).

Détermination de l'ordre d'infinitude des fonctions que l'on obtient en combinant e^x, x^m et $\log x$.

Indication d'une définition plus large de l'ordre d'infinitude.

Lindelöf (*Ernst*). — Sur le prolongement analytique. (157-160).

Soit $f(x)$ une fonction analytique définie par son développement en série entière

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_\nu x^\nu + \ldots,$$

dont le rayon de convergence est supposé fini. Soit A l'*étoile principale* correspondante (terminologie de M. Mittag-Leffler). En menant par chaque sommet de A une droite perpendiculaire au rayon vecteur de ce point, on forme un polygone P, à l'intérieur duquel M. Lindelöf se propose de représenter $f(x)$ par une série de polynomes.

La question revient à représenter $\frac{1}{1-x}$ par une série de polynomes qui converge dans le demi-plan situé à gauche de la droite $x = 1$. Posant

$$P_n(x) = \frac{1}{n-1}\left[1 + \frac{x-n}{n-1} + \left(\frac{x-n}{n-1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x-n}{n-1}\right)^{(n-1)^2}\right],$$

l'auteur prouve que la série de polynomes

$$P_1(x) + [P_2(x) - P_1(x)] + [P_3(x) - P_2(x)] + \ldots$$

est uniformément convergente et répond à la question.

De là résulte la solution du problème proposé. Si l'on pose

$$P_n(x) = \sum_0^{(n+1)^2} \frac{1}{(n-1)^{\nu+1}}(a_\nu x^\nu + C_\nu^1 n a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + C_\nu^\nu n^\nu a_0),$$

C_ν^p désignant le nombre des combinaisons de ν objets p à p, la série

$$P_1(x) + [P_2(x) - P_1(x)] + [P_3(x) - P_2(x)] + \ldots$$

est uniformément convergente et représente la fonction $f(x)$, définie par le développement (1), dans toute aire entièrement intérieure au polygone P.

Torrès (*L.*). — Sur les rapports entre le calcul mécanique et le calcul graphique. (161-167).

Torrès (*L.*). — Sur l'utilité des exemples cinématiques dans l'exposition des théories mathématiques. (167-172).

« Les mathématiciens, dit l'auteur, emploient volontiers des exemples géométriques pour illustrer leurs explications; ils trouveraient souvent, je pense, plus d'avantages à employer des exemples cinématiques qui seraient généralement plus exacts et plus suggestifs. »

Après avoir donné des raisons à l'appui de cette opinion, M. Torrès décrit :

1° Un appareil qui sert à construire une fonction à deux déterminations avec deux points critiques en montrant la permutation des deux déterminations chaque fois que le point décrivant parcourt un contour fermé qui contient un seul point critique;

2° Un appareil propre à représenter la fonction $\log z$.

Greenhill (*A.-G.*). — Appareil stéréoscopique pour mettre en relief les figures géométriques se rapportant aux fonctions elliptiques. (172-175).

Lecornu (*L.*). — Sur la dynamique des corps déformables. (176-190).

La théorie générale de la rotation d'un corps de forme variable est exposée dans le Tome II du *Traité de Mécanique céleste* de Tisserand. La présente Note a pour objet de formuler quelques remarques qui se rattachent à cette théorie et qui concernent principalement les propriétés de la force vive.

On prend pour origine O des coordonnées le point fixe du corps, comme axes mobiles de coordonnées les trois axes d'inertie principaux relatifs au point O. Soient A, B, C les moments d'inertie principaux; p, q, r les composantes de la rotation instantanée éprouvée par le trièdre des trois axes; f, g, h les sommes des moments des quantités de mouvement relatives aux axes (*moments de rotation*, de Tisserand). La force vive totale a pour expression

$$2T = \Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2(fp + gq + hr).$$

Le premier terme est la force vive *relative;* la somme des trois suivants est la force vive *d'entraînement;* le troisième groupe de termes est ce que l'auteur appelle la *force vive composée* $2(fp + gq + hr)$.

A un autre point de vue, M. Lecornu distingue la force vive *utilisable* qui subsisterait seule si, par l'introduction de nouvelles liaisons intérieures, on solidifiait subitement le système, de manière à rendre x, y, z indépendants du temps; la force vive *inutilisable* est celle qui disparaîtrait au même instant.

La force vive utilisable a pour expression

$$\Sigma m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \left(\frac{f^2}{A} + \frac{g^2}{B} + \frac{h^2}{C}\right);$$

par suite, la force vive utilisable est égale à

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + \frac{f^2}{A} + \frac{g^2}{B} + \frac{h^2}{C} + 2(fp + gq + hr).$$

Pour que la force vive soit entièrement utilisable, il faut que le mouvement relatif, s'il existe, se réduise à une rotation, et que l'axe de cette rotation

coïncide avec un axe principal qui soit en même temps un axe de révolution de l'ellipsoïde d'inertie.

Comparant ensuite le travail des forces extérieures avec la force vive utilisable, pour un système dont aucune partie ne peut s'écarter indéfiniment du point fixe et dont la masse ne peut jamais se concentrer tout entière au point fixe, M. Lecornu prouve que :

1° Dans le cas où il n'y a pas de forces extérieures, la force vive utilisable est limitée;

2° S'il y a des forces extérieures dérivant d'un potentiel uniforme, si petites qu'on les suppose, la force vive utilisable peut croître avec le temps au delà de toute limite.

M. Lecornu démontre ensuite que, si les moments d'inertie A, B, C sont constants, et s'il n'y a pas de forces extérieures, on peut se donner f, g, h en fonction du temps et trouver le mouvement par de simples quadratures. Si, en particulier, f, g, h sont supposés constants, la force vive d'entraînement reste constante, comme pour un solide indéformable.

Dans ce dernier cas, on peut trouver, comme dans la théorie de Poinsot, une représentation géométrique du mouvement, grâce à la considération de l'ellipsoïde central d'inertie.

Adhémar (*Robert d'*). — Sur une intégration par approximations successives. (190-199).

Étant donnée l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = h(x, y, z)\,u + f(x, y, z),$$

l'auteur se propose de trouver l'intégrale u qui prend, ainsi que l'une de ses dérivées, des valeurs données sur une surface donnée. Il y parvient, en s'inspirant des travaux de M. Picard et de M. Volterra, par une méthode qui s'applique encore à d'autres équations analogues.

Weill (*M.*). — Sur une classe de polygones de Poncelet. (199-208).

Deux cercles O, O′ se coupent aux points cycliques I, J et en deux autres points A, B. S'il existe des polygones de $2m$ côtés inscrits au cercle O et circonscrits au cercle O′, il existe une ligne polygonale formée de m tangentes au cercle O′, A étant le point de contact de la première tangente, B, I ou J le point de contact de la dernière et dont les $(m+1)$ sommets sont sur le cercle O; réciproquement, s'il existe une pareille ligne, on peut inscrire au cercle O un polygone de $2m$ côtés, qui soit circonscrit au cercle O′.

Il y a deux cas à distinguer :

1° La ligne commençant en A se termine en B; dans ce cas, il y a aussi une ligne commençant en I et se terminant en J. Après avoir étudié les exemples les plus simples de ce cas ($m = 2, 3, 4, 5$), l'auteur en fait la théorie générale, que résument des formules simples.

2° La ligne commençant en A se termine en I ou en J. Les résultais relatifs

à ce second cas sont absolument différents de ceux du premier cas et beaucoup plus compliqués. Aussi doit-on préférer à la méthode générale l'étude de chaque exemple particulier, comme pouvant seule conduire aux simplifications possibles.

Maillet (*Edm.*). — Sur les systèmes complets d'équations aux dérivées partielles. (209-216).

L'auteur commence par établir le théorème que voici :

Soient deux systèmes complets :

$$(1)\qquad \begin{cases} Y_1 = 0, & \ldots\ldots \quad Y_p = 0, \\ Z_1 = 0, & \ldots\ldots \quad Z_q = 0, \end{cases}$$

et deux systèmes de solutions indépendantes

$$(2)\qquad \begin{cases} \Omega_1, & \ldots\ldots \quad \Omega_{n-p}, \\ \Theta_1, & \ldots\ldots \quad \Theta_{n-q}, \end{cases}$$

de ces deux systèmes. Pour que l'ensemble des équations (1) *forme un système complet à* $p+q-s$ *équations, il faut et il suffit que l'ensemble des fonctions* (2) *comprenne* $n-s$ *fonctions indépendantes et que les deux systèmes complets* (1) *aient* $n-(p+q-s)$ *solutions communes.*

Ensuite viennent une interprétation géométrique et une proposition en quelque sorte réciproque du résultat ci-dessus.

Lemoine (*Em.*). — Détermination simple de la direction des axes d'une conique. (217-220).

Maillet (*Edm.*). — Sur certains théorèmes de Géométrie cinématique. (221-224).

L'auteur donne de certains résultats dus à M. Mannheim une généralisation contenue dans le théorème suivant :

Soit un système invariable mobile dont les positions dépendent d'un ou de deux paramètres. A chaque point $p(X, Y, Z)$ *de ce système faisons correspondre un plan* P

$$AX_1 + BY_1 + CZ_1 + D = 0$$

(OXYZ *axes fixes*), *les coefficients* A, B, C, D *dépendant rationnellement de* X, Y, Z *et de leurs dérivées par rapport aux paramètres variables.*

Pour une position quelconque du système, considérons :

1° *Les points p qui sont sur une courbe unicursale et les plans* P *correspondants; l'enveloppe de ces plans* P *est une surface réglée unicursale dont l'arête de rebroussement est unicursale;*

2° *Les points p qui sont sur une surface unicursale et les plans* P *correspondants; leur enveloppe est unicursale.*

Hadamard. — Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles. (224-228).

Les travaux de M. Poincaré ont montré comment une solution périodique d'un système d'équations différentielles quelconques était, en général, entourée d'un cortège de solutions asymptotiques. Dans certains cas, toute solution suffisamment voisine de la solution périodique est par cela même asymptotique. Dans d'autres, l'asymptotisme n'a lieu que pour les trajectoires situées sur certaines surfaces passant par la courbe fermée qui sert de point de départ. Pour former les équations de ces surfaces, M. Poincaré emploie des développements en séries entières, établis en supposant analytiques les équations données.

M. Hadamard traite la même question au point de vue exclusivement réel et sans faire intervenir l'analyticité des données.

Pellet (A.). — Sur la méthode d'approximation de Newton. (228-230).

La formule d'approximation de Newton est susceptible de l'extension suivante. Soit l'équation

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = 0.$$

Désignons par u la racine de plus petit module de l'équation obtenue en se bornant aux $i+1$ premiers termes

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_i x^i = 0.$$

En prenant

$$u - \frac{f(u)}{f'(u)}$$

pour valeur approchée de la racine de plus petit module de l'équation $f(x) = 0$, on commet une erreur dont l'auteur donne une limite supérieure.

Servant. — Sur la déformation des quadriques. (231-232).

Par l'application des formules de Gauss aux quadriques rapportées à leurs génératrices rectilignes ($u =$ const., $v =$ const.), M. Servant fait ressortir de nouvelles analogies entre les surfaces qui résultent de leur déformation et les surfaces à courbure totale constante.

Il donne ensuite les équations qui définissent pour les déformées des quadriques u et v en fonction des paramètres (α, β), des lignes asymptotiques et signale deux intégrales intermédiaires du système considéré, savoir

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial v}{\partial \beta} = \Omega.$$

A l'aide de ces intégrales, mises sous la forme

$$\frac{u'_\alpha}{v'_\beta} = \frac{u'_\beta}{v'_\alpha} = \lambda,$$

il prouve que λ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \lambda \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u^2} - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial v^2},$$

qui se réduit à celle des surfaces à courbure totale constante quand la quadrique proposée est une *sphère*, une *surface de révolution* ou un *paraboloïde quelconque*.

Cartan (*Elie*). — Sur l'intégration de certains systèmes de Pfaff, de caractère deux. (233-302).

Introduction. — « Dans une Mémoire inséré tout récemment dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, j'ai étudié la question de l'existence des intégrales d'un système d'équations aux différentielles totales quelconques. J'ai montré en particulier que, en ce qui concerne les intégrales non singulières, la dimension maxima de l'intégrale et la nature de son indétermination étaient fournies complètement par l'étude purement géométrique d'un certain système de complexes linéaires dans un espace à un nombre convenable de dimensions. On est ainsi conduit à une série de n entiers, n désignant la dimension maxima de l'intégrale du système,

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_n,$$

dont le premier a déjà été introduit par M. E. von Weber, qui l'a nommé le *caractère* du système. Ces entiers ne vont pas en croissant; de plus, en formulant d'une manière convenable le problème de la détermination des intégrales, j'ai montré que l'intégrale générale dépendait de

s_n	fonctions arbitraires de	n	arguments,
s_{n-1}	»	$n-1$	»
.....			
s_1	»	1	»

et enfin de s constantes arbitraires, s désignant le nombre des équations du système.

» Le cas où le caractère s_1 est égal à l'unité comprend comme cas particulier le système formé d'une seule équation de Pfaff et a fait l'objet du Mémoire de M. von Weber.

» Je m'occupe, dans ce présent Mémoire, des systèmes de caractère *deux* qui comprennent comme cas particuliers les systèmes formés de deux équations de Pfaff, et aussi les systèmes auxquels sont équivalentes les équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de deux variables indépendantes. Mais, en réalité, je ne traite que le cas de certains systèmes de caractère *deux* que je qualifie de *systèmes singuliers* pour la raison suivante. En général, si les coefficients d'un système de Pfaff sont des fonctions quelconques des variables, les $n-1$ caractères $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ sont tous égaux entre eux et égaux au nombre s des équations du système. Pour un système de caractère *deux* à coefficients non particuliers, on a donc

$$s_2 = s_3 = \ldots = s_{n-1} = 2,$$

s_n pouvant avoir l'une des trois valeurs 0, 1, 2. *Les systèmes que j'appelle* singuliers *sont ceux pour lesquels* s_{n-1} *est inférieur à* 2. Il faut ajouter une autre restriction : c'est que l'intégrale générale n'est pas engendrée par des caractéristiques analogues à celles des équations aux dérivées partielles du second ordre; caractéristiques que j'étudie complètement dans le Mémoire

précité; cette restriction n'en est d'ailleurs pas une, car tout système engendré par des caractéristiques de cette nature se ramène facilement à un système sans caractéristiques.

» Le résultat fondamental obtenu dans ce travail est que ces *systèmes singuliers s'intègrent par des équations différentielles ordinaires*. Mais, chemin faisant, la suite des raisonnements m'a conduit à introduire la notion de système *systatique;* j'appelle ainsi un système jouissant de la propriété que toutes les intégrales qui passent par un point donné et admettent en ce point une tangente donnée admettent en ce point une deuxième tangente commune. La notion de ce que j'appelle les *caractéristiques de Monge* se présente aussi tout naturellement; comme les caractéristiques dont j'ai parlé précédemment, elles engendrent les intégrales générales : par chaque point d'une intégrale générale il en passe une, et une seule; mais elles dépendent dans leur ensemble de fonctions arbitraires, c'est-à-dire que par tout point de l'espace il en passe une infinité; les caractéristiques dont il est question plus haut, au contraire, ou *caractéristiques de Cauchy,* dépendent seulement de constantes arbitraires. Enfin, dans certains systèmes singuliers, il se présente une troisième catégorie de caractéristiques, celles de ces caractéristiques qui sont situées sur une multiplicité intégrale donnée dépendant de fonctions arbitraires.

» Ce Mémoire est divisé en quatre Chapitres. Le premier est consacré à rappeler les résultats généraux sur les systèmes de Pfaff; le second, à exposer la théorie des systèmes de caractère *un* à un point de vue différent de celui de M. von Weber, bien que les résultats soient naturellement les mêmes. Le troisième Chapitre est consacré aux systèmes systatiques et à l'étude géométrique des systèmes singuliers, ou plutôt des complexes linéaires qui leur sont associés. Enfin le quatrième Chapitre s'occupe de l'intégration proprement dite de ces systèmes. »

Petrovitch (*Michel*). — Remarque sur les zéros des séries de Taylor. (303-312).

En appliquant aux séries entières un théorème de M. Hadamard sur la limite supérieure du module d'un déterminant, pour lequel on connaît des limites supérieures des modules des éléments, l'auteur démontre que :

Si l'on désigne par λ *le plus petit module des zéros de la série*

$$f = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

et si l'on forme la fonction

$$u(z) = \frac{1}{z^2}\left|\sum_0^\infty |a_n z^n|^2\right.,$$

on aura

$$\lambda > \frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}},$$

quelle que soit la valeur de la variable complexe z *à l'intérieur du cercle de convergence de la série* f.

On a ainsi le moyen de calculer des limites inférieures des modules des

racines d'une série entière, lorsqu'on se donne la loi des coefficients ou, du moins, les valeurs numériques d'un nombre suffisant de ces coefficients.

Après quelques indications sur la mise en œuvre de ce procédé, M. Pétrovitch en fait l'application à diverses séries entières. Il termine en établissant la proposition suivante :

Une fonction $f(z)$ holomorphe dans une circonférence C *décrite autour de l'origine comme centre, ne s'annulant pas à l'origine, ne saurait avoir de racine de module inférieur à l'expression*

$$\frac{|f(0)|}{M},$$

où M *désigne la plus grande valeur que prend le module du rapport de la fonction majorante de $f(z)$ à la variable z pour les valeurs de z comprises à l'intérieur de la circonférence* C.

Séguier (*de*). — Courbe remplissant un cube à n dimensions. (312-314).

Combebiac. — Sur la force vive utilisable. (314-317).

Cette Note se rapporte au Mémoire de M. Lecornu : *Sur la dynamique des corps déformables* (*voir* ci-dessus), qu'elle complète par la démonstration du théorème suivant :

Dans le cas où les forces extérieures se font équilibre, la force vive utilisable *est uniquement fonction de la position du système.*

L'auteur prouve, de plus, en désignant par ε le vecteur représentatif de l'axe instantané de rotation du mouvement que prendrait le système, s'il était brusquement solidifié, que :

Si les forces intérieures n'équilibrent pas l'action des forces centrifuges, le système se dilatera et la force vive utilisable diminuera en même temps que ε; si, au contraire, les forces intérieures centripètes ont la prépondérance sur les forces centrifuges, le système se condensera et la force vive utilisable augmentera.

M. Combebiac signale en terminant une décomposition remarquable du mouvement à laquelle donne lieu la considération de la force vive utilisable.

Ripert (*L.*). — Sur trois propriétés de six points d'une conique. (317-320).

Pellet. — Sur la méthode d'approximation de Newton. (320-322).

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXVI.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXVI; 1902. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Annales scientifiques de l'École normale supérieure. 3e série, T. XVII, 1900. — 150-157.

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. T. XXXIV, 1898-1899. — 32-43.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. XXIX, 1901. — 185-200.

Catalogue international de la Littérature scientifique. — 64-73.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. CXXXII, CXXXIII, 1901. — 73-90.

Journal de l'École Polytechnique. 2e série, Cahiers II, III, IV, 1897-1898. — 140-150.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, édité par Kronecker. T. 105, 106, 107, 1889-1891; t. 108, 109, 110, 111, 112, 113, 1891-1894. — 5-32, 91-144.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Ser. II, t. IX, X, XI, XII, XIII, 1876-1880; t. XIV, XV, XVI, 1881-1883. — 43-64, 171-184.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. T. XLIV, XLV, 1899-1900. — 157-170.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Adamezick (J.). 169.
Adhémar (R. d'). 75, 195.
Aimonetti (C.). 42.
Alezais (R.). 76.
Almansi (S.). 34.
Appell (P.). 83, 107, 186.
Armengaud (J.). 87, 89.
Aschieri (F.). 43, 53, 171, 172, 173, 174, 184.
Ascoli (G.). 176, 184.
Autonne (L.). 77, 80, 82, 142, 143, 190.
Bachelier (L.). 150.
Baravelli (G.). 159.
Bardelli (J.). 43, 53, 175.
Beck (A.). 17, 160.
Belgiojoso (C.). 53.
Beltrami (E.). 45, 49, 52, 53, 55, 173, 176, 178, 182, 183.
Bemporal (A.). 40.
Bertini (E.). 173, 174, 178.
Beuriger. 170.
Beyel (C.). 162.
Blumenthal (O.). 168.
Bohlmann (G.). 137.
Böklen (O.). 162.
Borel (E.). 78, 79, 185, 186, 193.
Borletti (F.). 175.
Boulanger (A.). 146.
Boussinesq (J.). 83.
Boutroux (P.). 75.
Bricard (R.). 78, 186, 192.
Brusetti (F.). 50.
Brioschi (F.). 46, 47, 50.
Buhl (A.). 75.
Burali-Forti (C.). 166.
Busche (E.). 16, 115.
Cantor (M.). 47.
Cardinaal (J.). 117.
Cartan (E.). 191, 198.
Carrera (L.). 41.
Cartaud (G.). 83.
Carvallo (E.). 88.
Casorati (F.). 44, 47, 50, 51, 54, 177, 184.
Caspary (F.). 24.
Cayley (A.). 29, 125, 134.
Cazzaniga (T.). 40, 175.
Celoria (G.), 172, 183.
Chéneveau (C.). 83.
Chessin (A.). 87.
Chini (M.). 34.
Clairin (J.). 75.
Clericetti (C.). 53, 171, 183.
Collignon (E.). 148.
Colombo (J.). 44.
Combebiac. 200.
Cosserat (E.). 82, 83, 84.
Cosserat (F.). 82, 83, 84.
Cotton (E.). 150, 151.
Coulon (J.). 75, 82.
Cousin (P.). 77.
Czuber (E.). 9, 159.
Daniele (H.). 35, 40.
Daniels (M.). 169.
Darboux (G.). 76.
Davidoglou (A.). 86, 87, 154.
Décombe. 82.
Delassus. 154.
Demartres. 82.
Demoulin (A.). 79, 83, 87, 88, 187.
Denza (F.). 181.
Desaint (L.). 79.
Doehlemann (K.). 168.
Dörge. 170.
Deslandres (H.). 88.
Dickson (L.). 81.
Donder (Th. de). 85.
Duhem (P.). 74, 76, 77, 78, 79, 80, 86.
Dulac (H.). 79, 80, 83.
Dumont. 81.
Duporcq (E.). 185, 187.
Duport (H.). 73, 77.

Eberhardt (V.). 16.
Eggenberger (J.). 166.
Egorov (D.). 74, 75, 76, 81.
Enriques (F.). 74.
Estanave (E.). 154.
Fano (G.). 37.
Ferrini (R.). 50, 53, 184.
Fields (J.). 131.
Fitting (F.). 168.
Formenti (C.). 172, 174, 178, 179, 181, 184.
Frémont (C.). 74, 85.
Frobenius (G.). 6, 17, 107.
Fuchs (L.). 14, 20, 94, 129.
Gabba (L.). 41.
Geusen (L.). 163.
Giudice (F.). 35.
Godefroy (R.). 141.
Goursat (E.). 144.
Grandi (A.). 178.
Grassi (G.). 48.
Gravaris (G.). 84.
Greenhill (A.). 194.
Grünwald (J.). 164.
Guichard (C.). 75, 76.
Guidi (C.). 36.
Guillaume (C.). 79.
Guldberg (A.). 90.
Günther (P.). 5, 20, 30, 95, 99, 103, 104, 138.
Gutzmer (A.). 111.
Hadamard (J.). 188, 197.
Haentzehel (E.). 128.
Hambürger (M.). 111, 120, 130.
Hammer (E.). 161.
Hancock (H.). 151.
Hauck (G.). 90, 122.
Hayashi (P.). 164.
Hatzidakis (J.). 125, 128.
Heffter (L.). 19, 104, 118, 162.
Heilermann (H.). 161.
Hele-Schaw (H.). 80.
Henneberg (L.). 137.
Hensel (K.). 13, 28, 92, 112, 121, 134, 136, 138.
Hermite (C.). 22.
Heun (K.). 159, 165.
Hess (E.). 117.
Hettner (G.). 128.
Heymann (W.). 101, 135, 138, 162.
Hilbert (D.). 109, 151.
Holzmüller. 161.
Horn (J.). 134.
Huber (G.). 167.
Humbert (G.). 74, 85.
Hürwitz (A.). 24, 76, 81, 95, 98.
Jadanza (N.). 42.
Jahnke. 132.
Jordan (C.). 74.
Jolles (S.). 164.
Jonquières (de). 77.
Jouguet (E.). 77.
Jung (J.). 43, 44, 45, 166, 174, 176, 177, 183.
Kapteyn (W.). 152.
Kantor (S.). 74.
Killing (W.). 102.
Klein (F.). 50, 55.
Kneser (A.). 15, 135.
Knoblauch (J.). 124, 125.
Kœnigs (G.). 82, 84, 85, 86.
Kœnigsberger (L.). 9, 116, 121, 129, 136.
Köhler (C.). 101.
Kohn (G.). 21.
Kokott (P.). 169.
Kosch (F.). 168.
Kötter (F.). 100, 113.
Kowalewski (S. von). 92.
Krazer (A.). 118.
Krimphoff (W.). 108.
Kronecker (L.). 8, 11, 21, 24, 28, 32, 97, 98.
Kübler. 170.
Lacour (E.). 154.
Laisant (C.). 192.
Landsberg. 104, 118, 123.
Laurent. 140.
Lauricella (J.). 33.
Lebesgue. 79.
Lecornu (L.). 154, 192, 194.
Lelieuvre (M.). 80.
Lemoine (E.). 196.
Lévy (B.). 42.
Liapounoff. 74, 78.
Liebmann. 164.
Liouville (R.). 85.
Lindelöf (E.). 90, 193.
Lipschitz (R.). 7, 15.
Lœwy (A.). 90.
Lorenz (H.). 157.
Lugli (A.). 172.
Maggi (J.). 175, 179, 184.
Maillet (E.). 76, 77, 78, 79, 87, 88, 89, 196.
Mandl (M.). 138.
Marey. 80.
Marre (A.). 38.
Maurer (L.). 23.
Mehmke (R.). 159, 161.
Meisel (P.). 163.
Mesnager. 81, 99.
Méray. 150.
Meyer (A.). 92, 127, 137.
Meyer (W.). 168.

Miller (G.). 78, 86.
Minkowski (H.). 14, 29. 73.
Mirimanoff (D.). 101, 117.
Mittag-Leffler (G.). 38, 77, 81, 84.
Morera (J.). 177, 183.
Müller (E.). 159.
Netto (E.). 16, 93, 112, 116.
Niels Nielsen. 89.
Ocagne (M. d'). 78, 150.
Padé (H.). 77, 78.
Padeletti (D.). 48.
Painlevé (P.). 88.
Pareto (W.). 114.
Peano (J.). 34.
Pellet (A.). 88, 89, 192, 197, 200.
Perrin (R.). 89.
Petot (A.). 85.
Pétrowitch (M.). 199.
Phragmèn (E.). 81.
Picard (E.). 32, 73, 78, 87, 89.
Pincherle (S.). 44, 48, 53, 175.
Pirondini (G.). 105.
Pizetti (P.). 42.
Pochhammer (L.). 28, 90, 112, 127.
Poincaré (H.). 75, 87, 88, 188.
Poisson (G.). 86.
Poloni (G.). 176.
Porro (F.). 34.
Rabut. 81, 148.
Raffy (L.). 83, 87, 88.
Reye (T.). 15, 25, 92.
Ribière. 75, 77.
Ripert (L.). 200.
Riquier. 89.
Rivereau. 185.
Rosenow (H.). 90.
Runge (C.). 167.
Ruoss (H.). 127.
Saalschütz (L.). 163.
Saint-Robert (P. de). 43.
Saltykow (N.). 189.
Sarrau. 84, 85, 90.
Saussure (R. de). 89, 90.
Schiaparelli (G.). 48, 50, 171, 176, 177, 183, 184.
Schilling (F.). 161.
Schlesinger (L.). 9, 73, 110, 114.
Schafheitlin (P.). 20, 117.
Schmidt (H.). 119, 128, 163.
Schottky (F.). 10, 11, 19, 23, 26, 93, 98, 115.
Schröter (H.). 95, 106.
Schulze (E.). 161.
Schumacher (R.). 113, 123.
Schumann (R.). 160.
Schur (F.). 96, 159.
Schütz (J.). 136.
Schwering (K.). 26, 108, 122, 126.
Secchi (A.). 48.
Segen (D.). 126.
Segre (C.). 36.
Séguier (de). 79, 200.
Seligmann-Lui. 82.
Selling (E.). 18.
Servant. 78, 192, 197.
Severini (C.). 35, 40.
Seyno (A.). 45, 46.
Siacci (F.). 80, 84.
Simon (M.). 23, 103.
Sintzow (D.). 164.
Somoff (P.). 169.
Sparre (de). 187.
Stahl (H.). 119, 169.
Stahl (W.). 25.
Stäckel (P.). 18, 31, 122, 124, 131, 132, 133, 134, 135.
Staude (O.). 12, 139.
Stekloff. 85.
Stern (M.). 10, 20.
Sturm (R.). 7, 169.
Suchar (P.). 86.
Tano (F.). 8.
Tedone (H.). 43.
Thomae (J.). 109.
Thomé (L.). 22, 97, 129.
Thybaut (A.). 156.
Timerding (H.). 166.
Torrès (L.). 193.
Touche. 185.
Tzitzéica. 79, 85, 88.
Vahlen (K.). 98, 126, 132, 139.
Vallier (E.). 81, 82, 83.
Vasseur. 76.
Volterra (V.). 35, 36, 39.
Wallenberg (G.). 119, 133.
Weill (M.). 187, 195.
Weltmann (W.). 163.
Wendt (E.). 139.
Weyr (E.). 175.
Wölffing (E.). 160.
Young (G.). 40, 41.
Zaremba (S.). 74, 82.
Ziegel (R.). 170.
Zindler (K.). 124.
Zsigmondy (K.). 125.
Züge. 25.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXVI.

*

0

31381 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
B8
v. 37

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

Bulletin des sciences
mathématiques

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY